

A Qualitative Analysis of Model of Differential Equations of Gambling

Liqun Zhang^{1,2}, Benyan Ding^{1,2}

¹Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan

²Department of Mathematics, Linyi University, Linyi

Email: liqun0911@163.com, dingbenyan2012@163.com

Received: Dec. 16th, 2013; revised: Jan. 14th, 2014; accepted: Jan. 28th, 2014

Copyright © 2014 Liqun Zhang, Benyan Ding. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. In accordance of the Creative Commons Attribution License all Copyrights © 2014 are reserved for Hans and the owner of the intellectual property Liqun Zhang, Benyan Ding. All Copyright © 2014 are guarded by law and by Hans as a guardian.

Abstract: This paper gave three models of differential equations for describing social phenomena of gambling. Through qualitative analysis of differential equations, we can analyze the model of differential equations and the trend of gambling, and get the proper results.

Keywords: Gambling; Singular; Phase Diagram

赌博的微分方程模型及定性分析

张利群^{1,2}, 丁本艳^{1,2}

¹ 山东师范大学数学系, 济南

² 临沂大学理学院, 临沂

Email: liqun0911@163.com, dingbenyan2012@163.com

收稿日期: 2013年12月16日; 修回日期: 2014年1月14日; 录用日期: 2014年1月28日

摘要: 本文建立三个描述赌博社会现象的数学模型, 运用微分方程定性的基本理论来分析微分方程模型和赌博流行的趋势, 得到基本符合实际的效果。

关键词: 赌博; 奇点; 相图

1. 引言

从二十世纪八十年代起, 赌博之风死灰复燃。因赌博意识的渗透, 高科技手段的运用, 赌博之风蔓延异常迅速, 由此带来的社会危害也在日益加剧。而对于赌博的危害, 一些人认识不足。有的人认为“赌博只是一种娱乐而已, 大多数人都可以享受赌博的乐趣而不会导致什么问题”。这种认识是极其错误的, 大量事实表明, 赌博会给社会经济带来巨大的损失, 给家庭和个人带来无比的灾难。为此本文建立三个描述赌博社会现象的数学模型并通过分析该数学模型来了解赌博流行的趋势。

本文通过运用微分方程定性的基本理论, 来分析微分方程模型和赌博流行的趋势, 得到基本符合实际的效果。

2. 模型 1

首先借助克马克和麦肯德里克研究微生物传染病动力学时用过的模型。此模型的特点是: 不考虑外界措施等的客观因素, 仅仅把赌博这种丑恶现象作为人们正常条件下常态, 研究其流行的趋势及结局。

设 $x(t)$ 是赌博人员的人数, $y(t)$ 是赌博高发人群的人数。建立微分方程模型^[1]如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = axy - bx, \\ \dot{y} = -axy \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 a, b 是区间 $(0,1)$ 中的常数, 各项的含义是:

- 1) (2.1)中的第一式 axy 项表示参与赌博人员与赌博高发人员接触造成的赌博人员人数增加的速度;
- 2) (2.1)中的第一式 $-bx$ 项表示由于某些原因(死亡)引起的赌博人员减少的速度;
- 3) (2.1)中的第二式 $-axy$ 项表示参与赌博人员与赌博高发人员接触造成的赌博高发人员人数减少的速度;
- 4) $x \geq 0, y \geq 0$ 。

下面讨论模型(2.1), 由问题的实际意义, 只分析第一象限的情形($x > 0, y > 0$)。

$$\frac{dx}{dy} = -1 + \frac{b}{ay} \quad (x \neq 0) \quad (2.2)$$

积分可得

$$x(y) = x_0 + y_0 - y + \frac{b}{a} \ln \frac{y}{y_0} \quad (2.3)$$

由于(2.1)式的奇点为 y 轴上各点, 第一象限无奇点, 所以第一象限(2.1)无闭轨。

由(2.2)可得当 $y > \frac{b}{a}$ 时, x 关于 y 是单调递减的; 当 $y < \frac{b}{a}$ 时, x 关于 y 是单调递增的, 又正半轴 x 是一条轨线。

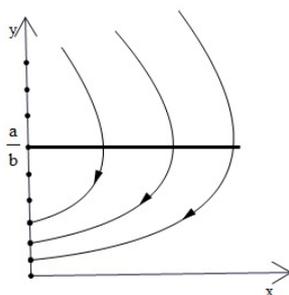


Figure 1. Phase diagram of model 1

图 1. 模型 1 的相图

由图 1 可以看出, 若赌博高发人员人数 $y(t)$ 不超过值 $\frac{b}{a}$, 那么当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 赌博人员人数 $x(t)$ 趋于零; 当赌博高发人员人数 $y(t)$ 超过值 $\frac{b}{a}$ 时, 赌博人员将会越来越多, 并会发生一个时期的流行, 但是赌博高发人员人数总是越来越少; 当赌博高发人员人数减到 $\frac{b}{a}$ 时, 赌博人员人数开始减少, 且最终趋于零。由此克马克—麦肯德里克模型是一个乐观的模型, 赌博现象最终会消失。

3. 模型 2

模型 1 没有考虑政府干预赌博的措施等其他因素, 下面将考虑其他因素建立修正模型更客观地反应现象:

$$\begin{cases} \dot{x} = axy - bx, \\ \dot{y} = -axy - cx^2y + dx \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 a, b, c, d 是区间 $(0,1)$ 中的常数。

1) (3.1)中 axy , $-bx$, $-axy$, x , y 各项意义与(2.1)的意义相同;

2) $-cx^2y$ 表示政府采取措施后使得赌博高发人员人数减少的速度; 政府采取措施的强度 c 与当时赌博高发人员人数成正比, 与当时赌博人员人数的平方成正比;

3) dx 表示赌博人员人数增多时, 赌博高发人员人数也会随之增多, 与当时的赌博人员人数成正比。

接下来对(3.1)进行定性分析。

定理 3.1: 系统(3.1)在第一象限无闭轨。

证明: 取 Dulac 函数 $B(x, y) = (xy)^{-1}$, 则

$$D = \frac{\partial}{\partial x}(B(x, y)(axy - bx)) + \frac{\partial}{\partial y}(B(x, y)(-axy - cx^2y + cx + \delta)) = -dy^{-2} - \delta x^{-1}y^{-2}$$

因为 $x > 0, y > 0$ 又 $d > 0, \delta \geq 0$, 故 $D < 0$ 。由 Dulac 准则^[2,3], 系统(3.1)在第一象限内无闭轨。

注: 定理 3.1 的现实意义是赌博的流行不会具有周期性, 不用担心赌博在各种恶习会周而复始的出现。

定理 3.2: 1) 当 $d > b$ 时, y 轴的非负半轴上的点是奇点, 在第一象限内有唯一奇点 $(x_0, y_0) = \left(\frac{a(d-b)}{bc}, \frac{b}{a}\right)$,

且 $\left(0, \frac{b}{a}\right)$ 是鞍点。记 $\Delta = (ax_0 + cx_0^2)^2 + 4ax_0(d - ay_0 - 2cx_0y_0)$, 当 $\Delta > 0$ 时, 此种情况不存在; 当 $\Delta < 0$ 时, (x_0, y_0)

是稳定粗焦点, 顺时针绕行; 当 $\Delta = 0$ 时, 是稳定的退化结点; 当 $\Delta < 0$ 时, (x_0, y_0) 是稳定粗焦点, 顺时针绕行。

2) 当 $d \leq b$ 时, 第一象限内无奇点, y 轴的非负半轴上的点是奇点。

证明: 第一步求奇点:

系统(3.1)的奇点应满足如下条件:

$$\begin{cases} axy - bx = 0, \\ -axy - cx^2y + dx + e = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

由(3.2)的第一式得 $x = 0$ 或 $y = \frac{b}{a}$; 若把 $x = 0$ 带入(3.2)式的第二式, 则有 y 轴的非负半轴上的点是奇点; 若

把 $y = \frac{b}{a}$ 带入(3.2)式的第二式, 则有

$$-ax\frac{b}{a} - cx^2\frac{b}{a} + dx = 0$$

解得 $x = \frac{a(d-b)}{bc}$ 。

由于只在第一象限内考虑, 故上式只能取正号, 故要求 $d > b$, 即得唯一奇点

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{a(d-b)}{bc}, \frac{b}{a}\right)$$

第二步分析奇点类型:

为了分析奇点 (x_0, y_0) 的类型, 取(3.1)在奇点 (x_0, y_0) 点的线性近似系统

$$\begin{cases} \dot{x} = ax_0y, \\ \dot{y} = (d - ay_0 - 2cx_0y_0)x - (ax_0 + cx_0^2)y \end{cases} \quad (3.3)$$

(3.3)的特征方程为

$$\lambda^2 + (ax_0 + cx_0^2)\lambda - ax_0(d - ay_0 - 2cx_0y_0) = 0 \quad (3.4)$$

其中 $x_0 = \frac{a(d-b)}{bc}$, $y_0 = \frac{b}{a}$ 故

$$-ax_0(d-ay_0-2cx_0y_0) = \frac{a^2(d-b)^2}{bc} > 0 \quad (3.5)$$

所以特征方程(3.4)式中左端的常数项为正, 有两个非零实部的特征根:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[-(ax_0 + cx_0^2) \pm \sqrt{(ax_0 + cx_0^2)^2 + 4ax_0(d-ay_0-2cx_0y_0)} \right]$$

因此, $(x_0, y_0) = \left(\frac{a(d-b)}{bc}, \frac{b}{a} \right)$ 不是中心, $\lambda_{1,2}$ 只能是两个负数或共轭复数, 所以只能是结点或焦点, 不是鞍点^[2,3]。

在以 (x_0, y_0) 为坐标原点经 xoy 平移后得到的坐标系中, 线性近似系统(3.3)的第一式可知, 上半平面 $x(t)$ 单调上升, 下半平面 $x(t)$ 单调下降, 所以 (x_0, y_0) 不会是双切结点或临界结点, 由此可得 Δ 不会是正的。

焦点是可能出现的, 若取 $a=b=c=d=1/2$, $x_0=y_0=1$ 则

$$\Delta = (ax_0 + cx_0^2)^2 + 4ax_0(d-ay_0-2cx_0y_0) = -1 < 0$$

又由于 λ_1 和 λ_2 的实部均是负的, 即 $-\frac{1}{2}(ax_0 + cx_0^2) < 0$, 则可知存在焦点且是稳定的粗焦点。

由于线性近似系统(3.3)的第二式中 $d-ay_0-2cx_0y_0 < 0$, 在以 (x_0, y_0) 为原点的坐标系中, 右半 x 轴实轴轨线向下, 左半 x 轴实轴轨线向上, 轨线顺时针绕行。

单切(退化)结点也有可能出现, 例如取 $a=b=c$ 时, 有 $x_0 = \frac{d-a}{a}$, $y_0 = \frac{b}{a} = 1$, 欲使 $\Delta = 0$ 只需

$$\Delta = (ax_0 + cx_0^2)^2 + 4ax_0(d-ay_0-2cx_0y_0) = 0$$

化简后有 $d^2 = 4a^2$, 即 $d = 2a$ 。

取 $d = 2a$ 时, 会出现退化结点, 又特征根是负数即 $-\frac{1}{2}(ax_0 + cx_0^2) < 0$, 故是稳定的退化结点。

4. 模型 3

在模型 1 和 2 的基础之上, 我们既考虑政府打击力度的影响又考虑社会力量的影响后建立模型 3:

$$\begin{cases} \dot{x} = axy - bx, \\ \dot{y} = -axy - cx^2y + dx + e \end{cases} \quad (4.1)$$

各项意义如下:

- 1) 此模型是在模型 2 的基础上增加一项 e , 其他各项如前所述;
- 2) e 表示易染赌博人群的受社会影响的自然增长率, 且 $e \geq 0$ 。

类似前边的讨论可有以下结论:

定理 4.1: 1) 若 $e > 0$, 则系统(3.1)在第一象限有唯一奇点:

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{a(d-e) + \sqrt{a^2(d-b)^2 - 4abce}}{2bc}, \frac{b}{a} \right)$$

记 $\Delta = (ax_0 + cx_0^2)^2 + 4ax_0(d-ay_0-2cx_0y_0)$, 当 $\Delta = 0$ 时, (x_0, y_0) 为稳定的退化结点; 当 $\Delta < 0$ 时, 则 (x_0, y_0) 为顺时针绕行的稳定粗焦点; 当 $\Delta > 0$ 时, 此种情况不存在;

2) 若 $e=0$, 结论如定理 3.1。

由此画出模型 2、3 的相图为:

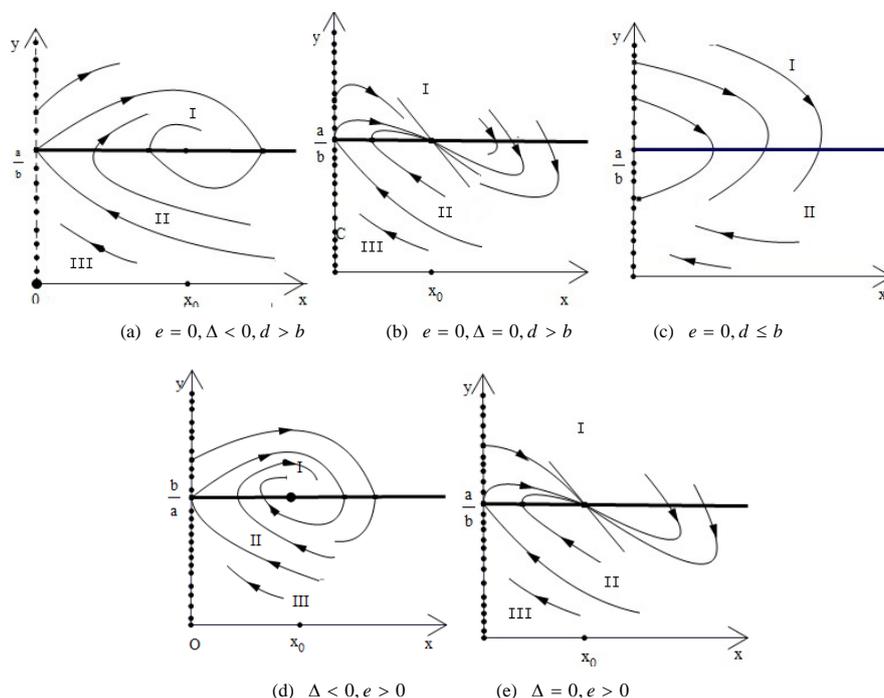


Figure 2. Phase diagram of model 2, 3
图 2. 模型 2、3 的相图

从相图上可以得到以下结论:

1) 赌博高发人员人数 $y = \frac{b}{a}$ 是流行的阈值, $y > \frac{b}{a}$ 即图中的 I 区流行区域在这个区域参与赌博的人群人数随着时间的增加而单调递增, 赌博发生流行。

2) 赌博高发人员人数 $y < \frac{b}{a}$ 时, 即在 $y = \frac{b}{a}$ 的水平线下方, 是赌博现象的流行缓解区域 II 与扑灭区 III; 在水平虚线表示出的扑灭区 $t \rightarrow +\infty$ 时赌博人员人数趋于零而消失; 在斜虚线表出的缓解区域, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时赌博人员人数与赌博高发人员的人数将趋于一个极限值, 即 $x(t) \rightarrow x_0, y(t) \rightarrow y_0$ 达到稳定平衡状态。

3) 当赌博高发人员人数超过阈值即 $y > \frac{b}{a}$, 即使赌博人员人数减少也会发生流行; 如果当时赌博人员人数相当多, 但赌博高发人员人数较少 $y < \frac{b}{a}$ 随着时间推移, 赌博高发人员人数也要自然减少最后还是消除赌博现象。

4) 由于 $x_0 = \frac{a(d-e) + \sqrt{a^2(d-b)^2 - 4abce}}{2bc}$ 表明 c 越大, 即政府采取措施的强度越大 x_0 越小越易控制; 反之将失控。

5. 总结

优点: 本文通过三个模型, 逐个分析得出和实际情况较为符合的结论。此时提醒我们政府必须采取切实有效的措施来控制赌博恶习的传播, 使社会处在一个良性发展的空间里。

缺点: 一方面没有考虑不易参与赌博的人群对赌博人员和赌博高发人员的影响, 当然不易参与赌博人员的

增长速度受社会力量的干预和赌博高发人员的人数的影响。另一方面对总体人数也没有作一个明确的假定, 只是考虑了人群中两个比较重要的类, 而不考虑不易参与赌博人群的影响。

致谢

本文是在金银来老师的指导和丁本艳同学的批评指正下完成的, 在此论文发表之际向我的导师和朋友致以深深地敬意和衷心的感谢, 同时也感谢《应用数学进展》各位老师对本文提出的宝贵建议, 祝愿《应用数学进展》越办越好。

参考文献 (References)

- [1] 王树禾 (1999) 微分方程模型与混沌. 中国科学技术大学出版社, 北京.
- [2] 罗定军, 张祥, 董梅芳 (2001) 动力系统的定性与分支理论. 科学出版社, 北京.
- [3] 张芷芬 (1997) 微分方程定性理论. 科学出版社, 北京.