Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 87-97
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51013

Hans汉斯

Solution of Two Order Variable Coefficient Linear Differential Equation into Standard Form

Xiong Chen[1,2], **Shiyou Lin**[1*], **Haohan Zhang**[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou Hainan
[2]Yilong County No.2 Middle School, Hainan Normal University, Sichuan Nanchong
Email: 270980734@qq.com, *linsy1111@foxmail.com, 435741676@qq.com

Received: Feb. 3rd, 2016; accepted: Feb. 19th, 2016; published: Feb. 26th, 2016

Abstract

This paper discusses the solution of the two order variable coefficient linear differential equation with standard type, which transforms the traditional method of reducing order. Through simplifying the original differential equation and using means of cofunction and particular integral, we can get the homogeneous and non-homogeneous solution of the standard type. Finally we can construct the general solution of the original equation.

Keywords

Two Order Variable Coefficient, Linear Differential Equation, Standard Type, Cofunction, Particular Integral, General Solution

二阶变系数线性微分方程化为标准型的求解

陈　雄[1,2]，**林诗游**[1*]，**张皓涵**[1]

[1]海南师范大学数学与统计学院，海南　海口
[2]仪陇县第二中学，四川　南充
Email: 270980734@qq.com, *linsy1111@foxmail.com, 435741676@qq.com

*通讯作者。

文章引用: 陈雄，林诗游，张皓涵. 二阶变系数线性微分方程化为标准型的求解[J]. 应用数学进展, 2016, 5(1): 87-97.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51013

收稿日期：2016年2月3日；录用日期：2016年2月19日；发布日期：2016年2月26日

摘　要

本文给出关于二阶变系数线性微分方程的求解，转变以往降阶的常规思维，利用其标准型进行求解。在标准型的求解中，通过对原微分方程的化简，利用余函数和特积分，分别求出其标准型齐次和非齐次的解，最后构造出原方程通解。

关键词

二阶变系数，线性微分方程，标准型，余函数，特积分，通解

1. 引言

常微分方程作为数学领域的重要分支，在实际生产生活中有着广泛的应用，特别是在许多工程问题中。二阶微分方程是工程问题中比较常见的，由参考文献[1]、[2]对于二阶微分方程的解法有一些研究，例如：参考文献[3]中比较常用的降阶方法。而对于工程中出现较多的二阶变系数线性微分方程，在目前工程问题中，仅仅依靠文献[4]中一些数学方法求解还不能达到满意的效果，从而需要进一步探求新的解决问题的方法，而在文献[5]中提到的化为标准型求解就是一种比较基础的解法。探求标准型的解法不仅有助于我们解决一些工程问题，也进一步拓展和深化二阶微分方程的数学解法，对于丰富二阶微分方程的数学解法很有意义。

2. 标准型

二阶变系数线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+p_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p_2(x)y=\Phi(x) \tag{1-1}$$

其中 $p_1(x), p_2(x), \Phi(x)$ 均为 x 的连续函数。

设

$$y=uv \tag{1-2}$$

其中 $u=u(x), v=v(x)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{1-3}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=u\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} \tag{1-4}$$

将(1-2)~(1-4)代入(1-1)式中得

$$u\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}+p_1(x)u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+p_1(x)v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p_2(x)uv=\Phi(x) \tag{1-5}$$

或

$$u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\left[2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p_1(x)u\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\left[\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+p_1(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p_2(x)u\right]v=\Phi(x) \tag{1-6}$$

令 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的系数等于 0，即

$$2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+p_1(x)u=0 \tag{1-7}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{2}p_1(x)u \tag{1-8}$$

$$2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-p_1(x)u \tag{1-9}$$

由(1-7)式可解得

$$u=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x} \tag{1-10}$$

再由(1-7)~(1-9)式可得

$$2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+p_1(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1-11}$$

$$2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{2}p_1^2(x)u+u\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1-12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{4}p_1^2(x)u+\frac{1}{2}u\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}=0 \tag{1-13}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{4}p_1^2(x)u-\frac{1}{2}u\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1-14}$$

再将(1-8)~(1-14)代入(1-6)式得

$$u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\left[-p_1(x)u+p_1(x)u\right]\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+\left[\frac{1}{4}p_1^2(x)u-\frac{1}{2}u\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{2}p_1^2(x)u+p_2(x)u\right]v=\Phi(x) \tag{1-15}$$

整理后可得

$$u\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\left[p_2(x)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{4}p_1^2(x)\right]uv=\Phi(x) \tag{1-16}$$

上式两边同时除以 u 后得

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+\left[p_2(x)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{4}p_1^2(x)\right]v=\frac{\Phi(x)}{u}=\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x} \tag{1-17}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+f(x)v=\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x} \tag{1-18}$$

令

$$\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}=\varphi(x)$$

则

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+f\left(x\right)v=\varphi\left(x\right) \tag{1-19}$$

其中

$$f\left(x\right)=p_2\left(x\right)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p_1\left(x\right)}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{4}p_1^2\left(x\right) \tag{1-20}$$

称(1-19)式为二阶微分方程(1-1)式的标准型。

3. 标准型的求解

1) 余函数的求解

现在求解标准型(1-19)式的通解

$$v=v_c+v_p \tag{2-1}$$

首先求解余函数 v_c。

由特征方程：

$$m^2+f\left(x\right)=0 \tag{2-2}$$

得

$$m_1=\sqrt{-f\left(x\right)},m_2=-\sqrt{-f\left(x\right)}$$

所以

$$v_c=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x} \tag{2-3}$$

下面继续求解其特积分 v_p。

2) n 阶微分方程特积分的求解

关于特积分由参考文献[5]我们知道

对于非齐次线性微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+p_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+p_2\frac{\mathrm{d}^{n-2}y}{\mathrm{d}x^{n-2}}+\cdots+p_{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p_n y=\Phi\left(x\right) \tag{2-4}$$

设其通解为

$$y\left(x\right)=y_c+y_p \tag{2-5}$$

其中，对于

$$y_c=c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_ny_n \tag{2-6}$$

的求法(齐次方程的通解)——特征方程，特征根。

假设已知 y_c，现在求 y_p。

设待定函数 $c_1\left(x\right),c_2\left(x\right),\cdots,c_n\left(x\right)$，满足

$$y_p=c_1\left(x\right)y_1+c_2\left(x\right)y_2+\cdots+c_n\left(x\right)y_n \tag{2-7}$$

其中：$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 是对应于(2-4)式的齐次微分方程的 n 个线性无关的解。下面要求(2-7)式满足(2-4)式和其它 $n-1$ 个方程。为选择这 $n-1$ 个方程，应使得(2-7)式的各阶导数尽可能有 $c_1\left(x\right),c_2\left(x\right),\cdots,c_n\left(x\right)$ 为常数时所具有的形式。

所以，对(2-7)式求导可得

$$y_{p'} = c_1(x)y_{1'} + c_2(x)y_{2'} + \cdots + c_n(x)y_{n'} + \left[c_{1'}(x)y_1 + c_{2'}(x)y_2 + \cdots + c_{n'}(x)y_n\right] \tag{2-8}$$

令 $c_{1'}(x)y_1 + c_{2'}(x)y_2 + \cdots + c_{n'}(x)y_n = 0$

则

$$y_{p'} = c_1(x)y_{1'} + c_2(x)y_{2'} + \cdots + c_n(x)y_{n'} \tag{2-9}$$

即 $y_{p'}$ 具有 $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ 为常数时所具有的形式。

对 y_p 继续求二阶导数

$$y_{p''} = c_1(x)y_{1''} + c_2(x)y_{2''} + \cdots + c_n(x)y_{n''} + \left[c_{1'}(x)y_{1'} + c_{2'}(x)y_{2'} + \cdots + c_{n'}(x)y_{n'}\right] \tag{2-10}$$

令 $c_{1'}(x)y_{1'} + c_{2'}(x)y_{2'} + \cdots + c_{n'}(x)y_{n'} = 0$

则

$$y_{p''} = c_1(x)y_{1''} + c_2(x)y_{2''} + \cdots + c_n(x)y_{n''} \tag{2-11}$$

即 $y_{p''}$ 也具有 $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ 为常数时所具有的形式。

同理可求得 y_p 的三阶导数为

$$y_{p'''} = c_1(x)y_{1'''} + c_2(x)y_{2'''} + \cdots + c_n(x)y_{n'''} \tag{2-12}$$

依次求导至 $n-1$ 阶的导数，且每一次的导数满足

$$c_{1'}(x)y_1^{(k)} + c_{2'}(x)y_2^{(k)} + \cdots + c_{n'}(x)y_n^{(k)} = 0 \tag{2-13}$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-2$。

$$y_p^{(n-1)} = c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)} \tag{2-14}$$

$$y_p^{(n)} = c_1(x)y_1^{(n)} + c_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)} + \left[c_{1'}(x)y_1^{(n-1)} + c_{2'}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_{n'}(x)y_n^{(n-1)}\right] \tag{2-15}$$

所以

$$\begin{aligned}
&y_{p'} = c_1(x)y_{1'} + c_2(x)y_{2'} + \cdots + c_n(x)y_{n'} \\
&y_{p''} = c_1(x)y_{1''} + c_2(x)y_{2''} + \cdots + c_n(x)y_{n''} \\
&y_{p'''} = c_1(x)y_{1'''} + c_2(x)y_{2'''} + \cdots + c_n(x)y_{n'''} \\
&\qquad\qquad\vdots \\
&y_p^{(n-1)} = c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)} \\
&y_p^{(n)} = c_1(x)y_1^{(n)} + c_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)} + \left[c_{1'}(x)y_1^{(n-1)} + c_{2'}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_{n'}(x)y_n^{(n-1)}\right]
\end{aligned} \tag{2-16}$$

在(2-16)式最后一个等式中，因为函数 $c_1(x), c_2(x), \cdots, c_n(x)$ 已经满足 $n-1$ 个方程(2-13)，且还需满足原方程式(2-4)，则要求

$$c_{1'}(x)y_1^{(n-1)} + c_{2'}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_{n'}(x)y_n^{(n-1)} \neq 0$$

将 y_p 及其各阶导数代入式(2-4)中得

$$\begin{aligned}
&\left[c_{1'}(x)y_1^{(n-1)} + c_{2'}(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_{n'}(x)y_n^{(n-1)}\right] + \left[c_1(x)y_1^{(n)} + c_2(x)y_2^{(n)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}\right] \\
&+ p_1\left[c_1(x)y_1^{(n-1)} + c_2(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}\right] + \cdots + p_{n-1}\left[c_1(x)y_{1'} + c_2(x)y_{2'} + \cdots + c_n(x)y_{n'}\right] \\
&+ p_n\left[c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2 + \cdots + c_n(x)y_n\right] = \Phi(x)
\end{aligned} \tag{2-17}$$

整理后得

$$\begin{aligned}&\left[c_{1'}(x)y_1^{(n-1)}+c_{2'}(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_{n'}(x)y_n^{(n-1)}\right]\\&+\sum_{i=1}^{n}c_i\left[y_i^{(n)}+p_1y_i^{(n-1)}+p_2y_i^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y_{i'}+p_ny_i\right]=\Phi(x)\end{aligned}\tag{2-18}$$

因为所有的 y_i 都是相对应的齐次微分方程的特解，所以在式(2-18)中的

$$y_i^{(n)}+p_1y_i^{(n-1)}+p_2y_i^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y_{i'}+p_ny_i\equiv 0\,(i=1,2,3,\cdots,n)\tag{2-19}$$

因此，式(2-18)可以改写为

$$c_{1'}(x)y_1^{(n-1)}+c_{2'}(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_{n'}(x)y_n^{(n-1)}=\Phi(x)\tag{2-20}$$

则

$$\begin{gathered}c_{1'}(x)y_1+c_{2'}(x)y_2+\cdots+c_{n'}(x)y_n=0\\c_{1'}(x)y_{1'}+c_{2'}(x)y_{2'}+\cdots+c_{n'}(x)y_{n'}=0\\c_{1'}(x)y_1^{(n-2)}+c_{2'}(x)y_2^{(n-2)}+\cdots+c_{n'}(x)y_n^{(n-2)}=0\\c_{1'}(x)y_1^{(n-1)}+c_{2'}(x)y_2^{(n-1)}+\cdots+c_{n'}(x)y_n^{(n-1)}=\Phi(x)\end{gathered}\tag{2-21}$$

由以上方程组可以确定函数 $c_1(x),c_2(x),\cdots,c_n(x)$。

由于朗斯基行列式 $W\neq 0$，所以存在唯一一组解 $c_{1'}(x),c_{2'}(x),\cdots,c_{n'}(x)$，解方程组(2-21)可得

$$c_{1'}(x)=f_1(x),c_{2'}(x)=f_2(x),\cdots,c_{n'}(x)=f_n(x)$$

对以上各式积分后可得

$$\begin{aligned}c_1(x)&=\int f_1(x)\mathrm{d}x=F_1(x)\\c_2(x)&=\int f_2(x)\mathrm{d}x=F_2(x)\\&\vdots\\c_n(x)&=\int f_n(x)\mathrm{d}x=F_n(x)\end{aligned}\tag{2-22}$$

将式(2-22)代入式(2-7)得

$$y_p=F_1(x)y_1+F_2(x)y_2+\cdots+F_n(x)y_n\tag{2-23}$$

即式(2-23)为原方程的特积分表达式。

所以原方程的通解为

$$y=y_c+y_p=\left[c_1(x)y_1+c_2(x)y_2+\cdots+c_n(x)y_n\right]+\left[F_1(x)y_1+F_2(x)y_2+\cdots+F_n(x)y_n\right]\tag{2-24}$$

3) 二阶微分方程特积分

对于二阶非齐次微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+p_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p_2y=\Phi(x)\tag{2-25}$$

其特积分表达式为

$$y_p=F_1(x)y_1+F_2(x)y_2\tag{2-26}$$

由题可得方程组

$$c_{1'}(x)y_1+c_{2'}(x)y_2=0$$
$$c_{1'}(x)y_{1'}+c_{2'}(x)y_{2'}=\Phi(x) \tag{2-27}$$

解方程组得

$$F_1(x)=c_1(x)=-\int\frac{y_2\Phi(x)}{\Delta}\mathrm{d}x$$
$$F_2(x)=c_2(x)=\int\frac{y_1\Phi(x)}{\Delta}\mathrm{d}x \tag{2-28}$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_{1'} & y_{2'} \end{vmatrix}=y_1y_{2'}-y_2y_{1'}$$

则关于方程

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}+f(x)v=\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}=\varphi(x)$$

的特积分，根据式(2-26)可得

$$v_p=F_1(x)v_1+F_2(x)v_2 \tag{2-29}$$

再根据式(2-27)得方程组

$$\begin{aligned} &c_{1'}(x)v_1+c_{2'}(x)v_2=0 \\ &c_{1'}(x)v_{1'}+c_{2'}(x)v_{2'}=\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}=\varphi(x) \end{aligned} \tag{2-30}$$

由此来确定 $c_1(x),c_2(x)$，解此方程组得

$$\begin{aligned} &F_1(x)=c_1(x)=-\int\frac{v_2\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}}{\Delta}\mathrm{d}x=-\int\frac{v_2\varphi(x)}{\Delta}\mathrm{d}x \\ &F_2(x)=c_2(x)=\int\frac{v_1\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}}{\Delta}\mathrm{d}x=\int\frac{v_1\varphi(x)}{\Delta}\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2-31}$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_{1'} & v_{2'} \end{vmatrix}=v_1v_{2'}-v_2v_{1'}$$

由(2-3)式得

$$v_1=\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x},v_2=\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}$$

所以

$$v_{1'}=\left(\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}\right)'=\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}\left[\sqrt{-f(x)}x\right]'=\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}\left[-\frac{1}{2}x\left(-f(x)^{-\frac{1}{2}}\right)f(x)'+\sqrt{-f(x)}\right]$$
$$v_{2'}=\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\right)'=\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\left[-\sqrt{-f(x)}x\right]'=\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\left[\frac{1}{2}x\left(-f(x)^{-\frac{1}{2}}\right)f(x)'-\sqrt{-f(x)}\right]$$

所以

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_{1'} & v_{2'} \end{vmatrix}=\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\left[\frac{1}{2}x\left(-f(x)^{-\frac{1}{2}}\right)f(x)'-\sqrt{-f(x)}\right]$$
$$-\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}\left[-\frac{1}{2}x\left(-f(x)^{-\frac{1}{2}}\right)f(x)'+\sqrt{-f(x)}\right]$$
$$=x\left[-f(x)\right]^{-\frac{1}{2}}f(x)'-2\sqrt{-f(x)}$$

由(2-31)式得

$$\begin{aligned}F_1(x)&=-\int\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}}{x\left[-f(x)\right]^{-\frac{1}{2}}f(x)'-2\sqrt{-f(x)}}\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x-\sqrt{-f(x)}x}}{x\left[-f(x)\right]^{-\frac{1}{2}}f(x)'-2\sqrt{-f(x)}}\mathrm{d}x\\F_2(x)&=\int\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}}{x\left[-f(x)\right]^{-\frac{1}{2}}f(x)'-2\sqrt{-f(x)}}\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\Phi(x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x+\sqrt{-f(x)}x}}{x\left[-f(x)\right]^{-\frac{1}{2}}f(x)'-2\sqrt{-f(x)}}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2-32}$$

$$f'(x)=p_{2'}(x)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2p_1(x)}{\mathrm{d}x^2}-\frac{1}{2}p_1(x)\tag{2-33}$$

所以标准型方程(1-19)式的特积分为

$$v_p=F_1(x)\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}+F_2(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\tag{2-34}$$

该标准型的通解为

$$v=v_c+v_p=c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}+F_1(x)\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}+F_2(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\tag{2-35}$$

则原二阶微分方程的通解解为

$$y=uv=v\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}=\left[c_1\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}+c_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}+F_1(x)\mathrm{e}^{\sqrt{-f(x)}x}+F_2(x)\mathrm{e}^{-\sqrt{-f(x)}x}\right]\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}\tag{2-36}$$

4. 例题

对于以上的求解方法，下面我们通过两个例子来进行说明，以验证化标准型解法的基础性和适用性。

例 1. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(4x^2-1\right)y=-6\mathrm{e}^{x^2}\sin 2x$ 的通解。

解： 由题可知 $p_1(x)=-4x,\ p_2(x)=4x^2-1,\ \Phi(x)=-6\mathrm{e}^{x^2}\sin 2x$

化成标准型

$$u=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int(-4x)\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x^2}$$

$$f(x)=p_2(x)-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}p_1(x)}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{4}p_1^2(x)=4x^2-1-\frac{1}{2}(-4x)'-\frac{1}{4}(-4x)^2=1$$

由此得该微分方程的标准型为

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}+v=\frac{\Phi(x)}{u}=-6\sin 2x$$

先求其标准型的余函数 v_c。

其特征方程为

$$m^2+1=0$$

由参考文献[6]定理 8：如果方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+p_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+p_2(x)\frac{\mathrm{d}^{n-2} y}{\mathrm{d}x^{n-2}}+\cdots+p_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p_n(x)y=0$$

的所有系数 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_n(x)$ 都是实值函数，而 $y=\alpha+i\beta$ 是方程的复值解，则 y 的实部，虚部以及其共轭复值 $\overline{y}=\alpha-i\beta$ 也都是方程的解。

所以

$$m_1=i,m_2=-i$$

则

$$v_1=\mathrm{e}^{ix}=\cos x,v_2=\mathrm{e}^{-ix}=\sin x$$

$$v_c=c_1\cos x+c_2\sin x$$

再解标准型的特积分 v_p。

由以上特征根得

$$v_1=\cos x,v_2=\sin x,\varphi(x)=-6\sin 2x$$

$$v_{1'}=-\sin x,v_{2'}=\cos x$$

所以

$$\Delta=\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_{1'} & v_{2'} \end{vmatrix}=v_1v_{2'}-v_2v_{1'}=1$$

则

$$F_1(x)=-\int\frac{v_2\varphi(x)}{\Delta}\mathrm{d}x=-\int\sin x(-6\sin 2x)\mathrm{d}x=6\int\sin x\sin 2x\mathrm{d}x$$
$$=6\int 2\sin^2 x\cos x\mathrm{d}x=12\int\sin^2 x\mathrm{d}\sin x=4\sin^3 x$$

$$F_2(x)=\int\frac{v_1\varphi(x)}{\Delta}\mathrm{d}x=\int\cos x(-6\sin 2x)\mathrm{d}x=-6\int\cos x\sin 2x\mathrm{d}x$$
$$=-6\int 2\cos^2 x\sin x\mathrm{d}x=12\int\cos^2 x\mathrm{d}\cos x=4\cos^3 x$$

由式(2-34)得标准型的特积分为

$$v_p=4\sin^3 x\mathrm{e}^{ix}+4\cos^3 x\mathrm{e}^{-ix}=4\cos x\sin^3 x+4\sin x\cos^3 x$$
$$=4\cos x\sin x\left(\sin^2+\cos^2\right)=2\sin 2x$$

所以原微分方程的标准型的通解为

$$v=c_1\cos x+c_2\sin x+2\sin 2x$$

则原微分方程的通解为

$$y = uv = e^{x^2}\left[c_1 \cos x + c_2 \sin x + 2\sin 2x\right]$$

例 2. 求二阶微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - 3y = 2e^{-x}$ 的通解。

解： 由题可得 $p_1 = -2, p_2 = -3, \Phi(x) = 2e^{-x}$

$$f(x) = p_2 - \frac{1}{2}p_{1'} - \frac{1}{4}p_1^2 = -4$$

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1(x)dx} = e^x$$

其化为标准型为

$$\frac{d^2v}{dx^2} - 4v = \frac{\Phi(x)}{u} = 2e^{-2x}$$

即

$$\frac{d^2v}{dx^2} - 4v = 2e^{-2x}$$

所以特征方程为

$$m^2 - 4 = 0$$

所以

$$m_1 = 2, m_2 = -2$$

$$v_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$$

则

$$v_1 = e^{2x}, v_2 = e^{-2x}, \varphi(x) = 2e^{-2x}$$

$$v_{1'} = 2e^{2x}, v_{2'} = -2e^{-2x}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ v_{1'} & v_{2'} \end{vmatrix} = v_1v_{2'} - v_2v_{1'} = e^{2x}\left(-2e^{-2x}\right) - e^{-2x}2e^{2x} = -4$$

所以

$$c_1 = -\int \frac{v_2\varphi(x)}{\Delta}dx = -\int \frac{e^{-2x}2e^{-2x}}{\Delta}dx = \frac{1}{2}\int e^{-4x}dx = -\frac{1}{8}e^{-4x}$$

$$c_2 = \int \frac{v_1\varphi(x)}{\Delta}dx = \int \frac{e^{2x}2e^{-2x}}{\Delta}dx = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x$$

由以上得该标准型的特积分为

$$v_p = -\frac{1}{8}e^{-4x}e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}x\right)e^{-2x} = -\frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}$$

通解为

$$v = v_c + v_p = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} - \frac{1}{2}xe^{-2x}$$

所以原微分方程的通解为

$$y = uv = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{8} e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x} = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$$

致　谢

感谢编辑和审稿专家对本文所付出的劳动，本文受到海南省自然科学基金(项目名称：Gronwall 不等式的推广及其在微分方程中的应用；项目编号：20151011)的资助，在此一并表示感谢。

参考文献 (References)

[1] 姜嵛芃. 二阶变系数线性常微分方程解法研究[J]. 金融理论与教学, 2012(4): 90-91.
[2] 方辉平, 叶鸣. 二阶变系数齐线性常微分方程的求解[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2011, 28(1): 14-17.
[3] 卢亦平, 钱椿林. 二阶常系数线性微分方程的降阶法[J]. 苏州市职业大学学报, 2014, 25(3): 49-52.
[4] [美]G.F.塞蒙斯, 著. 微分方程[M]. 张理京, 译. 北京: 人民教育出版社, 1981.
[5] 国振喜. 工程微分方程[M]. 北京: 机械工业出版社, 2004.
[6] 王高雄, 周之铭. 常微分方程[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2012.