Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 143-149
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51019

Some Convergence Properties of Pairwise NQD Random Sequences

Ying Lin[1], Jianhua Shi[2]

[1]Department of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde Fujian
[2]School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou Fujian
Email: linying162@163.com

Received: Feb. 2nd, 2016; accepted: Feb. 22nd, 2016; published: Feb. 29th, 2016

Abstract

In this paper, L^r convergence and weak law of large numbers for the weighted sums of rowwise and pairwise NQD arrays are studied, moreover, a theorem of complete convergence for the weighted sums of pairwise NQD sequences is obtained.

Keywords

Pairwise NQD Random Sequences, Cesáro Uniform Integrability, Convergence Property

两两NQD列的若干收敛性质

林　影[1]，施建华[2]

[1]宁德师范学院数学系，福建　宁德
[2]闽南师范大学数学与统计学院，福建　漳州
Email: linying162@163.com

收稿日期：2016年2月2日；录用日期：2016年2月22日；发布日期：2016年2月29日

摘　要

本文主要研究了行为两两NQD的随机变量阵列加权和的L^r收敛性和弱大数定律，此外，还得到了两两NQD

文章引用：林影，施建华. 两两 NQD 列的若干收敛性质[J]. 应用数学进展, 2016, 5(1): 143-149.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51019

列加权和的一个完全收敛定理。

关键词

两两NQD列，Cesáro一致可积，收敛性

1. 引言与引理

定义 1 [1]：称 r. v. X 和 Y 是 NQD (Negatively Quadrant Dependent)的，若对 $\forall x,y\in R$ 有

$$P(X<x,Y<y)\le P(X<x)P(Y<y)。$$

称 r. v.列 $\{X_n,n\ge1\}$ 是两两 NQD 列，若对任意 $i\ne j$， X_i 与 X_j 是 NQD 的。

这一概念是由著名统计学家 Lehmann 在 1966 年引入的。从定义可以看出，两两 NQD 列是包含两两独立列在内的非常广泛的 r. v.序列，因此对其极限理论的研究显得更为基本，更为困难。Matula 对同分布两两 NQD 列部分和获得了的 Kolmogorov 型强大数律[2]，王岳宝等讨论了两两 NQD 列的 Marcinkiewicz 型弱大数律及 Jamison 型加权和的强稳定性[3]，吴群英对同分布两两 NQD 列部分和获得了与独立情形一样的 Baum 和 Katz 型完全收敛定理[4]，万成高获得了不同分布两两 NQD 列的一些大数定律和完全收敛定理[5]。本文在 Cesáro 一致可积等条件下，研究行为两两 NQD 阵列加权和的 L^r 收敛性及弱大数定律，作为推论得出一些两两 NQD 列的 L^r 收敛性或弱大数定律。此外，还给出了两两 NQD 列加权和的一个完全收敛定理。本文约定：文中出现的 C 总表示正常数，它在不同的地方可以代表不同的值。

定义 2：称 $\{X_{ni},1\le i\le k_n\uparrow\infty,n\ge1\}$ 是行为两两 NQD 的零均值 r. v.阵列，若 $\forall n\ge1$， $\{X_{ni},1\le i\le k_n\}$ 都是两两 NQD 的，且 $EX_{ni}=0$， $1\le i\le k_n$， $n\ge1$。

定义 3：称 r. v.阵列 $\{X_{ni},1\le i\le k_n\uparrow\infty,n\ge1\}$ 是 p 阶 Cesáro 一致可积的($p>0$)，若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\ge1}k_n^{-1}\sum_{i\le k_n}E|X_{ni}|^pI_{(|X_{ni}|\ge x)}=0。$$

定义 4：称实数阵列 $\{a_{ni},1\le i\le k_n\uparrow\infty,n\ge1\}$ 为 l_p-Toeplitz 矩阵($p>0$)，如果满足：

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_{ni}=0\quad(i\ge1)$；2) $\sum\limits_{i=1}^{k_n}|a_{ni}|^p\le M\quad(n\ge1)$， M 为常数。

引理 1 [1]：设 r. v. X 和 Y 是 NQD 的，则 1) $EXY\le EX\,EY$；2) 对任意 $x,y\in R$ 都有：$P(X>x,Y>y)\le P(X>x)P(Y>y)$；3) 如 f,g 同为非降(或非增)函数，则 $f(X)$ 与 $g(Y)$ 仍为 NQD 的。

引理 2 (推广的 Kolmogorov 型不等式) [4]：设 $\{X_n,n\ge1\}$ 是两两 NQD 列， $EX_n=0$， $EX_n^2<\infty$， $T_j(k)=\sum\limits_{i=j+1}^{j+k}X_i$， $j\ge0$，则有 $E(T_j(k))^2\le\sum\limits_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2$， $E\max\limits_{1\le k\le n}(T_j(k))^2\le\dfrac{4\log^2n}{\log^22}\sum\limits_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2$。

引理 3 [6]：设 $f:R\to R^+$，且 $0\le f\le1$，若 $\lim\limits_{x\to\infty}x^rf(x)=0,(r>0)$，则对任意 $p>r$，任意 $p'\in[r,p]$，有 $\lim\limits_{y\to\infty}y^{-(p-r)}\int_0^yx^{p'-1}f(x)\mathrm{d}x=0$。

2. 两两 NQD 列的 L^r 收敛性及弱大数定律

定理 1：设 $\{X_{ni},1\le i\le k_n\uparrow\infty,n\ge1\}$ 是行为两两 NQD 的零均值 r. v.阵列，且为 2 阶 Cesáro 一致可积

的，$1 \le r < 2$，$\{a_{ni}, 1 \le i \le k_n, n \ge 1\}$ 是 l_r-Toeplitz 矩阵，若 $\max_{1\le i\le k_n} |a_{ni}|^r k_n = O(1)$，则 $\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_{ni} \xrightarrow{L^r} 0$。

证明： 对任意给定的 $x > 0$，对 $n \ge 1$，$1 \le i \le k_n$，记 $X'_{ni} = -xI_{(X_{ni} \le -x)} + X_{ni} I_{(|X_{ni}| < x)} + xI_{(X_{ni} \ge x)}$，$X''_{ni} = X_{ni} - X'_{ni} = (X_{ni} + x) I_{(X_{ni} \le -x)} + (X_{ni} - x) I_{(X_{ni} \ge x)}$，则 X'_{ni}，X''_{ni} 均为 X_{ni} 的不降函数，由引理 1 知 X'_{ni}，X''_{ni} 仍为两两 NQD 的。由引理 2，有

$$
\begin{aligned}
E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_{ni}\right|^r &\le CE\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\left(X'_{ni} - EX'_{ni}\right)\right|^r + CE\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\left(X''_{ni} - EX''_{ni}\right)\right|^r \\
&\le C\left(\sum_{i=1}^{k_n} |a_{ni}|^2 EX'^2_{ni}\right)^{\frac{r}{2}} + C\left(\sum_{i=1}^{k_n} |a_{ni}|^2 EX''^2_{ni}\right)^{\frac{r}{2}} \\
&\le C\left\{\sum_{i=1}^{k_n} |a_{ni}|^2 \left[EX^2_{ni} I_{(|X_{ni}|<x)} + x^2 P\left(|X_{ni}| \ge x\right)\right]\right\}^{\frac{r}{2}} \\
&\quad + C\left\{\sum_{i=1}^{k_n} |a_{ni}|^2 \left[EX^2_{ni} I_{(|X_{ni}| \ge x)} + x^2 P\left(|X_{ni}| \ge x\right)\right]\right\}^{\frac{r}{2}} \\
&\le Cx^r \left(\sum_{i=1}^{k_n} |a_{ni}|^2\right)^{\frac{r}{2}} + C\left\{\sum_{i=1}^{k_n} |a_{ni}|^2 EX^2_{ni} I_{(|X_{ni}| \ge x)}\right\}^{\frac{r}{2}} \\
&\le Cx^r \left(M \max_{1\le i\le k_n} |a_{ni}|^{2-r}\right)^{\frac{r}{2}} + C \max_{1\le i\le k_n} |a_{ni}|^r k_n \left\{k_n^{-1} \sum_{i=1}^{k_n} EX^2_{ni} I_{(|X_{ni}| \ge x)}\right\}^{\frac{r}{2}}
\end{aligned}
$$

先令 $n \to \infty$，再令 $x \to \infty$，则有 $E\left|\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_{ni}\right|^r \to 0$。

推论 1: 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 2 阶 Cesáro 一致可积的零均值两两 NQD 列，$1 \le r < 2$，$\{a_{ni}, 1 \le i \le k_n \uparrow \infty, n \ge 1\}$ 是 l_r-Toeplitz 矩阵，若 $\max_{1\le i\le k_n} |a_{ni}|^r k_n = O(1)$，则 $\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} X_i \xrightarrow{L^r} 0$。

证明： 对每一 $n \ge 1$，取 $X_{ni} = X_i$，$1 \le i \le k_n$，由定理 1 立即知推论 1 成立。

推论 2： 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 2 阶 Cesáro 一致可积的零均值两两 NQD 列，$1 \le r < 2$，则 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{L^r} 0$。特别，$\{X_n, n \ge 1\}$ 满足弱大数定律，即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0$。

证明： 在推论 1 中取 $k_n = n$，$n \ge 1$，取 $a_{ni} = \frac{1}{n}$，$1 \le i \le n$，显然 $\{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是 l_r-Toeplitz 矩阵且满足推论 1 的条件，故由推论 1 知推论 2 成立。

推论 3: 设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是 2 阶 Cesáro 一致可积的零均值两两 NQD 列，$1 \le r < 2$，则 $n^{-\frac{1}{r}} \sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{L^r} 0$。

证明： 在推论 1 中取 $k_n = n$，$n \ge 1$，取 $a_{ni} = n^{-1/r}$，$1 \le i \le n$，则 $\{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是 l_r-Toeplitz 矩阵，且 $\max_{1\le i\le n} |a_{ni}|^r n = 1$，故由推论 1 知推论 3 成立。

定理 2： 设 $X = \{X_{ni}, 1 \le i \le k_n \uparrow \infty, n \ge 1\}$ 是 r. v.阵列，令 $S_n = \sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}$，$n \ge 1$，若下列条件之一成立，

1) $0 < r < 1$，X 为 r 阶 Cesáro 一致可积的；2) $1 \le r < 2$，X 是行为两两 NQD 的零均值阵列，且为 2 阶 Cesáro 一致可积的，则 $k_n^{-1} E|S_n|^r \to 0\ (n \to \infty)$。更有如下形式的弱大数定律成立：$k_n^{-\frac{1}{r}} S_n \xrightarrow{P} 0$。

证明： 先证(2)。对每一$n\ge1$，令$a_{ni}=k_n^{-1/r}$，$1\le i\le k_n$，因为有

$$\lim_{n\to\infty}a_{ni}=\lim_{n\to\infty}k_n^{-1/r}=0\quad\left(1\le i\le k_n\right)\text{且}\sum_{i=1}^{k_n}\left|a_{ni}\right|^r\le\sum_{i=1}^{k_n}k_n^{-1}=1\quad\left(n\ge1\right),$$

故$\{a_{ni},1\le i\le k_n,n\ge1\}$为$l_r$-Toeplitz 矩阵，又$\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right|^r k_n=1\left(n\ge1\right)$，故由定理 1 立即知定理 2 的(2)成立。

下面证(1)。对任意给定的$x>0$，对$n\ge1$，$1\le i\le k_n$，记$X'_{ni}=X_{ni}I_{(|X_{ni}|<x)}$，$X''_{ni}=X_{ni}I_{(|X_{ni}|\ge x)}$，则$X_{ni}=X'_{ni}+X''_{ni}$。由于$0<r<1$，用$C_r$不等式有

$$k_n^{-1}E\left|S_n\right|^r\le k_n^{-1}E\left|\sum_{i=1}^{k_n}X'_{ni}\right|^r+k_n^{-1}E\left|\sum_{i=1}^{k_n}X''_{ni}\right|^r\le k_n^{r-1}x^r+k_n^{-1}\sum_{i=1}^{k_n}E\left|X_{ni}\right|^r I_{(|X_{ni}|\ge x)},$$

上式中先令$n\to\infty$，再令$x\to\infty$，立即知$k_n^{-1}E\left|S_n\right|^r\to0\left(n\to\infty\right)$。

注： R. Pyke 与 D. Root (1968)曾证明：若$X_1,X_2,\cdots$为独立同分布随机变量序列，对$0<r\le2$，若$E\left|X_1\right|^r<\infty$，则$n^{-\frac{1}{r}}S_n\xrightarrow{P}0$。显然定理 2 是这一结果的推广与改进。

如果不假定行为两两 NQD 的阵列有 Cesáro 一致可积性，则有下面的结果。

定理 3： 设$\left\{X_{ni},1\le i\le k_n\uparrow\infty,n\ge1\right\}$是行为两两 NQD 的零均值 r. v.阵列，$\left\{a_{ni},1\le i\le k_n,n\ge1\right\}$是实数阵列，$1\le r<2$，若 1) $\lim_{x\to\infty}x^r\sup_{n\ge1}k_n^{-1}\sum_{i\le k_n}P\left(\left|X_{ni}\right|\ge x\right)=0$；2) $\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right|=0$且$\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right|^r k_n=O\left(1\right)$，$\forall n\ge1$，则$\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}X_{ni}\xrightarrow{P}0$。

证明： 不妨设$a_{ni}>0$，$n\ge1$，$1\le i\le k_n$。令

$$X'_{ni}=-a_{ni}^{-1}I_{(a_{ni}X_{ni}\le-1)}+X_{ni}I_{(|a_{ni}X_{ni}|<1)}+a_{ni}^{-1}I_{(a_{ni}X_{ni}\ge1)},$$

$$X''_{ni}=X_{ni}-X'_{ni}=\left(X_{ni}+a_{ni}^{-1}\right)I_{(a_{ni}X_{ni}\le-1)}+\left(X_{ni}-a_{ni}^{-1}\right)I_{(a_{ni}X_{ni}\ge1)},$$

则X'_{ni}，X''_{ni}仍为两两 NQD 的。对任意给定的$\varepsilon>0$，有

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}X_{ni}\right|\ge\varepsilon\right)\le P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}\left(X'_{ni}-EX'_{ni}\right)\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right)+P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}\left(X''_{ni}-EX''_{ni}\right)\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right)=:A_1+A_2。$$

由引理 2，有

$$\begin{aligned}A_1&\le CE\left|\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}\left(X'_{ni}-EX'_{ni}\right)\right|^2\le C\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}^2E\left|X'_{ni}\right|^2\le C\sum_{i=1}^{k_n}a_{ni}^2EX_{ni}^2I_{(|a_{ni}X_{ni}|<1)}+C\sum_{i=1}^{k_n}P\left(\left|a_{ni}X_{ni}\right|\ge1\right)\\&\le C\max_{1\le i\le k_n}a_{ni}^{2-r}\int_0^{a_{ni}^{-1}}x\sup_{j\ge1}k_j^{-1}\sum_{i\le k_j}P\left(\left|X_{ni}\right|\ge x\right)\mathrm{d}x+Ck_n\sup_{j\ge1}k_j^{-1}\sum_{i\le k_j}P\left(\left|X_{ni}\right|\ge a_{ni}^{-1}\right)=:A_3+A_4.\end{aligned}$$

由于$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right|=0$，故对一切$1\le i\le k_n$，有$a_{ni}^{-1}\to\infty\left(n\to\infty\right)$。于是由引理 3，对一切$1\le i\le k_n$，有$a_{ni}^{2-r}\int_0^{a_{ni}^{-1}}x\sup_{j\ge1}k_j^{-1}\sum_{i\le k_j}P\left(\left|X_{ni}\right|\ge x\right)\mathrm{d}x\to0\ \left(n\to\infty\right)$，从而有$A_3\to0$。

对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$a_{ni}^{-1}\ge\delta$时，有$A_4\le Ck_n\varepsilon a_{ni}^r\le C\varepsilon\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right|^r k_n\le C\varepsilon$，由$\varepsilon$的任意性知$A_4\to0$，于是$A_1\to0$。

由 Jensen 不等式有

$$A_2 \le C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni} E\left|X_{ni}''\right| \le C\sum_{i=1}^{k_n} P\left(\left|a_{ni}X_{ni}\right| \ge 1\right) + C\sum_{i=1}^{k_n} a_{ni}\int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge x\right)\mathrm{d}x$$

$$\le Ck_n \sup_{j\ge1} k_j^{-1}\sum_{i\le k_j} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge a_{ni}^{-1}\right) + C\max_{1\le i\le k_n} a_{ni}k_n\int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty} \sup_{j\ge1} k_j^{-1}\sum_{i\le k_j} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge x\right)\mathrm{d}x,$$

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $a_{ni}^{-1} \ge \delta$ 时，若 $x \ge a_{ni}^{-1}$，则有 $\sup_{j\ge1} k_j^{-1}\sum_{i\le k_j} P\left(\left|X_{ni}\right| \ge x\right) \le \varepsilon x^{-r}$，从而有

$$A_2 \le C\varepsilon + C\max_{1\le i\le k_n} a_{ni}k_n\int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty} \varepsilon x^{-r}\mathrm{d}x \le C\varepsilon，$$

由 ε 的任意性知 $A_2 \to 0$，于是定理成立。

推论 4：设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为零均值的两两 NQD 列，$1 \le r < 2$，若 $\lim_{x\to\infty} x^r \sup_{n\ge1} n^{-1}\sum_{i\le n} P\left(\left|X_i\right| \ge x\right) = 0$，则

$$n^{-1/r}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} 0。$$

证明：在定理 3 中取 $k_n = n$，$n \ge 1$，取 $X_{ni} = X_i$，$a_{ni} = n^{-1/r}$，$1 \le i \le n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le i\le k_n}\left|a_{ni}\right| = \lim_{n\to\infty} n^{-1/r} = 0 \text{ 且 } \max_{1\le i\le n}\left|a_{ni}\right|^r n = 1，$$

故由定理 3 知推论成立。

定理 4：设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为零均值的两两 NQD 列，满足条件：存在 $M > 0$，存在正数列 $\{a_i, i \ge 1\}$ 使有 $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i}{i}\right)^2 < \infty$ 及 $E\left|X_i\right|^2 I_{(|X_i|\ge a_i)} \le M\ (i \ge 1)$，则对 $1 \le r \le 2$，有 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{L^r} 0$。

证明：取使题设条件成立的 $M > 0$ 和 $\{a_i, i \ge 1\}$，对 $1 \le i \le n$，记

$$X_i' = -a_i I_{(X_i\le -a_i)} + X_i I_{(|X_i|<a_i)} + a_i I_{(X_i\ge a_i)}，$$

$$X_i'' = X_i - X_i' = \left(X_i + a_i\right)I_{(X_i\le -a_i)} + \left(X_i - a_i\right)I_{(X_i\ge a_i)}，$$

则 X_i'，X_i'' 仍为两两 NQD 的。

$$E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^r \le CE\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i' - EX_i'\right)\right|^r + CE\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i'' - EX_i''\right)\right|^r$$

$$\le C\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} EX_i'^2\right)^{\frac{r}{2}} + C\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} EX_i''^2\right)^{\frac{r}{2}}$$

$$\le C\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I_{(|X_i|<a_i)} + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 P\left(\left|X_i\right| \ge a_i\right)\right)^{\frac{r}{2}}$$

$$+ C\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I_{(|X_i|\ge a_i)} + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 P\left(\left|X_i\right| \ge a_i\right)\right)^{\frac{r}{2}}$$

$$\le C\left(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{r}{2}} + C\left(n^{-1}M\right)^{\frac{r}{2}},$$

由题设条件及 Kronecker 引理知 $E\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^r \to 0\ (n \to \infty)$。

3. 两两 NQD 列加权和的完全收敛性

定理 5：设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为零均值的两两 NQD 列，$\{a_{ni}, 1 \le i \le n, n \ge 1\}$ 是一列实数，且当 $i \le n$ 时，

$|a_{ni}| \le Cn^{-1/r}$，$1 \le r < 2$。若存在 $\alpha \ge 1$，对足够小的 $\delta > 0$，有 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\alpha+\delta} \sup\limits_{n\ge1} n^{-1} \sum\limits_{i\le n} P\left(|X_i|^r \ge x\right) = 0$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max\limits_{1\le k\le n}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} a_{ni} X_i\right| > \varepsilon\right) < \infty$。

证明：不失一般性，可设 $a_{ni} > 0$，$i \le n$，$n \ge 1$。令

$$X_i' = -a_{ni}^{-1} I_{(a_{ni}X_i \le -1)} + X_i I_{(|a_{ni}X_i|<1)} + a_{ni}^{-1} I_{(a_{ni}X_i \ge 1)},$$

$$X_i'' = X_i - X_i' = \left(X_i + a_{ni}^{-1}\right) I_{(a_{ni}X_i \le -1)} + \left(X_i - a_{ni}^{-1}\right) I_{(a_{ni}X_i \ge 1)},$$

则 X_i'，X_i'' 仍为两两 NQD 的。对任意给定的 $\varepsilon > 0$，有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ni} X_i\right| > \varepsilon\right) &\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}\left(X_i' - EX_i'\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}\left(X_i' - EX_i'\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} P\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}\left(X_i'' - EX_i''\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \\
&=: A_1 + A_2.
\end{aligned}$$

由引理 2，有

$$\begin{aligned}
A_1 &\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} E\left(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} a_{ni}\left(X_i' - EX_i'\right)\right|^2\right) \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \log^2 n \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 EX_i'^2 \\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \log^2 n \left\{\sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 EX_i^2 I_{(|a_{ni}X_i|<1)} + \sum_{i=1}^{n} P\left(|a_{ni}X_i| \ge 1\right)\right\} \\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \log^2 n \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^2 \int_0^{a_{ni}^{-1}} xP\left(|X_i| \ge x\right)\mathrm{d}x + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \log^2 n \sup_{j\ge1} j^{-1} \sum_{i\le j} P\left(|X_i| \ge a_{ni}^{-1}\right) \\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \log^2 n \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{r(\alpha+\delta)} + C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \log^2 n\, a_{ni}^{r(\alpha+\delta)} \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} \log^2 n < \infty.
\end{aligned}$$

由 Jensen 不等式，有

$$\begin{aligned}
A_2 &\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \sum_{i=1}^{n} a_{ni} E\left|X_i''\right| \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \left\{\sum_{i=1}^{n} P\left(|X_i| \ge a_{ni}^{-1}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \int_{a_{ni}^{-1}}^{\infty} P\left(|X_i| \ge x\right)\mathrm{d}x\right\} \\
&\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2} \left(na_{ni}^{r(\alpha+\delta)} + \sum_{i=1}^{n} a_{ni}^{r(\alpha+\delta)}\right) \le C\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-\delta} < \infty,
\end{aligned}$$

故定理 5 成立。

推论 5：设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 为零均值的两两 NQD 列，$1 \le r < 2$，若对足够小的 $\delta > 0$，有

$\lim\limits_{x\to\infty} x^{1+\delta} \sup\limits_{n\ge1} n^{-1} \sum\limits_{i\le n} P\left(|X_i|^r \ge x\right) = 0$，则对任意的 $\varepsilon > 0$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1} P\left(\max\limits_{1\le k\le n} n^{-\frac{1}{r}}\left|\sum\limits_{i=1}^{k} X_i\right| > \varepsilon\right) < \infty$。

证明：在定理 5 中取 $a_{ni} = n^{-1/r}$，$1 \le i \le n$，$n \ge 1$，取 $\alpha = 1$ 即得推论 5。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 11471153)。

参考文献 (References)

[1] Lehmann, E.L. (1966) Some Concepts of Dependent. *The Annals of Mathematical Statistics*, **43**, 1137-1153. http://dx.doi.org/10.1214/aoms/1177699260

[2] Matula, P. (1992) A Note on the Almost Sure Convergence of Sums of Negatively Dependent Random Variables. *Statistics & Probability Letters*, **15**, 209-213. http://dx.doi.org/10.1016/0167-7152(92)90191-7

[3] 王岳宝，苏淳，刘许国. 关于两两 NQD 列的若干极限性质[J]. 应用数学学报, 1998, 21(3): 404-414.

[4] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.

[5] 万成高. 两两 NQD 列的大数定律和完全收敛性[J]. 应用数学学报, 2005, 28(2): 253-261.

[6] 甘师信. B 值随机元阵列加权和的收敛性与大数定律[J]. 武汉大学学报(自然科学版), 1997, 43(5): 569-574.