Pure Mathematics 理论数学, 2024, 14(4), 416-421
Published Online April 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2024.144149

Hans汉斯

T_p空间中小预对数导数模型

李梦雪[*]，何腾松

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2024年3月6日；录用日期：2024年3月26日；发布日期：2024年4月30日

摘 要

在研究万有Teichmüller空间过程中，通过Schwarzian导数，能够得到前Schwarzian导数(或对数导数)，从而定义小预对数导数模型，本文主要是在p次可积Teichmüller空间中得到小预对数导数模型中的一个连通分量$\hat{T}^0_{p,b}$。

关键词

万有Teichmüller空间，p次可积Teichmüller空间，对数导数，小预对数导数模型

Small Pre-Logarithmic Derivative Model in T_p Space

Mengxue Li[*], Tengsong He

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Mar. 6th, 2024; accepted: Mar. 26th, 2024; published: Apr. 30th, 2024

Abstract

In the process of studying universal Teichmüller space, we can get the pre-Schwarzian derivative (logarithmic derivative) through Schwarzian, thus defining the small pre-Schwarzian model. In this paper, we mainly get a connected component $\hat{T}^0_{p,b}$ in the small model in p-integrable Teichmüller space.

Keywords

Universal Teichmüller Space, p-Integrable Teichmüller Space, Pre-Schwarzian Derivative, Small Pre-Logarithmic Derivative

[*]通讯作者。

文章引用: 李梦雪, 何腾松. T_p空间中小预对数导数模型[J]. 理论数学, 2024, 14(4): 416-421.
DOI: 10.12677/pm.2024.144149

1. 引言及主要结果

小预对数导数模型是对数导数模型的推广，它是在研究万有 Teichmüller 空间的各个子空间(见[1]-[10])的性质上非常重要的工具。根据预对数导数模型推广出来的小预对数导数模型，结合 Bloch 空间的性质和 Carleson 度量得到 p 次 Teichmüller 空间的小预对数导数模型的一个连通分量 $\hat{T}^0_{P,b}$

首先给一些基本符号，用 $\Delta=\{z:|z|<1\}$ 表示全平面 $\mathbb{C}$ 上的单位圆盘，$\Delta^*=\{z:|z|>1\}$ 表示单位圆盘外部。$M_1(\Delta^*)$ 表示 Banach 空间 $L^\infty(\Delta^*)$ 在 Δ^* 中单位球上的有界可测函数，对任意的 $\mu\in M_1(\Delta^*)$，在平面上存在唯一拟共形映射 f_μ，在 Δ^* 上的复特征为 μ，在Δ的复特征为 0，标准形式为：

$$f_\mu(0)=f''_\mu(0)-1=0.$$

在Δ上的共形映射 f 的 pre-Schwarzian 导数 P_f 和 Schwarzian 导数 S_f 定义如下：

$$P_f=(\log f')',S_f=(P_f)'-\frac{1}{2}(P_f)^2.$$

我们设 μ_1 和 μ_2 是在 $M_1(\Delta^*)$ 上的 Beltrami 系数，在 Teichmüller 空间上如果有 $f_{\mu_1}(\Delta)=f_{\mu_2}(\Delta)$ 则可以说 μ_1 和 μ_2 是等价的使用 $\mu_1\sim\mu_2$ 表示，万有 Teichmüller 空间(参见[11] [12])可以使 $T=M_1(\Delta^*)/\sim$ 表示，当 $\mu\in L^\infty(\Delta^*)$ 我们就可以用 $[\mu]$ 表示这一类复特征。

设 S_Q 为单位圆盘Δ中所有单叶解析函数Δ的类，其标准条件为 $f(0)=f'(0)-1=0$，能延拓到整个复平面上一个拟共形映射。设

$$\hat{T}(1)=\{\log f':f\in S_Q\text{ 有界}\}$$

故 $z_0\in\Delta^*$，对于 $\mu\in M(\Delta^*)$，$\hat{T}(1)$ 被称为万有 Teichmüller 空间 T 的预对数导数模型。

使用 $A(\Delta)$ 表示在Δ中的所有解析函数的集合。Beltrami 微分 $\mu(z)\in M(U^*)$ 在 Δ^* 的边界处消失，如果对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $r>$ 使得 $\|\mu_{|z|<r}\|_\infty<\varepsilon$。因此可以定义小的 Teichmüller 空间[13]为：

$$\hat{T}^0=\{[\mu]:\mu\in M^0(U^*)\},$$

它是万有 Teichmüller 空间的子空间，其中 $M^0(U^*)$ 是由所有不变的 Beltrami 微分构成。众所周知 $\hat{T}(1)$ 被称为万有 Teichmüller 空间 T 的预对数导数模型。$\hat{T}(1)$ 是 Bloch 空间 $\mathfrak{B}$ 的断开子集[14]。$\hat{T}(1)$ 的连通分量有 $\hat{T}_b=\{\log f'\in\hat{T}(1):f(\Delta)\text{是有界的}\}$ 以及 $\hat{T}_\theta=\{\log f'\in\hat{T}(1):F(e^{i\theta})=\infty\}$，$\theta\in[0,2\pi)$。类似地，我们定义万有 Teichmüller 空间中的小预对数导数模型为[14]：

$$\hat{T}^0(1)=\{\log f'\in\hat{T}(1):\log f'\in\mathfrak{B}^1_0\}.$$

当且仅当复特征 $\mu_{f(z)}$ 属于 $M^0(U^*)$ 时，$\log f'$ 是在小 Bloch 空间 $\mathfrak{B}^1_0$ 中。

胡光明在[13]中 Morrey 型 Teichmüler 空间 H^2_K 中定义小预对数导数模型：

$$T^0_{MT}=\{\log f'\in\hat{T}^0(1):\log f'\in H^2_K\}.$$

并在空间 H^2_K 中证明下面的结果：

定理 1.1 [13]小预对数导数模型 T^0_{MT} 有连通分量：

$$T_{MT,b}^{0}(1)=\left\{\log f':f\in T_{MT}^{0}(1):f(\Delta)\text{是有界的}\right\}$$

我们在 $2\le p<\infty$ 的情况下，考虑 p 次可积 Teichmüller 空间 T_p 定义的预对数导数模型 $\hat{T}_P^0(1)$

$$\hat{T}_P^0(1)=\left\{\log f'\in\hat{T}^0(1):\log f'\in\mathbb{B}_p\right\}.$$

也存在类似的定理：

定理 1.2 小预对数导数模型 $\hat{T}_P^0(1)$ 有连通分量

$$\hat{T}_{P,b}^{0}(1)=\left\{\log f'\in\hat{T}_P^0(1):f(\Delta)\text{是有界的}\right\}.$$

2. 准备工作

在这篇文章中，我们确定以下一些特殊符号。这个符号 $A\asymp B$ 表示存在一个常数 C 使得 $A/C\le B\le AC$，符号 $A\lesssim B$ （$A\gtrsim B$ 表示存在一个常数 C 使得 $A\le CB$ （$A\ge CB$）。

我们用 $\mathrm{QS}\left(S^1\right)$ 表示 S^1 上拟对称同胚 h 所组成的群， $\text{Möb}\left(S^1\right)$ 表示单位圆上到它自身的 Möbius 变换群。万有 Teichmüller 空间是右陪集 $T=\mathrm{QS}\left(S^1\right)/\text{Möb}\left(S^1\right)$。

设 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 到其自身上的拟共形映射，则 f 是具有局部积分分布导数的同胚，满足 Beltrami 方程 $f_{\bar{z}}=\mu f_z$，$\|\mu\|_\infty=\sup_{z\in\mathbb{C}}|\mu(z)|<1$。这里我们使用下式子表示 $f_{\bar{z}},f_z$：

$$f_{\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\frac{\partial f}{\partial y}\right),\ f_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

μ 为 f 的复特征。可测的黎曼映射定理[15]知，对于具有 $\|\mu\|_\infty<1$ 的复平面 $\mathbb{C}$ 的每个可测函数 μ，在 $\mathbb{C}$ 上有一个复特征为 μ 的拟共形映射 f，对于 $\mathbb{C}$ 对自身的 Möbius 变换，f 是唯一的。

我们现在先认识几个空间。Bloch 空间 $\mathfrak{B}$ 由Δ中所有解析函数 f 组成，使得

$$\|f\|_{\mathfrak{B}}=\sup_{z\in\Delta}|f'(z)|\left(1-|z|^2\right)<\infty.$$

小的 Bloch 空间 $\mathfrak{B}_0$ 是 Bloch 空间 $\mathfrak{B}$ 的闭子空间，由 $f\in\mathfrak{B}$ 的函数组成，使得

$$\lim_{|z|\to1^-}|f'(z)|\left(1-|z|^2\right)^2=0.$$

接下来，将在 p 次可积 Teichmüller 空间 T_p 中定义 $M^p\left(\Delta^*\right)$，设 $2\le p<\infty$，我们用 $M^p\left(\Delta^*\right)$ 表示所有本质有界可测函数 μ 的 Banach 空间，有限范数为：

$$\|\mu\|_p=\|\mu\|_\infty+\left(\iint_{\Delta^*}\frac{|\mu(z)|^p}{\left(|z|^2-1\right)^2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

设 $M_1^p\left(\Delta^*\right)=M^p\left(\Delta^*\right)\cap M\left(\Delta^*\right)$，$p$ 次可积空间的定义 $M_1^p/\sim$。

设 $2\le p<\infty$， $\mathbb{B}_p(\Delta)$ 表示在Δ中的全纯函数 ϕ，范数为：

$$\|\phi\|_{\mathbb{B}_p}=\left(\frac{1}{\pi}\iint_\Delta|\phi'(z)|^p\left(1-|z|^2\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中 $\mathbb{B}_p^0=\left\{\phi\in\mathbb{B}_p(\Delta):\phi(0)=0\right\}$。

最后，介绍 K-Carleson 测度(或消失的 K-Carleson 测度)。设 $S_\Delta(I)$ 表示在 Δ 中的 Carleson 测度，$S_{\Delta^*}(I)$ 表示在 Δ^* 中的 Carleson 测度，表示如下

$$S_{\Delta}(I)=\{r\zeta\in\Delta:1-|I|\le r<1\},\zeta\in I,$$

$$S_{\Delta^*}(I)=r\zeta\in\Delta^*:1-|I|\le r<1,\zeta\in I.$$

在 Δ 上 μ 的非负测度称为 μ 的 K-Carleson 测度，有如下形式：

$$\|\mu\|_{\Delta.K}=\sup_{I\in\partial\Delta}\left(\frac{\mu(S_{\Delta}(I))}{K|I|}\right)^{\frac{1}{2}},$$

此外，如果额外有

$$\lim_{|I|\to 0}\frac{\mu(S_{\Delta}(I))}{K|I|}.$$

则 μ 被称为在 Δ 上消失的 K-Carleson 测度。当 $K(t)=t^{\lambda}(0\,\lambda\le 1)$ 时，K-Carleson 测度(消失的 K-Carleson 测度)是 λ-Carleson 测度(消失的 λ-Carleson 测度)。特别的，当 $K(t)=t$ 时是经典的 Carleson 测度。类似地，我们定义在 Δ^* 上的 K-Carleson 测度。设 $CM_K(\Delta)(CM_{K,0}(\Delta))$ 表示在 Δ 上所有的 K-Carleson 测度(消失的 K-Carleson 测度)的集合，$CM_K(\Delta^*)(CM_{K,0}(\Delta^*))$ 表示在 Δ^* 上所有的 K-Carleson 测度(消失的 K-Carleson 测度)的集合。

设 $L(\Delta^*)$ 表示所有本质有界可测函数 μ 的 Banach 空间，并且有 $\lambda_{\mu}\dfrac{|\mu(z)|^p}{|z|^2-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$K$-卡尔森测度。$\mu\in L(\Delta^*)$ 的范数定义如下；

$$\|\mu\|_L=\|\mu\|_{\infty}+\|\lambda_{\mu}\|_{\Delta^*,K}$$

这里，我们设 $\mathfrak{D}(\Delta^*)=M(\Delta^*)\cap L(\Delta^*)$，$\mathfrak{D}^0(\Delta^*)=M^0(\Delta^*)\cap L(\Delta^*)$。现在我们开始证明结论。

3. 主要结果的证明

证明： 由定义可知

$$\log f'\in\hat{T}_P^0(1),$$

在文献[16]则中的定理 1.2 可知，f 能延拓到复平面 $\mathbb{C}$ 的拟共形映射其复特征 μ 满足

$$\lambda_{\mu}=\frac{|\mu(z)|^p}{\left(|z|^2-1\right)^{2-K}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\in CM_K(\Delta^*),$$

在 Δ 中等于 0。

设 f^t 是在 $\mathbb{C}$ 中的拟共形映射且满足 $f^{-1}(\infty)=(f^t)^{-1}(\infty)$，复特征有 $\mu f^t=t\mu_f$。

我们现在证明映射

$$t\to\log\left(f^t\right)',\ 0\le t\le 1,$$

在 $\mathfrak{B}_0\cap\mathbb{B}_p(\Delta)$ 是连续的。

回想，在 Bloch 范数(2.11)式[11]的拓扑结构中，前 Schwarzian 导数 P_f 在 $M(\Delta^*)$ 上是连续的，即有：

$$\sup_{z\in\Delta}\left|P_{f^{\mu}}^2(z)-P_{f^{v}}^2(z)\right|\left(1-|z|^2\right)\le\|\mu-v\|_{\infty,\mu,v}\in M(\Delta^*)$$

则我们通过一个标准的计算可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\log\left(f^{\mu}\right)'-\log\left(f^{\nu}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}^{p}\\
&=\frac{1}{\pi}\iint_{\Delta}\left|P_{f^{\mu}}-P_{f^{\nu}}\right|^{p}\left(1-|z|^{2}\right)^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim\left|P_{f^{\mu}}(0)-P_{f^{\nu}}(0)\right|^{p}+\iint_{\Delta}\left|\left(P_{f^{\mu}}(z)\right)'-\left(P_{f^{\nu}}(z)\right)'\right|^{p}\left(1-|z|^{2}\right)^{2p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim\|\mu-\upsilon\|_{\infty}^{p}+\iint_{\Delta}\left(1-|z|^{2}\right)^{2p-2}\left|S_{\mu}(z)-S_{\nu}(z)+\frac{1}{2}\left(P_{f^{\mu}}^{2}(z)-P_{f^{\nu}}^{2}(z)\right)\right|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&\lesssim\|\mu-\upsilon\|_{\infty}^{p}+\left\|S_{\mu}(z)-S_{\nu}(z)\right\|_{\mathcal{B}_p}^{p}+\left(\left\|\log\left(f^{\mu}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}^{p}+\left\|\log\left(f^{\nu}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}^{p}\right)\|\mu-\upsilon\|_{\infty}^{p}.
\end{aligned}$$

所以由上面以及 K-卡尔森测度的范数

$$\|\mu\|_{L}=\|\mu\|_{\infty}+\left\|\lambda_{\mu}\right\|_{\Delta^{*},K}$$

我们可以得到

$$\left\|\log\left(f^{\mu}\right)'-\log\left(f^{\nu}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}\lesssim\|\mu-\nu\|_{L},$$

接着我们就可以得到

$$\left\|\log\left(f^{\mu}\right)'-\log\left(f^{\nu}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}\lesssim|1-t|\cdot\|\mu\|_{L},$$

推测出

$$\left\|\log\left(f^{t_1}\right)'-\log\left(f^{t_2}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}\lesssim|t_1-t_2|\cdot\|\mu\|_{L}.$$

另一方面，由文献[17]中的第二章的定理 3.1，我们可以得到

$$\left\|\log\left(f^{t_1}\right)'-\log\left(f^{t_2}\right)'\right\|_{\mathfrak{B}}\lesssim|t_1-t_2|\cdot\|\mu\|_{\infty},$$

因此，我们能推测出

$$\left\|\log\left(f^{t_1}\right)'-\log\left(f^{t_2}\right)'\right\|_{\mathfrak{B},\mathbb{B}_p}\lesssim|t_1-t_2|\cdot\|\mu\|_{L},$$

其中

$$\left\|\log\left(f^{t_1}\right)'-\log\left(f^{t_2}\right)'\right\|_{\mathfrak{B},\mathbb{B}_p}=\left\|\log\left(f^{t_1}\right)'-\log\left(f^{t_2}\right)'\right\|_{\mathfrak{B}}+\left\|\log\left(f^{t_1}\right)'-\log\left(f^{t_2}\right)'\right\|_{\mathbb{B}_p}.$$

这意味着路径 $t\to\log\left(f^{t}\right)'$， $0\le t\le 1$ 在 $\mathfrak{B}_0\cap\mathbb{B}_p(\Delta)$ 是连续的。

因此，映射

$$t\to\log\left(f^{t}\right)',0\le t\le 1$$

在 $\hat{T}_P^0(1)$ 是连续的。从而，对每一个 $\log f' \in \hat{T}_P^0(1)$ 可以通过连续连通到 Möbius 变换 γ，并满足 $\gamma' \in \hat{T}_P^0(1)$。因为 $\gamma(\Delta)$ 是有界的，我们有 $\log\gamma' \in \hat{T}_P^0(1)$。

此外，它有路径 $\rho \to \log\gamma'_\rho$ 是在 $\hat{T}_P^0(1)$ 中连接点 $\log\gamma'$ 到 0 (见[1])，其中 $\gamma_\rho = \gamma(\rho z)$。因此我们可以得到

$$\hat{T}_{P,b}^0(1) = \left\{\log f' \in \hat{T}_P^0(1) : f(\Delta)\text{是有界的}\right\}$$

是 $\hat{T}_P^0(1)$ 的连通分量。

证毕。

参考文献

[1] Astala, K. and Zinsmeister, M. (1991) Teichmüller Spaces and BMOA. *Mathematische Annalen*, **289**, 613-625. https://doi.org/10.1007/BF01446592

[2] Fan, J. and Hu, J. (2016) Holomorphic Contractibility and Other Properties of the Weil-Petersson and VMOA Teichmüller spaces. *Annales Fennici Mathematici*, **41**, 587-600. https://doi.org/10.5186/aasfm.2016.4137

[3] Gardiner, F.P. and Sullivan, D.P. (1992) Symmetric Structures on a Closed Curve. *American Journal of Mathematics*, **114**, 683-736.https://doi.org/10.2307/2374795

[4] Gay-Balmaz, F. and Ratiu, T.S. (2015) The Geometry of the Universal Teichmüller Space and the Euler-Weil-Petersson Equation. *Advances in Mathematics*, **279**, 717-778. https://doi.org/10.1016/j.aim.2015.04.005

[5] Nag, S. and Verjovsky, A. (1990) Diff(S^1) and the Teichmüller Spaces. *Communications in Mathematical Physics*, **130**, 123-138. https://doi.org/10.1007/BF02099878

[6] Radnell, D., Schippers, E. and Staubach, W. (2015) A Hilbert Manifold Structure on the Weil-Petersson Class Teichmüller Space of Bordered Riemann Surfaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, **17**, Article ID: 1550016. https://doi.org/10.1142/S0219199715500169

[7] Shen, Y. and Tang, S. (2020) Weil-Petersson Teichmüller Space II: Smoothness of Flow Curves of H^(3/2) Vector Fields. *Advances in Mathematics*, **359**, Article ID: 106891. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106891

[8] Shen, Y. and Wei, H. (2013) Universal Teichmüller Space and BMO. *Advances in Mathematics*, **34**, 129-148. https://doi.org/10.1016/j.aim.2012.10.017

[9] Shen, Y.L. and Wu, L. (2021) Weil-Petersson Teichmüller Space III: Dependence of Riemann Mappings for Weil-Petersson Curves. *Mathematische Annalen*, **381**, 857-904. https://doi.org/10.1007/s00208-020-02067-5

[10] Wei, H. and Matsuzaki, K. (2021) Teichmüller Spaces of Piecewise Symmetric Homeomorphisms on the Unit Circle. *Pacific. Journal of Mathematics*, **314**, 495-514. https://doi.org/10.2140/pjm.2021.314.495

[11] Lehto, O. (1986) Univalent Functions and Teichmüller Spaces. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8652-0

[12] Nag, S. (1988) The Complex Analytic Theory of Teichmüller Space. Wiley, Hoboken.

[13] Hu, G. Liu, Y. and Qi, Y. (2020) Morrey Type Teichmüller Space and Higher Bers Maps. *Journal of Mathematical Inequalities*, **14**, 781-804. https://doi.org/10.7153/jmi-2020-14-50

[14] Zhuravlev, I. (1986) Model of the Universal Teichmüller Space. *Siberian Mathematical Journal*, **27**, 691-697. https://doi.org/10.1007/BF00969197

[15] Ahlfors, L.V. (2006) Lectures on Quasiconformal Mappings. American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/ulect/038

[16] Tang, S., Hu, G. and Shi, Q. (2019) Higher Schwarzian Derivative and Dirichlet Morrey Space. *OA*, **33**, 5489-5498. https://doi.org/10.2298/FIL1917489T

[17] Letho, O. (2012) Univalent Functions and Teichmüller Spaces. Springer, Berlin.