Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2012, 1, 18-27
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2012.11003 Published Online August 2012 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

On the Quadratic Inverse Eigen-Problem for the Special Triple (*M*, *C*, *K*) of Symmetric Matrix*

Xiantong Huang, Shenhai Yan

College of Mathematics & Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou
Email: hxt826@sohu.com

Received: Jul. 13th, 2012; revised: Jul. 26th, 2012; accepted: Aug. 3rd, 2012

Abstract: The quadratic inverse eigen-problem was studied for the special triple (***M***, ***C***, ***K***) of symmetric matrix. The existence and expression of the solution was given by the generation inverse matrix and linear algebra theorem. The numerical experiment shows that the algorithm is effective.

Keywords: Quadratic Eigenvalue Problem; Quadratic Inverse Eigen-Problem; Quadratic Inverse Eigenpairs Problem

一类特殊结构对称矩阵三元组(*M*、*C*、*K*)的逆二次特征问题*

黄贤通，严深海

赣南师范学院数学与计算机科学学院，赣州
Email: hxt826@sohu.com

收稿日期：2012 年 7 月 13 日；修回日期：2012 年 7 月 26 日；录用日期：2012 年 8 月 3 日

摘　要：应用广义逆矩阵理论和线性代数基本理论研究了一类特殊结构对称矩阵三元组(***M***、***C***、***K***)的逆二次特征值问题和逆二次特征对问题，给出了解的存在性和解的表达式，数值算例说明了算法的有效性。

关键词：二次特征问题；逆二次特征问题；逆二次特征对问题

1. 引言

二次特征问题，是指已知矩阵三元组(***M***、***C***、***K***)，求数 λ 和向量 $\boldsymbol{x}$ 满足 $Q(\lambda)\boldsymbol{x}=0$，这里 $Q(\lambda)=\lambda^2\boldsymbol{M}+\lambda\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}$，此时称满足 $\det Q(\lambda)=0$ 的 λ 为二次特征值，满足 $Q(\lambda)\boldsymbol{x}=0$ 的 $\boldsymbol{x}$ 称为对应于 λ 的特征向量，称 (λ, x) 为特征对。这类问题来源于带阻尼的弹簧质点系统[1-3](此时，***M*** 对应质量矩阵，***C*** 对应阻尼矩阵，***K*** 对应刚度矩阵)和二阶电路系统[2](此时，***M*** 对应电感矩阵，***C*** 对应电阻矩阵，***K*** 对应电容矩阵)。二次逆特征问题，是指根据矩阵三元组(***M***、***C***、***K***)的部分信息，寻找 ***M***、***C***、***K*** 的全部信息，使得具有事先给定的特征值，或具有事先给定的特征对，前者被称为逆二次特征值问题，后者被称为逆二次特征对问题。

围绕逆二次特征值问题和逆二次特征对问题，文献[1]讨论了 ***M*** 为正定阵，***C***、***K*** 为半正定阵的情形，文献[2]讨论了(***M***、***C***、***K***)为非对称阵的情形，文献[3-9]讨论了 ***M*** 为单位阵(对角阵)，***C*** 为对角阵(对称三对角阵)、***K*** 为对称三对角阵的情形，文献[10]讨论了由不足 $2n$ 个特征对信息构造(***M***、***C***、***K***)矩阵的情形，文献[11]讨论了

*项目来源：江西省教育厅科技项目(GJJ10585)。

M 为 Hermitian 正定阵，**C**、**K** 为对称阵的情形，文献[12]讨论了由 2*n* 个特征对信息构造含参数的 **M**、**C**、**K** 矩阵(没有特殊结构的约束)的情形，文献[13]讨论了二次特征系统的修正问题，文献[14]给出了求解二次特征值问题多个特征对的一种并行方法。

本文研究以下特殊结构对称矩阵三元组(**M**、**C**、**K**)的逆二次特征值问题和逆二次特征对问题：

问题 *QIEP-I*：已知矩阵 $\boldsymbol{M}\in R^{4\times4},\boldsymbol{C}\in R^{4\times4}$ 和六个非零数 $\lambda_i, i=1,2,3,4,5,6$，求矩阵 $\boldsymbol{K}\in R^{4\times4}$，使得

$$\det Q(\lambda_i)=0,\quad i=1,2,3,4,5,6.$$

问题 *QIEP-II*：已知矩阵 $\boldsymbol{K}\in R^{4\times4}$ 和数 λ，μ 及向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in c^4$，求矩阵 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{C}\in R^{4\times4}$，使得

$$Q(\lambda)x=0,\quad Q(\mu)y=0.$$

这里

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} l_2 & -l_2 & 0 & 0\\ -l_2 & l_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & l_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & l_4\end{bmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} r_2 & 0 & -r_2 & 0\\ 0 & r_1+r_4 & 0 & -r_4\\ -r_2 & 0 & r_2+r_3 & 0\\ 0 & -r_4 & 0 & r_4\end{bmatrix},\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} d_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d_3 & -d_3\\ 0 & 0 & -d_3 & d_3+d_4\end{bmatrix}$$

本文应用广义逆矩阵理论和线性代数理论研究上述问题，将运用以下结论：

引理[15] 设 $\boldsymbol{I}$ 是 $R^{n\times n}$ 中单位阵，A^{+} 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-penrose 广义逆，矩阵 $\boldsymbol{A}\in C^{m\times n}, b\in c^m$，那么，非齐次线性方程组 $Ax=b$ 成立以下结论：

1) 当 $Ax=b$ 相容时，即 $AA^{+}b=b$ 成立时，$x=A^{+}b+\left(I-A^{+}A\right)y$ 是通解，其中 $x=A^{+}b$ 是极小范数解，$y\in c^n$ 为任意向量。

2) 当 $Ax=b$ 不相容时，$x=A^{+}b$ 是一个最小二乘解，$x=A^{+}b+\left(I-A^{+}A\right)y$ 是最小二乘解的通解，$y\in c^n$ 为任意向量。

2. 对称矩阵三元组(*M*、*C*、*K*)的特征值和特征向量

首先，通过直接展开 $\det Q(\lambda)=\left|\lambda^2\boldsymbol{M}+\lambda\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}\right|$，容易得到：

定理 1 特殊结构对称矩阵三元组(**M**、**C**、**K**)的二次特征多项式 $\det Q(\lambda)$ 只有 7 个根，其中，必含一个根为 0，且有以下表达式：

$$\det Q(\lambda)=\lambda\left(a_1+a_2\lambda+a_3\lambda^2+a_4\lambda^3+a_5\lambda^4+a_6\lambda^5+a_7\lambda^6\right).$$

这里，$a_1=(r_1+r_4)d_2d_3d_4$;

$$a_2=(r_1+r_4)r_2d_3d_4+(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_4+r_3r_4)(d_3+d_4)d_2+(l_2d_3+r_1r_4)d_2d_4;$$

$$\begin{aligned}a_3=&(r_1+r_4)(l_2d_3d_4+r_2r_3d_3+r_2r_3d_4+l_2d_2d_3+l_3d_2d_4+l_4d_2d_3)\\&+(r_2+r_3)(l_2d_3+l_2d_4+r_1r_4)d_2+l_2d_3(r_2d_4+d_2r_4)+r_2r_2r_4d_3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_4=&l_2(d_3+d_4)(r_1r_2+r_1r_3++r_3r_4+r_2r_3)+r_2(r_1+r_4)(l_3d_3+l_3d_4+l_4d_3)\\&+r_1r_4(l_2d_3+l_3d_2+r_2r_3)+l_2d_4r_2r_4+l_2d_2(d_3l_3+d_4l_3+r_2r_4+r_3r_4)\\&+l_4d_2(l_2d_3+r_1r_2+r_1r_3+r_2r_4+r_3r_4);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_5=&(r_1+r_4)(l_2l_3d_3+l_2l_3d_4+l_3l_4d_2+l_2l_4d_3)+(l_2r_1r_4+l_4d_2l_2)(r_2+r_3)\\&+l_2l_3r_2(d_3d_4)+r_2r_4(l_2r_3+l_3r_1)+l_4r_2(l_2d_3+r_1r_3)+r_4(r_2r_3l_4+l_2l_3d_2);\end{aligned}$$

$$a_6=l_2l_3(r_1+r_2)r_4+l_3l_4(r_1+r_4)r_2+l_2l_4(r_1r_2+r_1r_3+r_2r_4+r_3r_4+r_2r_3+d_2l_3);$$

$$a_7=(r_1+r_2+r_4)l_2l_3l_4.$$

其次，对称矩阵三元组(**M**、**C**、**K**)的特征向量有如下性质：

定理 2 设 (λ,x) 是二次特征问题 $Q(\lambda)x=0$ 的特征对，则特征向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$ 具有如下表达式：

1) 当 $\lambda=0$ 时，$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T=t\ \left(0,1,0,0\right)^T$；

2) 当 $\lambda\neq 0$，且 $|\Omega|=0$ 时，$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T=t\ \left(b_1,b_2,b_3,b_4\right)^T$；

这里，t 是任意非零数，Ω 和 $b_i\left(i=1,2,3,4\right)$ 的含义在证明中。

证明： 特征方程 $Q(\lambda)x=0$ 可记为

$$\begin{pmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \tag{1}$$

这里，$\Phi_{11}=\begin{pmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}\lambda^2 l_2+\lambda r_2+d_2 & -\lambda^2 l_2\\ -\lambda^2 l_2 & \lambda^2 l_2+\lambda\left(r_2+r_4\right)\end{pmatrix}$,

$\Phi_{12}=\begin{pmatrix}\varphi_{13} & \\ & \varphi_{24}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}-\lambda r_2 & \\ & -\lambda r_4\end{pmatrix},\Phi_{21}=\begin{pmatrix}\varphi_{31} & \\ & \varphi_{42}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}-\lambda r_2 & \\ & -\lambda r_4\end{pmatrix}$,

$\Phi_{22}=\begin{pmatrix}\varphi_{33} & \varphi_{34}\\ \varphi_{43} & \varphi_{44}\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}\lambda^2 l_2+\lambda\left(r_2+r_3\right)+d_3 & -d_3\\ -d_3 & \lambda^2 l_4+\lambda r_4+d_3+d_4\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{X}_1=\left(x_1,x_2\right)^T,\boldsymbol{X}_2=\left(x_3,x_4\right)^T$.

注意到：$\varphi_{12}=\varphi_{21},\varphi_{13}=\varphi_{31},\varphi_{24}=\varphi_{42},\varphi_{34}=\varphi_{43}$，容易得出：

1) $\lambda=0$ 时，$\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T=t\ \left(0,1,0,0\right)^T$；

2) $\lambda\neq 0$ 时，当 $d_i>0,r_i>0,l_i>0$ 时，$\Phi_{11}^{-1},\Phi_{12}^{-1},\Phi_{21}^{-1},\Phi_{22}^{-1}$ 存在。

下面讨论 $\lambda\neq 0$ 的情形，此时式(1)等价于：

$$\Phi_{11}\boldsymbol{X}_1=-\Phi_{12}\boldsymbol{X}_2,\Phi_{21}\boldsymbol{X}_1=-\Phi_{22}\boldsymbol{X}_2$$

综合上述两式有

$$\boldsymbol{X}_2=-\Phi_{12}^{-1}\Phi_{11}\boldsymbol{X}_1 \tag{2}$$

和

$$\left(\Phi_{21}-\Phi_{22}\Phi_{12}^{-1}\Phi_{11}\right)\boldsymbol{X}_1=0 \tag{3}$$

当记 $\Omega=\Phi_{21}-\Phi_{22}\Phi_{12}^{-1}\Phi_{11}\triangleq\left(\Omega_{ij}\right)_{2\times 2}$，则

$$\Omega_{11}=\varphi_{31}-\varphi_{33}\varphi_{13}^{-1}\varphi_{11}-\varphi_{34}\varphi_{24}^{-1}\varphi_{21},\ \ \Omega_{12}=-\varphi_{33}\varphi_{13}\varphi_{12}-\varphi_{34}\varphi_{24}^{-1}\varphi_{22},$$

$$\Omega_{21}=-\varphi_{43}\varphi_{13}^{-1}\varphi_{11}-\varphi_{44}\varphi_{24}^{-1}\varphi_{21},\ \ \Omega_{22}=\varphi_{42}-\varphi_{43}\varphi_{13}^{-1}\varphi_{12}-\varphi_{44}\varphi_{24}^{-1}\varphi_{22},$$

且 $|\Omega|=\varphi_{31}\varphi_{42}-2\varphi_{43}\varphi_{12}-\varphi_{31}\varphi_{44}\varphi_{24}^{-1}\varphi_{22}-\varphi_{33}\varphi_{13}^{-1}\varphi_{11}\varphi_{42}+\varphi_{13}^{-1}\varphi_{24}^{-1}\left(\varphi_{11}\varphi_{22}-\varphi_{12}\varphi_{21}\right)\left(\varphi_{33}\varphi_{44}-\varphi_{34}\varphi_{43}\right)$，可以注意到：

当 $|\Omega|\neq 0$ 时，由方程(3)可知 $\boldsymbol{X}_1$=0，进而由(2)知 $\boldsymbol{X}_2$=0，从而 $\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)$ 是零向量。

当 $|\Omega|=0$ 时，方程(3)有无穷多个解，且满足：

$$\Omega_{11}x_1+\Omega_{12}x_2=0 \text{ 或 } \Omega_{21}x_1+\Omega_{22}x_2=0.$$

于是可设 $x_1=\Omega_{12}t,\ x_2=-\Omega_{11}t,\ t$ 为非零数。

当记 $b_1=\Omega_{12},b_2=-\Omega_{11}$ 时，有 $\left(x_1,x_2\right)=\left(b_1,b_2\right)t$，代入(2)中有：

$$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\varphi_{13}^{-1}\varphi_{11} & -\varphi_{13}^{-1}\varphi_{12}\\ -\varphi_{24}^{-1}\varphi_{21} & -\varphi_{24}^{-1}\varphi_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}t\triangleq\begin{pmatrix}b_3\\b_4\end{pmatrix}t.$$

这里，$b_3=-\varphi_{13}^{-1}\left(\varphi_{11}b_1+\varphi_{12}b_2\right),b_4=-\varphi_{24}^{-1}\left(\varphi_{21}b_1+\varphi_{22}b_2\right)$。

综合上述有：$(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=t\ (b_1,b_2,b_3,b_4)^T$，当$|\Omega|=0$，$t$为非零数。

3. 问题 *QIEP-I* 的解

为了求解 *QIEP-I*，可整理成：

$$\det Q(\lambda)=\left|\lambda^2\boldsymbol{M}+\lambda\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}\right|=\begin{vmatrix} a_{11}(\lambda)+d_2 & a_{12}(\lambda) & a_{13}(\lambda) & 0 \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & 0 & a_{24}(\lambda) \\ a_{31}(\lambda) & 0 & a_{33}(\lambda)+d_3 & -d_3 \\ 0 & a_{42}(\lambda) & -d_3 & a_{44}(\lambda)+d_3+d_4 \end{vmatrix},$$

这里，$a_{11}(\lambda)=\lambda^2 l_2+\lambda r_2, a_{22}(\lambda)=\lambda^2 l_2+\lambda(r_1+r_4), a_{33}(\lambda)=\lambda^2 l_3+\lambda(r_2+r_3),$

$a_{44}(\lambda)=\lambda^2 l_2+\lambda r_4, a_{12}(\lambda)=a_{21}(\lambda)=-\lambda^2 l_2, a_{13}(\lambda)=a_{31}(\lambda)=-\lambda l_2,$

$a_{42}(\lambda)=a_{24}(\lambda)=-\lambda l_4$。

进一步展开，容易整理得到$\varphi(\lambda)=\left|\lambda^2\boldsymbol{M}+\lambda\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}\right|$的另一表达式。

定理 3 特殊结构对称矩阵三元组(**M**、**C**、**K**)的特征多项式为：

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)=&a_0(\lambda)+a_1(\lambda)d_2+a_2(\lambda)d_3+a_3(\lambda)d_4\\&+a_4(\lambda)d_2d_3+a_5(\lambda)d_2d_4+a_6(\lambda)d_3d_4+a_7(\lambda)d_2d_3d_4.\end{aligned}\tag{4}$$

这里，

$$\begin{aligned}a_0(\lambda)=&\left(a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda)-a_{21}(\lambda)a_{12}(\lambda)\right)a_{33}(\lambda)a_{44}(\lambda)\\&+\left(a_{31}(\lambda)a_{13}(\lambda)-a_{11}(\lambda)a_{33}(\lambda)\right)a_{24}(\lambda)a_{42}(\lambda)-a_{31}(\lambda)a_{13}(\lambda)a_{22}(\lambda)a_{44}(\lambda);\end{aligned}$$

$a_1(\lambda)=a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda)a_{44}(\lambda)-a_{24}(\lambda)a_{42}(\lambda)a_{33}(\lambda);$

$$\begin{aligned}a_2(\lambda)=&\left(a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda)-a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda)\right)\left(a_{33}(\lambda)+a_{44}(\lambda)\right)\\&+a_{42}(\lambda)\left(a_{21}(\lambda)a_{13}(\lambda)-a_{11}(\lambda)a_{24}(\lambda)\right)+a_{31}(\lambda)\left(a_{12}(\lambda)a_{24}(\lambda)-a_{13}(\lambda)a_{22}(\lambda)\right);\end{aligned}$$

$a_3(\lambda)=a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda)-a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda)a_{33}(\lambda)+a_{31}(\lambda)a_{13}(\lambda)a_{22}(\lambda);$

$a_4(\lambda)=a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda)+a_{22}(\lambda)a_{44}(\lambda)-a_{24}(\lambda)a_{42}(\lambda);$

$a_5(\lambda)=a_{22}(\lambda)a_{33}(\lambda)$; $a_6(\lambda)=a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda)-a_{21}(\lambda)a_{12}(\lambda)$; $a_7(\lambda)=a_{22}(\lambda)$.

于是，利用引理和定理 3，根据广义逆矩阵可得问题 *QIEP-I* 的解的表达式。

定理 4 问题 *QIEP-I* 有解的充分必要条件是：$BB^+\omega=\omega$，且解的表达式为向量$\boldsymbol{u}=B^+\omega+\left(\boldsymbol{I}_7-B^+B\right)\boldsymbol{Z}$中前三个分量对应于$d_2,d_3$和$d_4$，这里的$B,\boldsymbol{u},\omega$的含义见证明中，$B^+$为$B$的 Moore-penrose 广义逆，$\boldsymbol{I}_7$是$R^{7\times7}$中的单位矩阵，$\boldsymbol{Z}\in c^7$为任意向量。

证明：问题 *QIEP-I* 有解等价于成立：

$$\varphi(\lambda_i)=0, i=1,2,3,4,5,6.$$

基此，由定理 3 知，可以得到一个由 6 个方程求解 7 个未知数的方程：

$$B\boldsymbol{u}=\omega\tag{5}$$

这里，

$$B=\begin{pmatrix} a_1(\lambda_1) & a_2(\lambda_1) & a_3(\lambda_1) & a_4(\lambda_1) & a_5(\lambda_1) & a_6(\lambda_1) & a_7(\lambda_1) \\ a_1(\lambda_2) & a_2(\lambda_2) & a_3(\lambda_2) & a_4(\lambda_2) & a_5(\lambda_2) & a_6(\lambda_2) & a_7(\lambda_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1(\lambda_6) & a_2(\lambda_6) & a_3(\lambda_6) & a_4(\lambda_6) & a_5(\lambda_6) & a_6(\lambda_6) & a_7(\lambda_6) \end{pmatrix}\triangleq\left(b_{ij}\right)_{6\times7},$$

$$\boldsymbol{u}=\left(d_2,d_3,d_4,d_2d_3,d_2d_4,d_3d_4,d_2d_3d_4\right)^T\triangleq\left(u_i\right)\in R^7,$$

$$\omega=\left(-a_0\left(\lambda_1\right),-a_0\left(\lambda_2\right),-a_0\left(\lambda_3\right),-a_0\left(\lambda_4\right),-a_0\left(\lambda_5\right),-a_0\left(\lambda_6\right)\right)^T \triangleq \left(\omega_i\right)^T \in c^6,$$

由广义逆矩阵理论，依引理知，方程(5)有解 $\boldsymbol{u}=B^{+}\omega+\left(\boldsymbol{I}_7-B^{+}B\right)z,\ z\in c^7$ 为任意向量。

另一方面，考虑到方程(5)的特殊结构：

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} & b_{17} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} & b_{57} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} & b_{67} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_2d_3 \\ d_2d_4 \\ d_3d_4 \\ d_2d_3d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \\ \omega_5 \\ \omega_6 \end{pmatrix} \tag{6}$$

由线性代数基本理论，通过初等变换，可以化(6)为(7)

$$\begin{pmatrix} b^*_{11} & b^*_{12} & b^*_{13} & b^*_{14} & 0 & 0 & 0 \\ b^*_{21} & b^*_{22} & b^*_{23} & b^*_{24} & 0 & 0 & 0 \\ b^*_{31} & b^*_{32} & b^*_{33} & b^*_{34} & 0 & 0 & 0 \\ b^*_{41} & b^*_{42} & b^*_{43} & b^*_{44} & b^*_{45} & 0 & 0 \\ b^*_{51} & b^*_{52} & b^*_{53} & b^*_{54} & b^*_{55} & b^*_{56} & 0 \\ b^*_{61} & b^*_{62} & b^*_{63} & b^*_{64} & b^*_{65} & b^*_{66} & b^*_{67} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^*_1 \\ u^*_2 \\ u^*_3 \\ u^*_4 \\ u^*_5 \\ u^*_6 \\ u^*_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^*_1 \\ \omega^*_2 \\ \omega^*_3 \\ \omega^*_4 \\ \omega^*_5 \\ \omega^*_6 \end{pmatrix} \tag{7}$$

这里，$u^*_1,u^*_2,u^*_3,u^*_4,u^*_5,u^*_6,u^*_7$ 是 $d_2,d_3,d_4,d_2d_3,d_2d_4,d_3d_4,d_2d_3d_4$ 的某种置换。

不失一般性，考虑(7)中前三个方程对应的矩阵形式

$$\begin{pmatrix} b^*_{11} & b^*_{12} & b^*_{13} & b^*_{14} \\ b^*_{21} & b^*_{22} & b^*_{23} & b^*_{24} \\ b^*_{31} & b^*_{32} & b^*_{33} & b^*_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_2d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^*_1 \\ \omega^*_2 \\ \omega^*_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

那么(8)通过初等变换可得到典型方程：

$$T_iD=F, i=1,2,3,4\ 。$$

这里，$D=\left(d_2,d_3,d_4,d_2d_3\right)^T, F=\left(f_1,f_2,f_3\right)^T=\left(\omega^*_1,\ \omega^*_2,\ \omega^*_3\right)^T, t_{ij}\neq 0$，且

$$T_1=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 & 0 \\ t_{21} & 0 & t_{23} & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} \end{pmatrix}, T_2=\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 \\ 0 & t_{32} & 0 & t_{34} \end{pmatrix},$$

$$T_3=\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & 0 \\ t_{31} & t_{32} & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_4=\begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & t_{14} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 \\ t_{31} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

容易得到解的各种表达式。

定理 5 方程 $T_1D=F$ 的求解策略或解的表达式为：

1) 设 $a=t_{11}t_{34}$，$b=-\left(t_{12}t_{31}+t_{34}f_1\right)$，$c=t_{12}f_3$，由方程 $ad_2^2+bd_2+c=0$ 解出 d_2；

2) $d_3=\left(f_1-t_{11}d_2\right)/t_{12}$，$d_4=\left(f_2-t_{21}d_2\right)/t_{23}$，当 $t_{12}\neq 0, t_{23}\neq 0$ 时。

证明： $T_1D=F$ 等价于 $t_{11}d_2+t_{12}d_3=f_1$；$t_{21}d_2+t_{23}d_4=f_2$；$t_{31}d_2+t_{34}d_2d_3=f_3$。当 $t_{12}\neq 0, t_{23}\neq 0$ 时，有

$d_3=\left(f_1-t_{11}d_2\right)/t_{12}$，$d_4=\left(f_2-t_{21}d_2\right)/t_{23}$，且成立求解 d_2 的方程：$ad_2^2+bd_2+c=0$，这里，$a=t_{11}t_{34},\ b=-\left(t_{12}t_{31}+t_{34}f_1\right)$，$c=t_{12}f_3$。定理获证。

同理可得：

定理 6 方程 $T_2D=F$ 求解策略或解的表达式为：

1) $d_2=f_1/t_{11}$，当 $t_{11}\neq 0$；

2) $d_3=f_3/\left(t_{32}+t_{34}d_2\right)$，当 $t_{32}+t_{34}d_2\neq 0$；

3) $d_4=\left(f_2-t_{22}d_3\right)/t_{23}$，当 $t_{23}\neq 0$。

定理 7 方程 $T_3D=F$ 的求解策略或解的表达式为：

1) 设 $a=t_{14}t_{31},\ b=-\left(t_{11}t_{32}+t_{14}f_3\right),\ c=t_{32}f_1$，由方程 $ad_2^2+bd_2+c=0$ 解出 d_2；

2) $d_3=\left(f_3-t_{31}d_2\right)/t_{32}$，$d_4=\left(f_2-t_{21}d_2\right)/t_{23}$，当 $t_{32}\neq 0, t_{23}\neq 0$ 时。

定理 8 方程 $T_4D=F$ 的求解策略或解的表达式为：

1) $d_2=f_3/t_{31}$，当 $t_{31}\neq 0$；

2) $d_3=f_1/\left(t_{12}+t_{14}d_2\right)$，当 $t_{12}+t_{14}d_2\neq 0$；

3) $d_4=\left(f_2-t_{22}d_3\right)/t_{23}$，当 $t_{23}\neq 0$。

4. 问题 *QIEP-II* 的解

假设 $x=\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)^T$，$y=\left(y_1,y_2,y_3,y_4\right)^T$，那么问题 *QIEP-II* 的求解，等价于根据联立方程

$$Q(\lambda)x=0,\ Q(\mu)y=0 \tag{9}$$

求解得到 l_2,l_3,l_4，r_1,r_2,r_3,r_4，进而构造出矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$。

整理(9)得以下矩阵形式

$$\boldsymbol{A}v=b \tag{10}$$

这里，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}
\lambda^2(x_1-x_2) & 0 & 0 & 0 & \lambda(x_1-x_3) & 0 & 0\\
\mu^2(y_1-y_2) & 0 & 0 & 0 & \mu(y_1-y_3) & 0 & 0\\
\lambda^2(x_2-x_1) & 0 & 0 & \lambda x_2 & 0 & 0 & \lambda(x_2-x_4)\\
\mu^2(y_2-y_1) & 0 & 0 & \mu y_2 & 0 & 0 & \mu(y_2-y_4)\\
0 & \lambda^2x_3 & 0 & 0 & \lambda(x_3-x_1) & \lambda x_3 & 0\\
0 & \mu^2y_3 & 0 & 0 & \mu(y_3-y_1) & \mu y_3 & 0\\
0 & 0 & \lambda^2x_4 & 0 & 0 & 0 & \lambda(x_4-x_2)\\
0 & 0 & \mu^2y_4 & 0 & 0 & 0 & \mu(y_4-y_2)
\end{pmatrix}\in c^{8\times 7},$$

$$v=\left(l_2,\ l_3,\ l_4,\ r_1,\ r_2,\ r_3,\ r_4\right)^T,$$

$$b=\left(-d_2x_1,-d_2y_1,0,0,\left(x_4-x_3\right)d_3,\left(y_4-y_3\right)d_3,d_3x_3-\left(d_3+d_4\right)x_4,d_3y_3-\left(d_3+d_4\right)y_4\right)^T.$$

式(10)是一个由 8 个方程求解 7 个未知数的方程组，由引理利用广义逆理论知。

定理 9 问题 *QIEP-II* 有解的充分必要条件是：$\boldsymbol{A}A^+b=b$，且解的表达式为 $v=A^+b+\left(\boldsymbol{I}_7-A^+\boldsymbol{A}\right)z$，这里，$A^+$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 广义逆，$\boldsymbol{z}\in c^7$ 为任意向量，$\boldsymbol{I}_7$ 是 $R^{7\times 7}$ 中的单位矩阵。

另一方面，考虑到(10)的特殊结构，可以通过求解以下问题来获得问题 *QIEP-II* 的解：

问题 *QIEP-II*. 1:

求 l_2 和 r_2，满足 $\begin{pmatrix}\lambda^2\left(x_1-x_2\right) & \lambda\left(x_1-x_3\right)\\ \mu^2\left(y_1-y_2\right) & \mu\left(y_1-y_3\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}l_2\\ r_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d_2x_1\\ -d_2y_1\end{pmatrix}$。

问题 ***QIEP-II*. 2:**

当 l_2 是 *QIEP-II*. 1 的解时，求 r_1 和 r_4 满足：$\begin{pmatrix} x_2 & x_2-x_4 \\ y_2 & y_2-y_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 \\ r_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda(x_1-x_2)l_2 \\ \mu(y_1-y_2)l_2 \end{pmatrix}$。

问题 ***QIEP-II*. 3:**

当 r_2 是 *QIEP-II*. 1 的解时，求 l_3 和 r_3 满足：$\begin{pmatrix} \lambda^2 x_3 & \lambda x_3 \\ \mu^2 y_3 & \mu y_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_3 \\ r_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (x_4-x_3)d_3-\lambda(x_3-x_1)r_2 \\ (y_4-y_3)d_3-\mu(y_3-y_1)r_2 \end{pmatrix}$。

问题 ***QIEP-II*. 4:**

当 r_4 是 *QIEP-II*. 2 的解时，求 l_4 满足: $\begin{cases} \lambda^2 x_4 l_4 = d_3 x_3-(d_3+d_4)x_4-\lambda(x_4-x_2)r_4 \\ \mu^2 y_4 l_4 = d_3 y_3-(d_3+d_4)y_4-\mu(y_4-y_2)r_4 \end{cases}$。

引入以下记号：

$$D_1=\begin{vmatrix} \lambda^2(x_1-x_2) & \lambda(x_1-x_3) \\ \mu^2(y_1-y_2) & \mu(y_1-y_3) \end{vmatrix}, E_1=\begin{vmatrix} -d_2x_1 & \lambda(x_1-x_3) \\ -d_2y_1 & \mu(y_1-y_3) \end{vmatrix}, F_1=\begin{vmatrix} \lambda^2(x_1-x_2) & -d_2x_1 \\ \mu^2(y_1-y_2) & -d_2y_1 \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} x_2 & x_2-x_4 \\ y_2 & y_2-y_4 \end{vmatrix}, E_2=\begin{vmatrix} \lambda(x_1-x_2)l_2 & x_2-x_4 \\ \mu(y_1-y_2)l_2 & y_2-y_4 \end{vmatrix}, F_2=\begin{vmatrix} x_2 & \lambda(x_1-x_2)l_2 \\ y_2 & \mu(y_1-y_2)l_2 \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} \lambda^2x_3 & \lambda x_3 \\ \mu^2y_3 & \mu y_3 \end{vmatrix}, E_3=\begin{vmatrix} (x_4-x_3)d_3-\lambda(x_3-x_1)r_2 & \lambda x_3 \\ (y_4-y_3)d_3-\mu(y_3-y_1)r_2 & \lambda y_3 \end{vmatrix}, F_3=\begin{vmatrix} \lambda^2x_3 & (x_4-x_3)d_3-\lambda(x_3-x_1)r_2 \\ \mu^2y_3 & (y_4-y_3)d_3-\mu(y_3-y_1)r_2 \end{vmatrix}.$$

由线性代数基本理论，容易求解问题 *QIEP-II*. 1/2/3/4，得计算表达式。

定理 10　问题 *QIEP-II*. 1 有唯一解的条件是 $D_1 \neq 0$，且解的表达式为：$l_2=D_1^{-1}E_1, r_2=D_1^{-1}F_1$。

定理 11　问题 *QIEP-II*. 2 有唯一解的条件是 $D_2 \neq 0$，且解的表达式为：$r_1=D_2^{-1}E_2, r_4=D_2^{-1}F_2$。

定理 12　问题 *QIEP-II*. 3 有唯一解的条件是 $D_3 \neq 0$，且解的表达式为：$l_3=D_3^{-1}E_3, r_3=D_3^{-1}F_3$。

定理 13　问题 *QIEP-II*. 4 有唯一解的条件是：$D_4 \neq 0, D_5 \neq 0, x_4y_4 \neq 0$，$D_4^{-1}E_4=D_5^{-1}E_5$，且解的表达式为：$l_4=D_4^{-1}E_4$，这里 $D_4=\lambda^2x_4$，$D_5=\mu^2y_4$，$E_4=d_3x_3-(d_3+d_4)x_4-\lambda(x_4-x_2)r_4$，$E_5=d_3y_3-(d_3+d_4)y_4-\mu(y_4-y_2)r_4$。

综合上述定理可知：

定理 14　问题 *QIEP-II* 有唯一解的条件是：

1) $\lambda \neq \mu$，2) $D_i \neq 0, i=1,2,3,4,5$，3) $x_4y_4 \neq 0$，4) $D_4^{-1}E_4=D_5^{-1}E_5$，且解的表达式为：$(l_2,r_2,r_1,r_4,l_3,r_3,l_4)=(D_1^{-1}E_1,D_1^{-1}F_1,D_2^{-1}E_2,D_2^{-1}F_2,D_3^{-1}E_3,D_3^{-1}F_3,D_4^{-1}E_4)$。

5. 数值算例

本节给出利用线性方程组理论和广义逆矩阵理论分别求解问题 *QIEP-I/II* 的算例，且指出利用广义逆矩阵不适合求解问题 *QIEP-I*。

例 1 给定 $l_2=l_3=l_4=1$，$r_1=r_2=r_3=r_4=1$，$d_2=d_3=d_4=1$, 构造出矩阵：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

试求三元组(**M**、**C**、**K**)的二次特征值和相应的特征向量。

解： 由 Mathlab 根据定理 1、 2 可计算出三元组(**M**、**C**、**K**)的二次特征值：

$$\lambda_1 = -1.5167408;\ \ \lambda_2 = -0.2427297;\ \ \lambda_3 = 0\ ;$$

$$\lambda_4 = \overline{\lambda_5} = -0.4307451 + 1.3538889i;\ \ \lambda_6 = \overline{\lambda_7} = -0.3561863 + 0.8776197i。$$

对应的特征向量如下：

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} -0.0782576 \\ 0.3140298 \\ 0.5683367 \\ 0.0330613 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_2 = \begin{bmatrix} -1.6180749 \\ 1.9282758 \\ 5.9088893 \\ 2.9957469 \end{bmatrix}, \boldsymbol{X}_3 = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, t\text{ 为任意实数，}$$

$$\boldsymbol{X}_4 = \overline{\boldsymbol{X}_5} = \begin{bmatrix} -0.1323282 + 1.3530377i \\ 1.5900283 + 0.4823433i \\ 0.3664942 - 1.5538619i \\ 3.6169834 + 3.6716132i \end{bmatrix},\ \ \boldsymbol{X}_6 = \overline{\boldsymbol{X}_7} = \begin{bmatrix} -0.7787648 - 0.1629252i \\ -0.0259959 - 0.3146707i \\ -0.4939962 - 0.0510636i \\ -0.1869430 + 0.0853530\,i \end{bmatrix}.$$

可以验证：

$$\max_{1\le i\le 7}\left|\lambda_i^2\boldsymbol{M} + \lambda_i\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right| = 2.1668411\mathrm{e}-006 < 10^{-5};$$

$$\max_{1\le i\le 7}\left\|\left(\lambda_i^2\boldsymbol{M} + \lambda_i\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{X}_i\right\|_2 = 1.1437636\mathrm{e}-006 < 10^{-5}.$$

例 2 给定矩阵 $\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{C}$ 如下：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

和 6 个非零数：$\lambda_1 = -1.5167408$，$\lambda_2 = \overline{\lambda_3} = -0.4307451 + 1.3538889i$，

$$\lambda_4 = \overline{\lambda_5} = -0.3561863 + 0.8776197i,\ \ \lambda_6 = -0.2427297.$$

求 $d_2, \mathrm{d}_3, \mathrm{d}_4$，构造矩阵 $\boldsymbol{K}$，使得 $\left|\lambda_i^2\boldsymbol{M} + \lambda_i\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right| < 10^{-5}$，$i = 1,2,3,4,5,6.$

解：该问题属于 *QIEP-I*，根据定理 6 可计算得：

$$d_2 = 0.9999999,\ d_3 = 1.0000000,\ d_4 = 1.0000001 \tag{11}$$

进而可构造出 $\boldsymbol{K}$，且计算得：

$$\max_{1\le i\le 6}\left|\lambda_i^2\boldsymbol{M} + \lambda_i\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right| = 1.8366724\mathrm{e}-006 < 10^{-5} \tag{12}$$

另一方面，根据定理 4 知，利用广义逆矩阵计算得：

$$u = B^+\omega = \left(0.9999999,\ 1.0995870,\ 0.8008262,\ 1.3129876,\ 0.8719601,\ 0.4736115,\ 1.0000001\right).$$

从中取前三个分量为：

$$d_2 = 0.9999999,\ d_3 = 1.0995870,\ d_4 = 0.8008262\ .$$

也可构造出 $\boldsymbol{K}$，且计算：

$$\max_{1\le i\le 6}\left|\lambda_i^2\boldsymbol{M} + \lambda_i\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right| = 1.8393999 > 10^{-5}. \tag{13}$$

比较上述两解法的误差式(12)和(13)知，要以式(11)为问题 *QIEP-I* 的解。

例 3 给定 $d_2 = d_3 = d_4 = 1$，且已知 $\lambda = -1.5167408$、$\mu = -0.4307451 + 1.3538889i$ 和对应的向量：

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -0.0782576 \\ 0.3140298 \\ 0.5683367 \\ 0.0330613 \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} -0.1323282 + 1.3530377i \\ 1.5900283 + 0.4823433i \\ 0.3664942 - 1.5538619i \\ 3.6169834 + 3.6716132i \end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C} \in R^{4\times4}$，且构造矩阵 $\boldsymbol{K} \in R^{4\times4}$ 如下

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} l_2 & -l_2 & 0 & 0 \\ -l_2 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} r_2 & 0 & -r_2 & 0 \\ 0 & r_1 + r_4 & 0 & -r_4 \\ -r_2 & 0 & r_2 + r_3 & 0 \\ 0 & -r_4 & 0 & r_4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & -d_3 \\ 0 & 0 & -d_3 & d_3 + d_4 \end{bmatrix},$$

使得 $\left|Q(\lambda)\boldsymbol{X}\right| \le \varepsilon, \left|Q(\mu)\boldsymbol{Y}\right| \le \varepsilon$，$\varepsilon = 10^{-4}$。

解：该问题属于 *QIEP-II*，可以根据定理 14 求解，即首先计算得：

$$\begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4209543 + 1.1761054i \\ -1.0832722 - 1.1370491i \\ 0.4614018 + 3.3620996i \\ 0.0760576 \\ -1.6764553 - 10.2675991i \end{bmatrix} \ne 0, \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.4209536 + 1.1761055i \\ -1.0832727 - 1.1370484i \\ 0.4614015 + 3.3621001i \\ 0.0760577 + 0.0000002i \\ -0.4209536 + 1.1761053i \\ -1.0832727 - 1.1370484i \\ 0.4613996 + 3.3621016i \end{bmatrix}.$$

进而计算出：

$$\begin{bmatrix} l_2 \\ r_2 \\ r_1 \\ r_4 \\ l_3 \\ r_3 \\ l_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1^{-1}E_1 \\ D_1^{-1}F_1 \\ D_2^{-1}E_2 \\ D_2^{-1}F_2 \\ D_3^{-1}E_3 \\ D_3^{-1}F_3 \\ D_4^{-1}E_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9999999 - 0.0000005i \\ 0.9999998 - 0.0000005i \\ 0.9999999 - 0.0000005i \\ 0.9999999 - 0.0000005i \\ 1.0000001 + 0.0000001i \\ 1.0000005 + 0.0000007i \\ 1.0000018 + 0.0000030i \end{bmatrix}, \tag{14}$$

从而可构造出矩阵 $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{K} \in R^{4\times4}$，且验证得：

$$\begin{aligned} &\left\|\left(\lambda^2\boldsymbol{M} + \lambda\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{X}\right\|_2 = 7.1965928\mathrm{e}-008 < 10^{-7}; \\ &\left\|\left(\mu^2\boldsymbol{M} + \mu\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{Y}\right\|_2 = 3.5672547\mathrm{e}-005 < 10^{-4}. \end{aligned} \tag{15}$$

另一方面，根据定理 9，利用广义逆矩阵计算得：

$$v = \begin{bmatrix} l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}^{+}b = \begin{bmatrix} 1.0000001 - 0.0000002i \\ 0.9999999 + 0.0000002i \\ 1.0000000 + 0.0000001i \\ 1.0000001 - 0.0000002i \\ 1.0000000 - 0.0000003i \\ 0.9999999 + 0.0000005i \\ 1.0000001 - 0.0000002i \end{bmatrix} \tag{16}$$

从而可构造出矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K} \in R^{4\times 4}$，且验证得：

$$\begin{aligned} &\left\|\left(\lambda^2\boldsymbol{M}+\lambda\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{X}\right\| = 1.6256575\mathrm{e}-007 < 10^{-6}; \\ &\left\|\left(\mu^2\boldsymbol{M}+\mu\boldsymbol{C}+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{Y}\right\| = 5.8778227\mathrm{e}-007 < 10^{-6}. \end{aligned} \tag{17}$$

根据上述误差式(15)和(17)知，式(14)、(16)均可为问题 *QIEP-II* 的解。

6. 结语

本文研究了源自四网孔二阶电路系统设计[2]中的一类逆二次特征值问题和一类逆二次特征对问题，应用广义逆矩阵理论给出了解的存在性和解的表达式，特别是考虑到 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 的特殊结构要求，利用线性代数基本理论给出了两类问题求解的策略和解的表达式。通过数值实验知道，对于问题 *QIEP-I*，利用线性代数基本理论所得解的精度优于应用广义逆矩阵理论所求解，对于问题 *QIEP-II* 则两种方法所得解的精度相当，数值算例说明了算法的有效性。

参考文献 (References)

[1] P. Lancaster, U. Prells. Inverse problems for damped vibrating systems. Journal of Sound and Vibration, 2005, 283(3-5): 891-914.

[2] B. Dong, M. M. Lin and M. T. Chu. Parameter reconstruction of vibration systems from partial eigen information. Journal of Sound and Vibration, 2009, 327(3-5): 391-401.

[3] F. Tisseur. Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems. Linear Algebra and Its Applications, 2000, 309(1-3): 339-361.

[4] L. Starek. A symmetric inverse vibration problem with overdamped modes. Journal of Sound and Vibration, 1995, 5(181): 893-903.

[5] B. N. Datta, S. Elhay, Y. M. Ram and D. R. Sarlissian. Partial eigen structure assignment for the quadratic pencil. Journal of Sound and Vibration, 2000, 230(1): 101-110.

[6] P. Nylen. Inverse eigenvalue problem: Existence of special mass-damper-spring systems. Linear Algebra and Its Applications, 1999, 297(1-3): 107-132.

[7] L. Starek, D. J. Inman. Symmetric inverse eigenvalue vibration problem and its application. Mechanical Systems and Signal Processing, 2001, 15(1): 11-29.

[8] B. N. Datta, S. Deng, V. O. Sokolov and D. R. Sarkissian. An optimization technique for damped model updating with measured data satisfying quadratic orthogonality constraint. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(6): 1759-1772.

[9] 王正盛. 阻尼弹簧一质点系统中的逆二次特征值问题[J]. 高等学校计算数学学报, 2005, 3(27): 217-224.

[10] Y.-F. Cai , Y.-C. Kuo, W.-W. Lin and S.-F. Xu. Solutions to a quadratic inverse eigenvalue problem. Linear Algebra and its Applications, 2009, 430(5-6): 1590-1606.

[11] P. Lancaster, F. Tisseur. Hermitian quadratic matrix polynomials: Solvents and inverse problems. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436(10): 4017-4026.

[12] B. N. Datta, V. Sokolov. A solution of the affine quadratic inverse eigenvalue problem. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 434(7): 1745-1760.

[13] Y.-C. Kuoa, B. N. Datta. Quadratic model updating with no spill-over and incomplete measured data: Existence and computation of solution. Linear Algebra and Its Applications, 2012, 436(7): 2480-2493.

[14] 王顺绪, 戴华. 二次特征值问题的并行 Jacobi-Davidson 方法及其应用[J]. 数值计算与计算机应用, 2008, 4(29): 313-320.

[15] 谢冬秀, 雷纪刚, 陈桂芝编著. 矩阵理论及方法[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 260-267.

