Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2013, 2, 159-164
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.24021 Published Online November 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

Integrable Discretization of the Coupled *AKNS* Equation

Jia Wang, Lihua Zhang, Desheng Li

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang
Email: 2456953692@qq.com

Received: Sep. 13th, 2013; revised: Oct. 8th, 2013; accepted: Oct. 16th, 2013

Abstract: This paper mainly studied the integrable discretization of the second order coupled *AKNS* equation. First of all, some new N soliton solutions of the semi-discrete double linear derivative equation of the second order coupled *AKNS* equation are got by using the Hirota method and Maple. Then, the full discrete bilinear derivative equation is obtained through the method of discrete time of the semi-discrete double linear derivative equation and its N soliton solutions are found out. Finally, the difference-difference *AKNS* equation is obtained by an appropriate transformation.

Keywords: *AKNS* Equation; The Hirota Method; Interable Discretization; Soliton Solution

藕合的 *AKNS* 方程的可积离散化

王　佳，张丽华，李德生

沈阳师范大学数学与系统科学学院，沈阳
Email: 2456953692@qq.com

收稿日期：2013 年 9 月 13 日；修回日期：2013 年 10 月 8 日；录用日期：2013 年 10 月 16 日

摘　要：本文主要研究了藕合的二阶 *AKNS* 方程的可积离散化。首先对藕合的二阶 *AKNS* 方程的半离散双线性导数方程运用 Hirota 方法和 Maple 求出了其新的 N-孤子解；然后通过对半离散的双线性导数方程中的时间变量进行离散化，得到全离散的双线性导数方程并对其进行了求解；最后通过适当的变换得出差分－差分 *AKNS* 方程。

关键词：*AKNS* 方程；Hirota 方法；可积离散化；孤子解

1. 引言

在孤子理论中， *AKNS* 方程主要用来描述非一致媒质波，因此具有重要的物理背景，它的解也可以描述一类耗散波，因此对于 *AKNS* 方程的研究具有重要的实际意义[1]。到目前为止人们对连续的 *AKNS* 方程已经有了诸多研究[2-4]，对于离散的 *AKNS* 方程，陈守婷等人给出了半离散 *AKNS* 系统的对称与代数结构[5]，丁大军曾在文献[6]给出这类 *AKNS* 方程的半离散形式及其孤子解。本文在这些工作的基础上首先用 Hirota 方法求出了 *AKNS* 方程的半离散形式的其它 N-孤子解，接着将该 *AKNS* 方程的半离散形式进行全离散化并求出了其孤子解，最后通过适当的变换得到差分－差分的 *AKNS* 方程。因这类方程在流体力学，非线性光学和等离子体物理中有大量的实践和理论应用[7]，因此对其进行研究具有重要的理论和现实意义。

2. *AKNS* 方程的离散化

考虑一般的一阶向量谱问题：*AKNS* 谱问题

$$\phi_x = M\phi, M = \begin{pmatrix} -\mu & q \\ r & \mu \end{pmatrix}, \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix},$$

与本征函数随 t 的时间发展式

$$\phi_t = N\phi, N = \begin{pmatrix} R & S \\ T & -R \end{pmatrix},$$

其中 $q = q(t,x), r = r(t,x)$ 是一对光滑的位势函数，μ 是谱参数，而 R,S 和 T 是关于变量 (t,x) 以及 q,r 和谱参数 μ 的待定函数。将矩阵 M,N 带入相容性条件，即零曲率方程

$$M_t - N_x + [M,N] = 0, [M,N] = MN - NM\text{。}$$

通过复杂的幂级数展开，可以得到等谱的 *AKNS* 微分方程族：

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = L^n \begin{pmatrix} -q \\ r \end{pmatrix}, (n = 1,2,3,\cdots)$$

$$L = \kappa\partial + 2(q,-r)^T \partial^{-1}(r,q), \kappa = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

令 $n = 2$，可以得到非平凡的方程

$$\begin{pmatrix} q \\ r \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} -q_{xx} + 2q^2 r \\ r_{xx} - 2qr^2 \end{pmatrix}\text{。}$$

称上述方程为二阶的 *AKNS* 方程，对其进行有理变换 $q = \frac{g}{f}, r = \frac{h}{f}$ 以及双线性算子运算得到了该二阶 *AKNS* 方程的双线性形式：

$$\left(D_t + D_x^2\right) g\cdot f = \frac{g}{f}\left(D_x^2 f\cdot f + 2g\cdot f\right) \tag{1}$$

$$\left(D_t - D_x^2\right) h\cdot f = -\frac{h}{f}\left(D_x^2 f\cdot f + 2g\cdot f\right) \tag{2}$$

由此可以得到下列连续的双线性导数方程：

$$\left(D_t + D_x^2\right) g\cdot f = 0 \tag{3}$$

$$\left(D_t - D_x^2\right) h\cdot f = 0 \tag{4}$$

$$D_x^2 f\cdot f + 2g\cdot f = 0 \tag{5}$$

对方程(3)~(5)进行离散化，令：$D_x^2 = 2(\cosh D_n - 1)$，方程(3)~(5)可改写成如下的形式[6](也就是方程(3)~(5)的半离散双线性形式)：

$$\left(D_t + 2\cosh D_n - 2\right) g_n \cdot f_n = 0 \tag{6}$$

$$\left(D_t - 2\cosh D_n + 2\right) h_n \cdot f_n = 0 \tag{7}$$

$$\left(2\cosh D_n - 2\right) f_n \cdot f_n + 2g_n \cdot f_n = 0 \tag{8}$$

即：

$$g_{n,t}\cdot f_n - g_n \cdot f_{n,t} + g_{n+1}\cdot f_{n-1} + g_{n-1}\cdot f_{n+1} - 2g_n \cdot f_n = 0 \tag{9}$$

$$h_{n,t}\cdot f_n-h_n\cdot f_{n,t}-h_{n+1}\cdot f_{n-1}-h_{n-1}\cdot f_{n+1}+2h_n\cdot f_n=0 \tag{10}$$

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1}-f_n\cdot g_n-g_n\cdot g_n-f_n\cdot f_n=0 \tag{11}$$

这里 $f(n)$ 与 $g(n)$ 是关于离散变量 n 的函数，定义微分算子 $\mathrm{e}^{\varepsilon D_n}$ ，即

$$\mathrm{e}^{\varepsilon D_n}f(n)\cdot g(n)=f(n+\varepsilon)\cdot g(n-\varepsilon) \tag{12}$$

其逆算子 $\mathrm{e}^{-\varepsilon D_n}$ 作用在积 $f(n)\cdot g(n)$ 时，有

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon D_n}f(n)\cdot g(n)=f(n-\varepsilon)\cdot g(n+\varepsilon) \tag{13}$$

之后运用 Hirota 方法以及 Maple 可求出方程(9)~(11)的 N-孤子解，限于篇幅这里仅列出 2-孤子解：

$$g_n=\mathrm{e}^{\eta_1}+\mathrm{e}^{\eta_2}+a(1,1',2')\mathrm{e}^{\xi_1+\eta_1+\eta_2}+a(2,1',2')\mathrm{e}^{\xi_2+\eta_1+\eta_2} \tag{14}$$

$$h_n=\mathrm{e}^{\xi_1}+\mathrm{e}^{\xi_2}+a(1,2,1')\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\eta_1}+a(1,2,2')\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\eta_2} \tag{15}$$

$$f_n=1+a(1,1')\mathrm{e}^{\xi_1+\eta_1}+a(2,1')\mathrm{e}^{\xi_2+\eta_1}+a(1,2')\mathrm{e}^{\xi_1+\eta_2}+a(2,2')\mathrm{e}^{\xi_2+\eta_2}+a(1,2,1',2')\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\eta_1+\eta_2} \tag{16}$$

其中：

$$\mathrm{e}^{\eta_i}=P_i^{(n-n_0)}\mathrm{e}^{-\omega_i t} \tag{17}$$

$$\mathrm{e}^{\xi_i}=M_i^{(n-n_0)}\mathrm{e}^{-\sigma_i t} \tag{18}$$

$$\omega_i=\frac{(P_i-1)^2}{P_i} \tag{19}$$

$$\sigma_i=-\frac{(M_i-1)^2}{M_i} \tag{20}$$

$$a(1,1',2')=-\frac{M_1^2(P_1-P_2)^2}{(M_1P_1-1)^2(M_1P_2-1)^2} \tag{21}$$

$$a(2,1',2')=-\frac{M_2^2(P_1-P_2)^2}{(M_2P_1-1)^2(M_2P_2-1)^2} \tag{22}$$

$$a(1,2,1')=-\frac{P_1^2(M_1-M_2)^2}{(P_1M_1-1)^2(P_1M_2-1)^2} \tag{23}$$

$$a(1,2,2')=-\frac{P_2^2(M_1-M_2)^2}{(P_2M_2-1)^2(P_2M_1-1)^2} \tag{24}$$

$$a(1,1')=-\frac{P_1M_1}{(P_1M_1-1)^2} \tag{25}$$

$$a(2,1')=-\frac{P_1M_2}{(P_1M_2-1)^2} \tag{26}$$

$$a(1,2')=-\frac{P_2M_1}{(P_2M_1-1)^2} \tag{27}$$

$$a(2,2')=-\frac{P_2M_2}{(P_2M_2-1)^2} \tag{28}$$

$$a\left(1,2,1',2'\right)=\frac{\left(P_1-P_2\right)^2\left(M_1-M_2\right)^2 M_1M_2P_1P_2}{\left(M_1P_1-1\right)^2\left(M_2P_1-1\right)^2\left(M_1P_2-1\right)^2\left(M_2P_2-1\right)^2} \tag{29}$$

注意到方程(3)~(5)在下列变换下是保持不变的：

$$f\to f\cdot \mathrm{e}^{\alpha x+\beta t} \tag{30}$$

$$g\to g\cdot \mathrm{e}^{\alpha x+\beta t} \tag{31}$$

$$h\to h\cdot \mathrm{e}^{\alpha x+\beta t} \tag{32}$$

这里α,β是常数，而方程(6)~(8)在下列变换下也是不变的：

$$f_n\to f_n\cdot \mathrm{e}^{\alpha n+\beta t} \tag{33}$$

$$g_n\to g_n\cdot \mathrm{e}^{\alpha n+\beta t} \tag{34}$$

$$h_n\to h_n \mathrm{e}^{\alpha n+\beta t} \tag{35}$$

因此假设关于时间离散的双线性方程在下列变换下也是不变的：

$$f_n^m\to f_n^m\cdot \mathrm{e}^{\alpha n+\beta m} \tag{36}$$

$$g_n^m\to g_n^m\cdot \mathrm{e}^{\alpha n+\beta m} \tag{37}$$

$$h_n^m\to h_n^m \mathrm{e}^{\alpha n+\beta m} \tag{38}$$

这里$t=m\delta$， m是整数。

定义两个算子： $D_t g_n\cdot f_n=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}f-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}g$， $D_t h_n\cdot f_n=\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}f-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}h$，并用下面的差分算子代替它们中的微分算子[8]：

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\to\delta^{-1}\left[f_n^{m+1}-f_n^m\right] \tag{39}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\to\delta^{-1}\left[g_n^{m+1}-g_n^m\right] \tag{40}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\to\delta^{-1}\left[h_n^{m+1}-h_n^m\right] \tag{41}$$

由此得到关于时间差分的双线性算子：

$$D_t g_n\cdot f_n\to\delta^{-1}\left[g_n^{m+1}\cdot f_n^m-g_n^m\cdot f_n^{m+1}\right] \tag{42}$$

$$D_t h_n\cdot f_n\to\delta^{-1}\left[h_n^{m+1}\cdot f_n^m-h_n^m\cdot f_n^{m+1}\right] \tag{43}$$

对方程(6)~(7)使用(42)和(43)可得到如下全离散的双线性方程：

$$g_n^{m+1}\cdot f_n^m-g_n^m\cdot f_n^{m+1}+\delta\left[g_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^m+g_{n-1}^m\cdot f_{n+1}^m-2g_n^m\cdot f_n^m\right]=0 \tag{44}$$

$$h_n^{m+1}\cdot f_n^m-h_n^m\cdot f_n^{m+1}-\delta\left[h_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^m-h_{n-1}^m\cdot f_{n+1}^m-2h_n^m\cdot f_n^m\right]=0 \tag{45}$$

由于方程(44)~(45)在变换(36)~(38)下是改变的，所以下面考虑方程(44)~(45)的耦合方程(46)~(49)：

$$g_n^{m+1}\cdot f_n^m-g_n^m\cdot f_n^{m+1}+\delta\left[g_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^{m+1}+g_{n-1}^{m+1}\cdot f_{n+1}^m-2g_n^{m+1}\cdot f_n^m\right]=0 \tag{46}$$

$$g_n^{m+1}\cdot f_n^m-g_n^m\cdot f_n^{m+1}+\delta\left[g_{n+1}^{m+1}\cdot f_{n-1}^m+g_{n-1}^m\cdot f_{n+1}^{m+1}-2g_n^m\cdot f_n^{m+1}\right]=0 \tag{47}$$

$$h_n^{m+1}\cdot f_n^m-h_n^m\cdot f_n^{m+1}-\delta\left[h_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^{m+1}-h_{n-1}^{m+1}\cdot f_{n+1}^m-2h_n^{m+1}\cdot f_n^m\right]=0 \tag{48}$$

$$h_n^{m+1}\cdot f_n^m - h_n^m\cdot f_n^{m+1} - \delta\left[h_{n+1}^{m+1}\cdot f_{n-1}^m - h_{n-1}^m\cdot f_{n+1}^{m+1} - 2h_n^m\cdot f_n^{m+1}\right]=0 \tag{49}$$

方程(46)~(49)在方程变换(36)~(38)下是不变的，且方程(46)和方程(47)、方程(48)和方程(49)通过适当的坐标变换可以互相转化，在文献[8]中已引用过相同的结论，又方程(8)在变换(36)~(38)下也是保持不变的,由此我们得到(6)~(8)的全离散的双线性形式如下：

$$g_n^{m+1}\cdot f_n^m - g_n^m\cdot f_n^{m+1} + \delta\left[g_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^{m+1} + g_{n-1}^{m+1}\cdot f_{n+1}^m - 2g_n^{m+1}\cdot f_n^m\right]=0 \tag{50}$$

$$h_n^{m+1}\cdot f_n^m - h_n^m\cdot f_n^{m+1} - \delta\left[h_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^{m+1} - h_{n-1}^{m+1}\cdot f_{n+1}^m - 2h_n^{m+1}\cdot f_n^m\right]=0 \tag{51}$$

$$f_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^m - f_n^m\cdot f_n^m + g_n^m\cdot h_n^m = 0 \tag{52}$$

运用 Hirota 方法求出方程(50)~(52)的 N-孤子解，这里给出 2-孤子解：

$$g_n = \mathrm{e}^{\eta_1} + \mathrm{e}^{\eta_2} + a(1,1',2')\mathrm{e}^{\xi_1+\eta_1+\eta_2} + a(2,1',2')\mathrm{e}^{\xi_2+\eta_1+\eta_2} \tag{53}$$

$$h_n = \mathrm{e}^{\xi_1} + \mathrm{e}^{\xi_2} + a(1,2,1')\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\eta_1} + a(1,2,2')\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\eta_2} \tag{54}$$

$$f_n = 1 + a(1,1')\mathrm{e}^{\xi_1+\eta_1} + a(2,1')\mathrm{e}^{\xi_2+\eta_1} + a(1,2')\mathrm{e}^{\xi_1+\eta_2} + a(2,2')\mathrm{e}^{\xi_2+\eta_2} + a(1,2,1',2')\mathrm{e}^{\xi_1+\xi_2+\eta_1+\eta_2} \tag{55}$$

其中：

$$\mathrm{e}^{\eta_i} = \frac{P_i^{(n-n_0)}}{\Omega_i^m} \tag{56}$$

$$\mathrm{e}^{\xi_i} = \frac{M_i^{(n-n_0)}}{\Psi_i^m} \tag{57}$$

$$\Omega_i^m = \frac{P_i - 2P_i\delta + \delta}{P_i(1-\delta P_i)} \tag{58}$$

$$\Psi_i^m = \frac{M_i - \delta + 2\delta M_i}{M_i(1+\delta M_i)} \tag{59}$$

其系数与前面半离散双线性导数方程(6)~(8)的 2 孤子解的相应系数相同。

现在通过下面的变换把全离散双线性方程(50)~(52)转化成非线性差分－差分方程，为此令：

$$g_n^m = v_n^m\cdot f_n^m \tag{60}$$

$$h_n^m = u_n^m\cdot f_n^m \tag{61}$$

把变换(60)~(61)带入到变换(50)~(52)中，有：

$$v_n^{m+1} - v_n^m + \delta\frac{f_{n+1}^m - f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} - f_n^m}\left[v_{n+1}^m + v_{n-1}^{m+1}\right] - 2\delta\cdot v_n^{m+1} = 0 \tag{62}$$

$$u_n^{m+1} - u_n^m - \delta\frac{f_{n+1}^m - f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1} - f_n^m}\left[u_{n+1}^m - u_{n-1}^{m+1}\right] - 2\delta\cdot u_n^{m+1} = 0 \tag{63}$$

$$\frac{f_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^m}{f_n^m\cdot f_n^m} = 1 - v_n^m\cdot u_n^m \tag{64}$$

令：

$$\Gamma_n^m = \frac{\dfrac{f_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1}\cdot f_n^m}}{\dfrac{f_{n+1}^m\cdot f_{n-1}^m}{f_n^m\cdot f_n^m}} = \frac{f_n^m\cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1}\cdot f_{n-1}^m} \tag{65}$$

由此方程(62)~(63)可变成如下形式：

$$v_n^{m+1}-v_n^m+\delta\left[1-v_n^m\cdot u_n^m\right]\Gamma_n^m\left[v_{n+1}^m+v_{n-1}^{m+1}\right]-2\delta\cdot v_n^{m+1}=0 \tag{66}$$

$$u_n^{m+1}-u_n^m+\delta\left[1-v_n^m\cdot u_n^m\right]\Gamma_n^m\left[v_{n+1}^m+v_{n-1}^{m+1}\right]-2\delta\cdot v_n^{m+1}=0 \tag{67}$$

令 Γ_{n+1}^m 与 Γ_n^m 相比将得到：

$$\frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m}=\frac{\dfrac{f_{n+1}^m\cdot f_n^{m+1}}{f_{n+1}^{m+1}\cdot f_n^m}}{\dfrac{f_n^m\cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1}\cdot f_{n-1}^m}}=\frac{1-v_n^m\cdot u_n^m}{1-v_n^{m+1}\cdot u_n^{m+1}} \tag{68}$$

由此得到差分－差分 *AKNS* 方程：

$$v_n^{m+1}-v_n^m+\delta\left[1-v_n^m\cdot u_n^m\right]\Gamma_n^m\left[v_{n+1}^m+v_{n-1}^{m+1}\right]-2\delta\cdot v_n^{m+1}=0 \tag{69}$$

$$u_n^{m+1}-u_n^m+\delta\left[1-v_n^m\cdot u_n^m\right]\Gamma_n^m\left[v_{n+1}^m+v_{n-1}^{m+1}\right]-2\delta\cdot v_n^{m+1}=0 \tag{70}$$

$$\frac{\Gamma_{n+1}^m}{\Gamma_n^m}=\frac{\dfrac{f_{n+1}^m\cdot f_n^{m+1}}{f_{n+1}^{m+1}\cdot f_n^m}}{\dfrac{f_n^m\cdot f_{n-1}^{m+1}}{f_n^{m+1}\cdot f_{n-1}^m}}=\frac{1-v_n^m\cdot u_n^m}{1-v_n^{m+1}\cdot u_n^{m+1}} \tag{71}$$

3. 小结

本文主要做了下列工作：1) 对藕合的二阶 *AKNS* 方程的半离散双线性形式用 Hirota 方法进行求解，得到了它的新的 N 孤子解；2) 对藕合的二阶 *AKNS* 方程的半离散双线性形式进行了全离散化，并用 Hirota 方法求得了全离散双线性方程的 N 孤子解；3) 通过适当的变换求出差分－差分 *AKNS* 方程，但未对其进行求解。由于这类方程有很强的实际背景，因此对其进行研究很有意义，所以我们将在另文中对最后得到差分－差分 *AKNS* 方程可积性质进行研究。

参考文献 (References)

[1] Bi, J.-B., Sun, Y.-P. and Chen, D.-Y. (2006) Soliton solutions for nonisospectral *AKNS* equation by Hirota method. *Communications in Theoretical Physics* (*Beijing*, *China*), **45**, 398-400.

[2] Sun, Y.-P. and Chen, D.-Y. (2006) Integrable couplings and new exact solutions for the nonisospectral *AKNS* equation. *International Journal of Modern Physics B*, **20**, 925-935.

[3] 姚玉芹 (2007) (2 + 1)维孤子方程的精确解与可积系统. 上海大学, 上海.

[4] 季杰 (2007) 若干离散可积系统的对称与反向 *AKNS* 方程的精确解. 上海大学, 上海.

[5] 陈守婷 (2011) 半离散 *AKNS* 系统的对称与代数结构. 上海大学, 上海.

[6] 丁大军 (2011) 一类孤子方程的可积离散化.浙江师范大学, 浙江.

[7] 孙玉娟, 丁琦, 梅建琴, 张鸿庆 (2013) D-*AKNS* 方程的代数几何解. *数学物理学报*, **2**, 276-284.

[8] Hirota, R. (2000) Discretization of coupled modified KdV equations. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **11**, 77-84.