Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 121-123
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51016

A Generalization of the Gale-Ryser Type Characterization Theorem

Jiyun Guo, Dongmei Wang

College of Information Science and Technology, Hainan University, Hainan Haikou
Email: 158238102@qq.com

Received: Feb. 4th, 2016; accepted: Feb. 19th, 2016; published: Feb. 26th, 2016

Abstract

Let $P_m = p_1,\cdots,p_m$ and $Q_n = q_1,\cdots,q_n$ be two non-increasing sequences of nonnegative integers. The pair (P_m,Q_n) is said to be bigraphic if there is a simple *X*,*Y*-bigraph such that the vertices of *X* have degrees $p_1,\cdots,p_m$ and the vertices of *Y* have degrees $q_1,\cdots,q_n$. (P_m,Q_n) is said to be *t*-bigraphic if it is bigraphic and no two vertices from different partite sets are joined by more than *t* edges. In this paper, we give a characterization for (P_m,Q_n) to be *t*-bigraphic. In fact, it is a generation of the Gale-Ryser type characterization theorem.

Keywords

Degree, Bigraphic Sequence, *t*-Bigraphic Sequence

Gale-Ryser型刻划定理的一个推广

郭纪云，王冬梅

海南大学信息科学技术学院，海南 海口
Email: 158238102@qq.com

收稿日期：2016年2月4日；录用日期：2016年2月19日；发布日期：2016年2月26日

文章引用：郭纪云，王冬梅. Gale-Ryser 型刻划定理的一个推广[J]. 应用数学进展, 2016, 5(1): 121-123.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51016

摘　要

设 $P_m = p_1,\cdots,p_m$ 及 $Q_n = q_1,\cdots,q_n$ 是两个由非负整数构成的不增序列。如果存在一个简单X，Y-二部图使得 X 中的顶点的度分别为 $p_1,\cdots,p_m$ 且 Y 中的顶点的度分别为 $q_1,\cdots,q_n$，那么称序列对 (P_m,Q_n) 是二部可图的。如果 (P_m,Q_n) 二部可图且任何两个来自不同部集的顶点之间最多连有t条边，那么称 (P_m,Q_n) 是t-二部可图的。本文给出一个t-二部可图序列的刻划定理。事实上，该定理是Gale-Ryser型刻划定理的一个推广。

关键词

度，二部可图序列，t-二部可图序列

1. 引言

设 $P_m = p_1,\cdots,p_m$ 及 $Q_n = q_1,\cdots,q_n$ 是两个由非负整数构成的不增序列。如果存在一个简单 X,Y-二部图使得 X 中的顶点的度分别为 $p_1,\cdots,p_m$ 且 Y 中的顶点的度分别为 $q_1,\cdots,q_n$，那么称序列对 (P_m,Q_n) 是二部可图的。以下是著名的 Gale-Ryser 型关于二部可图序列的刻划定理。

定理 1 (Gale [1], Ryser [2])设 $P_m = p_1,\cdots,p_m$ 及 $Q_n = q_1,\cdots,q_n$ 是两个由非负整数构成的不增序列且满足条件 $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i$，则序列对 (P_m,Q_n) 是二部可图的当且仅当对于任意的整数 k，$1 \le k \le n$，有

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \le \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, k\}.$$

如果 (P_m,Q_n) 二部可图且任何两个来自不同部集的顶点之间最多连有 t 条边，其中 t 是正整数，那么称 (P_m,Q_n) 是 t-二部可图的。本文给出一个 t-二部可图序列的刻划定理。事实上，该定理是 Gale-Ryser 型刻划定理的一个推广，当 $t=1$ 时下面的定理 2 即为定理 1。

定理 2 设 $P_m = p_1,\cdots,p_m$ 及 $Q_n = q_1,\cdots,q_n$ 是两个由非负整数构成的不增序列且它们满足条件 $\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_i$，则序列对 (P_m,Q_n) 是 t-二部可图的当且仅当对于任意的整数 k，$1 \le k \le n$，有

$$\sum_{i=1}^{k} q_i \le \sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, tk\}. \tag{1}$$

2. 定理 2 的证明

必要性。设 G 是实现 (P_m,Q_n) 的一个 t-二部图，其部集为 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 和 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$。考虑关联到 Y 中的 k 个顶点的所有边。由于 G 是 t-二部图，因此每个 $x_i \in X$ 最多关联到这些边中的 tk 条，而且 x_i 也最多关联到这些边中的 p_i 条。于是，$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_i, tk\}$ 是关联到 Y 的任意 k 个顶点的所有边的条数的上界，这个界在度为 $q_1,\cdots,q_n$ 的那些顶点上取得。

充分性。设有两个非增非负整数序列 $P_m = p_1,\cdots,p_m$ 及 $Q_n = q_1,\cdots,q_n$，它们满足(1)式。首先，我们构造一个 t-二部图 G'，其部集 $X=\{x_1,\cdots,x_m\}$ 和 $Y=\{y_1,\cdots,y_n\}$ 满足条件 $d(x_i)=p_i, 1\le i\le m$ 及 $d(y_j)\le q_j, 1\le j\le n$。定义一个临界指标 r，它是满足条件 $d(x_i)=p_i, 1\le i<r$ 且 $d(x_r)<p_r$ 的最大的下标。我们将逐步去掉顶点 x_r 处的差额 $p_r - d(x_r)$ 而保持 $d(x_i)=p_i, 1\le i<r$ 及 $d(y_j)\le q_j, 1\le j\le n$。我们从

$m+n$ 个顶点的空图开始，此时 $r=1$，除非对于所有的 i 都有 $p_i=0$，在这种情况下结论已成立。为了方便，记 $E(x_i,x_j)$ 为顶点 x_i 与 x_j 之间的边所构成的集合，$e(x_i,x_j)=|E(x_i,x_j)|$。对于顶点 $x_i,1\le i<r$，由于 $d(x_i)=p_i\ge p_r>d(x_r)$，因此一定存在顶点 v 使得 $e(v,x_i)>e(v,x_r)$。

情形(1) 对于某个 j 和 $k(k>r)$，$e(y_j,x_k)\ge 1$，且存在某个 $l\le r$ 使得 $e(y_j,x_l)<t$。当 $l=r$ 时，在顶点 x_k 与 y_j 之间去掉一条边，在 x_r 与 y_j 之间连上一条边。当 $l<r$ 时，分别在 x_k 与 y_j，x_l 与 v 之间去掉一条边，分别在 x_l 与 y_j，x_r 与 v 之间连上一条边，其中 $e(v,x_l)>e(v,x_r)$。

情形(2) 对于某个 j 和 $l(l\le r)$，$d(y_j)<q_j$ 且 $e(y_j,x_l)<t$。当 $l=r$ 时，在 x_r 与 y_j 之间连上一条边。当 $l<r$ 时，在 x_l 与 v 之间去掉一条边，分别在 x_l 与 y_j，x_r 与 v 之间连上一条边，其中 $e(v,x_l)>e(v,x_r)$。

若以上两种情形均不能应用，则

$$\sum_{i=1}^{r-1}p_i+d(x_r)=\sum_{i=1}^{r}d(x_i)=\sum_{j=1}^{n}\min\{d(y_j),rt\}=\sum_{j=1}^{n}\min\{q_j,rt\}.$$

由(1)知 $d(x_r)\ge p_r$，又 $d(x_r)\le p_r$，故 $d(x_r)=p_r$。重复上述步骤可得到图 G'，满足 $d_{G'}(x_i)=p_i,1\le i\le m$ 且 $d_{G'}(y_j)\le q_j,1\le j\le n$。又因为 $\sum_{j=1}^{n}d_{G'}(y_j)=\sum_{i=1}^{m}d_{G'}(x_i)=\sum_{i=1}^{m}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i$，从而有 $d_{G'}(y_j)=p_j,1\le j\le n$。因此 G' 就是想要的 t-二部图，即 (P_m,Q_n) 是 t-二部可图的。

基金项目

海南省自然科学基金资助项目(20151004)。

参考文献 (References)

[1] Gale, D. (1957) A Theorem on Flows in Networks. *Pacific Journal of Mathematics*, **7**, 1073-1082. http://dx.doi.org/10.2140/pjm.1957.7.1073

[2] Ryser, H.J. (1957) Combinatorial Properties of Matrices of Zeros and Ones. *Canada Journal of Mathematics*, **9**, 371-377. http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1957-044-3