Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2015, 4(4), 369-375**
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44046

Application of Exp-Function Method to Solve KdV-Type Equation

Sai Zhang, Guofang Li, Ning Wang

College of Sciences, North China University of Technology, Beijing
Email: 393283287@qq.com, 2514968828@qq.com, 419565132@qq.com

Received: Nov. 5th, 2015; accepted: Nov. 20th, 2015; published: Nov. 27th, 2015

Abstract

Exp-function method is an effective way to construct exact solutions of partial differential equations in mathematics and physics. This paper applies Exp-function method to obtain the new exact solutions of KdV-type equation, and depicts the figures of the solutions respectively in order to better understand the properties of the solutions.

Keywords

Exp-Function Method, KdV-Type Equation, Exact Solution

应用指数函数方法求解KdV型方程

张　赛，李国放，王　宁

北方工业大学理学院，北京
Email: 393283287@qq.com, 2514968828@qq.com, 419565132@qq.com

收稿日期：2015年11月5日；录用日期：2015年11月20日；发布日期：2015年11月27日

摘　要

指数函数方法是求解数学物理领域中偏微分方程的一种十分有效的方法。本文利用指数函数方法获得了

文章引用：张赛，李国放，王宁．应用指数函数方法求解 KdV 型方程[J]．应用数学进展, 2015, 4(4): 369-375.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44046

KdV型方程新的精确解，并描绘出精确解对应的图像,以便更好地理解解的性质。

关键词

指数函数方法，KdV型方程，精确解

1. 引言

非线性现象是自然界中普遍存在的一种重要现象，进而非线性科学是随着研究非线性现象问题而形成的一门科学，它的研究主体是孤立子、混沌和分形。在非线性系统中，非线性波动方程的精确求解及解法研究是非线性科学中的前沿研究课题和热点问题。到目前为止，已经有很多不同类型的非线性发展方程出现在数学和物理科学领域。在此期间，已经有很多专家学者在如何求解非线性方程的精确解方面做了大量有效的工作，构造出多种有效的求解方法如齐次平衡法，反散射法，Tanh 函数法，指数函数法，Lie 群方法等[1]-[7]。但由于求解非线性波动方程没有也不可能有统一而普遍适用的方法，因此继续寻找一些有效可行的方法依然是一项十分重要和极有价值的工作。

1895 年，荷兰的特韦格(Korteweg)和德弗里斯(de Vries)在研究浅水中小振幅长波运动时，共同得出了一种单向运动浅水波偏微分方程，即 KdV Equation

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

本文主要研究如下 KdV 型方程的精确解

$$u_t + u\,u_x + u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{1.1}$$

方程(1.1)在量子场论、等离子物理和固态物理中有着广泛的应用。在文献[8] [9]中，作者研究了方程(1.1)的扭状孤波解。本文利用指数函数的方法探索方程(1.1)的精确解。针对求解的过程中所产生的超定的代数确定方程组，我们利用符号计算软件 Mathematica 来处理，得到方程(1.1)丰富的精确解。

本文的内容安排如下：第二节介绍指数方法的主要思想。第三节利用指数函数方法研究方程(1.1)，得到了 6 种指数函数形式的解，并画出对应的图像，观察波的传播状况。最后一节是对本文内容的一个总结.

2. 方法概述

本节以如下的非线性偏微分方程

$$P\left(u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxx}, \cdots\right) = 0 \tag{2.1}$$

为例来阐述一下指数函数方法的主要思想，详细内容参考[6]。在方程(2.1)中，P 为其变元的多项式，并包含非线性项和高阶偏导项,该方法的实施可分为以下几步：

1) 假设方程(2.1)具有行波解

$$u(x,t) = U(\eta), \quad 其中\eta = x - vt$$

则方程(2.1)转化为自变量为η的非线性常微分方程

$$Q\left(u', u'', u''', \cdots\right) = 0. \tag{2.2}$$

2) 假设(2.2)的方程具有如下形式：

$$u(\eta)=\frac{\sum_{n=-d}^{c}a_n\exp(n\eta)}{\sum_{m=-q}^{p}b_m\exp(m\eta)},\tag{2.3}$$

其中 c,d,p 和 q 为待定正整数， a_n 和 b_m 为待定常数.

3) 将(2.3)代入到(2.2)中，然后平衡(2.2)中的非线性项和最高阶导数项的最高次数可以得到 p 和 c 的关系。同理，平衡非线性项和最高阶导数项的最低次数可以得到 q 和 d 的关系。

4) 对 c,d,p 和 q 赋特殊值，并将(2.3)代入(2.2)中可以得到关于 $\exp(\mathrm{i}\eta)$ 的方程组，之后，令 $\exp(\mathrm{i}\eta)$ 的系数为零，可得到一系列关于 a_n 和 b_m 的代数方程，求解这些代数方程并将结果代入(2.3)中，即可求得(2.1)的解.

3. 方程(1.1)求解

本节利用上述的指数函数方法来求解方程(1.1)。对于该方程，把 $\eta=kx+\omega t$ 代入到方程(1.1)中，可得

$$\omega u'+k\,uu'+k\,u^2u'+k^3u'''=0\tag{3.1}$$

假设方程(3.1)具有(2.3)形式的解，即：

$$u(\eta)=\frac{a_c\exp(c\eta)+\cdots+a_{-d}\exp(-d\eta)}{a_p\exp(p\eta)+\cdots+a_{-q}\exp(-q\eta)}\tag{3.2}$$

为了确定 c 和 p 之间的关系，将(3.2)代入(3.1)后计算可得

$$u'''=\frac{c_1\exp\left[(7p+c)\eta\right]+\cdots}{c_2\exp\left[8p\eta\right]+\cdots},$$

$$u^2u'=\frac{c_3\exp\left[(p+3c)\eta\right]+\cdots}{c_4\exp\left[4p\eta\right]+\cdots}=\frac{c_3\exp\left[(5p+3c)\eta\right]+\cdots}{c_4\exp\left[8p\eta\right]+\cdots}.$$

平衡 u''' 和 u^2u' 的最高次数可得 $p=c$ 。同理，通过平衡 u''' 和 u^2u' 的最低次数可得 $q=d$ 。特别的，令 $p=c=1$， $d=p=1$ 。此时，方程(3.2)可表示为

$$u(\eta)=\frac{a_1\exp(\eta)+a_0+a_{-1}\exp(-\eta)}{\exp(p\eta)+b_0+b_{-1}\exp(-\eta)}.\tag{3.3}$$

然后将(3.3)代入到方程(1.1)中，然后令 $\exp(\mathrm{i}\eta)$ 的系数为零，即得关于待定系数 $a_1,a_0,a_{-1},b_{-1},b_0$ 的代数方程组，借助 Mathematica 软件求解这个方程组，得到如下几种情形的解。

情形 1： 得到如下形式的解：

$$u=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{6}k\left(t+6x-2a_1(1+a_1)t\right)}a_0(1+2a_1)^2+\mathrm{e}^{\frac{1}{3}k\left(t+6x-2a_1(1+a_1)t\right)}a_1(1+2a_1)^2+(1+a_1)(a_0-a_1b_0)\left(a_0+(1+a_1)b_0\right)}{(1+2a_1)^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{3}k\left(t+6x-2a_1(1+a_1)t\right)}+4a_{-1}a_1+\mathrm{e}^{\frac{1}{6}k\left(t+6x-2a_1(1+a_1)t\right)}b_0-(a_0-a_1b_0)\left(a_0+(1+a_1)b_0\right)}.$$

特别的，取 $k=1,a_1=1,a_{-1}=1,b_0=1$，方程的解简化为 $u=1-\frac{4\mathrm{e}^t}{4\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{\frac{t}{2}+x}}$，其图形见图 1。

情形 2： 得到如下形式的解：

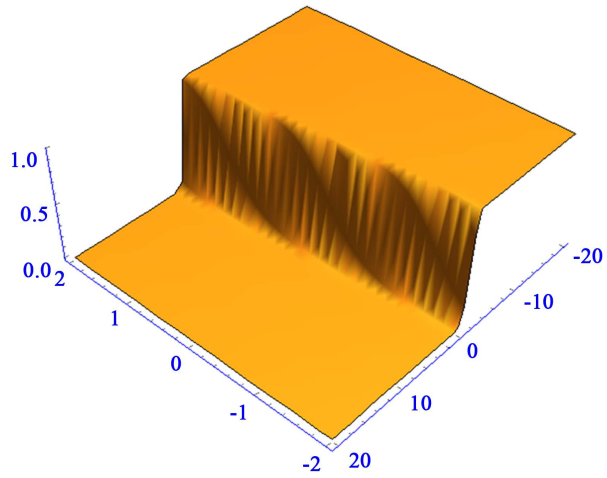

Figure 1. Solution for Case 1
图 1. 情形 1 的解

$$u=\frac{a_0^2+e^{kx+\omega t}a_0a_1-\frac{2e^{-kx-\omega t}a_0b_0\left(-a_0+a_1b_0\right)\left(-a_0\left(1+a_1\right)+\left(6k^2+a_1\left(2+3a_1\right)\right)b_0\right)}{18k^2b_0+\left(1+2a_1\right)\left(-a_0+a_1b_0\right)}}{a_0e^{kx+\omega t}+\left(a_0+a_{-1}e^{-kx-\omega t}\right)b_0}.$$

特别的，当 $k=3,a_{-1}=1,a_0=1,a_1=1,b_0=1,\omega=-3$，方程的解为 $u=1-\frac{1}{1+e^{-3t+3x}+e^{-6t+6x}}$，其图形见图 2。

情形 3： 方程的解为

$$u=-\frac{1}{2}+\frac{e^{k\left(\left(\frac{1}{4}-k^2\right)t+x\right)}a_0}{e^{2k\left(\left(\frac{1}{4}-k^2\right)t+x\right)}-2a_{-1}}.$$

特别的：当 $a_{-1}=1,a_0=1,k=1$，方程的解简化为 $u=-\frac{1}{2}+\frac{e^{\frac{3t}{4}}+x}{e^{\frac{3t}{2}}+e^{2x}}$，其图形见图 3。

情形 4： 方程的解为

$$u=-\frac{1}{2}-\frac{48k^2a_{-1}+a_0\left(-48e^{k\left(\left(\frac{1}{4}-k^2\right)t+x\right)}k^2+a_0\right)}{48k^2\left(e^{\frac{1}{2}k\left(t-4k^2t+4x\right)}-2a_{-1}\right)}.$$

特别的：当 $k=2,a_0=2,a_{-1}=-\frac{1}{48}$，方程的解简化为 $u=-\frac{1}{2}+\frac{48e^{\frac{15t}{2}}+2x}{e^{15t}+24e^{4x}}$，其图形见图 4。

情形 5： 方程的解为

$$u=a_1+\frac{24k^2b_0\left(1+2a_1\right)}{4a_0b_0\left(1+2a_1\right)^2+4\left(1+2a_1\right)^2e^{k\left(x-\left(k^2-a_1-a_1^2\right)t\right)}+e^{-k\left(x-\left(k^2-a_1-a_1^2\right)t\right)}\left(1+6k^2+4a_1\left(1+a_1\right)\right)b_0^2}.$$

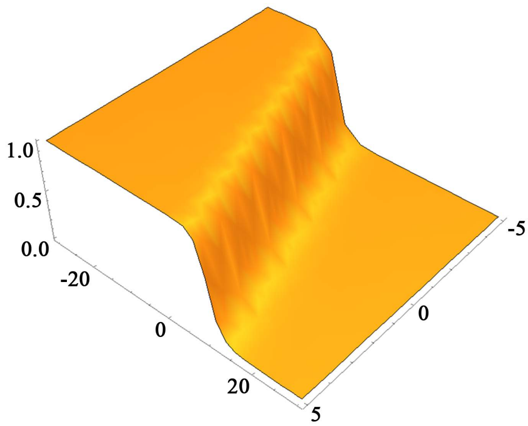

Figure 2. Solution for Case 2
图 2. 情形 2 的解

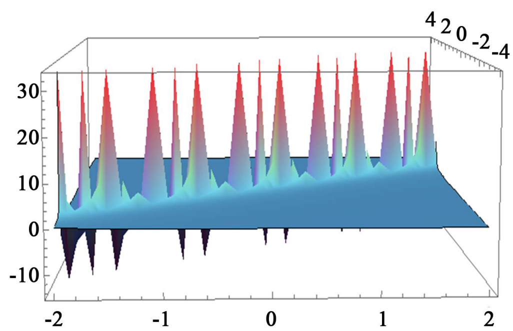

Figure 3. Solution for Case 3
图 3. 情形 3 的解

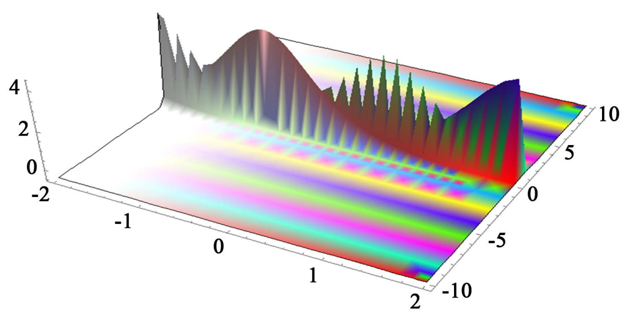

Figure 4. Solution for Case 4
图 4. 情形 4 的解

特别的：当 $k=1, a_1=1, b_0=1$，方程的解为 $u=1+\dfrac{72}{36+15e^{3t-x}+36e^{-3t+x}}$，其图像见图 5。

情形 6： 方程的解为

$$u=\frac{a_0{}^2+a_0 e^{kx+\omega t}a_1}{a_0 e^{kx+\omega t}+\left(1+a_{-1}e^{-kx-\omega t}\right)b_0}.$$

特别的，当 $k=1, \omega=1, a_0=1, a_1=2, b_0=2$，方程的解简化为 $u=2-\dfrac{3}{2+e^{t+x}}$，其图像见图 6。

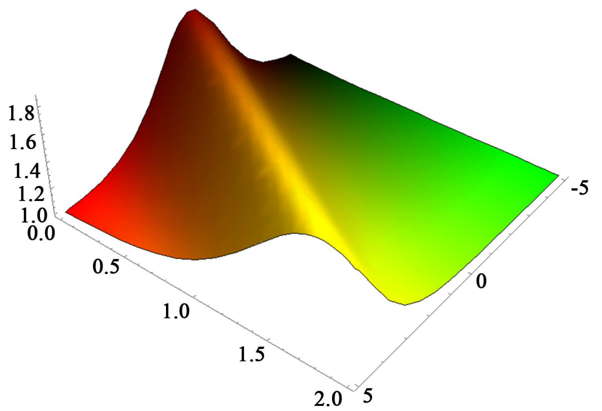

Figure 5. Solution for Case 1.
图 5. 情形 5 的解

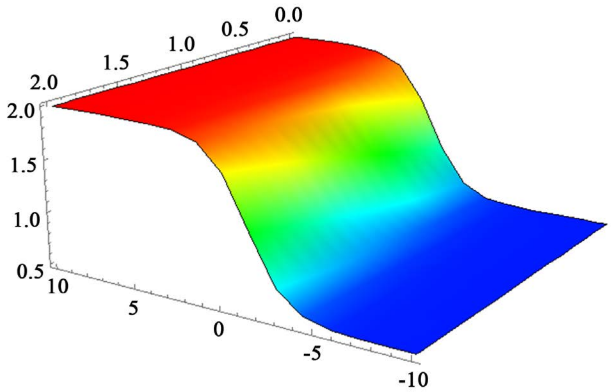

Figure 6. Solution for Case 6.
图 6. 情形 6 的解

4. 总结

本文利用指数函数方法深入系统的分析了 KdV 型方程(1.1)的精确解，给出新的指数函数形式解，这些解能够加深对该方程的理解，从而促进该方程在物理学等领域中的分析应用，因此本文的工作具有一定的理论意义和应用价值。

致　谢

本文得到北京市本科生培养——大学生科研训练(市级)项目，北方工业大学优秀青年教师计划和科研创新团队建设计划项目支持。感谢项目指导教师张智勇老师的悉心指导。

参考文献 (References)

[1] Ablowitz, M.J. and Clarkson, P.A. (1991) Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering. Cambridge University Press, New York. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511623998

[2] 闫振亚. 复杂非线性波的构造性理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[3] 范恩贵, 张鸿庆. 非线性孤子方程的齐次平衡法[J]. 物理学报, 1998(47): 333-361.

[4] 李志斌, 张善卿. 非线性波动方程准确孤立波解的符号计算[J]. 数学物理学报, 1997(17): 81-89.

[5] 楼森岳, 唐晓艳. 非线性数学物理方程[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[6] He, J.-H. and Wu, X.-H. (2006) Exp-Function Method for Nonlinear Wave Equations. *Chaos, Solitons and Fractals*,

30, 700-708. http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.020

[7] Bluman, G.W. and Anco, S.C. (2002) Symmetry and Integration Methods for Differential Equations. Springer, New York.

[8] Dey, B. (1985) Domain Wall Solution of KdV like Equation with Higher Order Nonlinearity. *Journal of Physics A*: *Mathematical and General*, **19**, L9-L12. http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/19/1/003

[9] Zhang, W.G., Chang, Q.S. and Jiang, B.G. (2002) Explicit Exact Solitary-Wave Solutions for the Compound KdV-Type and Compound KdV-Burgers-Type Equations with Nonlinear Terms of Any Order. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **13**, 311-319. http://dx.doi.org/10.1016/S0960-0779(00)00272-1