Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(4), 646-650
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54075

The Asymptotic Expansion Related to the Similar Constant *B* of Glaisher-Kinkelin Constant *A*

Chaomin Tang*, **Hongmei Liu, Yunxiao Shi, Guiqing Shi**

School of Science, Dalian Nationalities University, Dalian Liaoning
Email: *1228278400@qq.com

Received: Nov. 2nd, 2016; accepted: Nov. 18th, 2016; published: Nov. 24th, 2016

Abstract

In this paper, by the Bernoulli numbers and the exponential complete Bell polynomials, we establish one general asymptotic expansion related to the similar constant *B* of Glaisher-Kinkelin constant *A* and the function $1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}$.

Keywords

Glaisher-Kinkelin Constant *A*, Similar Constant *B*, Asymptotic Expansion

关于Glaisher-Kinkelin常数*A*的类似常数*B*的渐近展开

唐超敏*，**刘红梅，史云霄，石桂庆**

大连民族大学理学院，辽宁 大连
Email: *1228278400@qq.com

收稿日期：2016年11月2日；录用日期：2016年11月18日；发布日期：2016年11月24日

*通讯作者。

文章引用: 唐超敏, 刘红梅, 史云霄, 石桂庆. 关于 Glaisher-Kinkelin 常数 *A* 的类似常数 *B* 的渐近展开[J]. 应用数学进展, 2016, 5(4): 646-650. http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54075

摘　要

在本文中，通过Bernoulli数和指数型完全Bell多项式，我们建立了关于Glaisher-Kinkelin常数*A*的类似常数*B*和$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}$ 的渐近展开式。

关键词

Glaisher-Kinkelin常数*A*，类似常数*B*，渐近展开

1. 引言

Glaisher-Kinkelin 常数 $A=1.2824271291\ldots$ 被定义为：

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{H(n)}{n^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{12}}e^{-\frac{n^2}{4}}},\tag{1.1}$$

其中，$H(n)=1^12^2\cdots n^n$ 为超阶乘函数。最近，根据 Euler-Maclaurin 公式，Chen [1]给出了下列关于超阶乘函数和 Glaisher-Kinkelin 常数 A 的渐近展开：

$$1^12^2\cdots n^n\sim A\cdot n^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{12}}e^{-\frac{n^2}{4}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-B_{k+2}}{k(k+1)(k+2)}\frac{1}{n^k}\right\},\quad n\to\infty,\tag{1.2}$$

其中，B_n 为 Bernoulli 数。

在式(1.2)的基础上，Wang and Liu [2]对超阶乘函数和 Glaisher-Kinkelin 常数推导出以下一般渐近展开：

$$1^12^2\cdots n^n\sim A\cdot n^{\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+\frac{1}{12}}e^{-\frac{n^2}{4}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(n+h)^k}\right)^{\frac{1}{r}}.\tag{1.3}$$

最近，我们发现，Chen [1]还建立了以下关于$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}$ 和常数 B 的渐近展开：

$$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}\sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}e^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2B_{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\frac{1}{n^k}\right\},\quad n\to\infty\tag{1.4}$$

其中，B 为 Glaisher-Kinkelin 常数 A 的类似常数。

以上知识给了我们一个启发，我们希望通过 Bernoulli 数和指数型完全贝尔多项式去推导出关于 Glaisher-Kinkelin 常数 A 的类似常数 B 和$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}$ 的渐近展开：

$$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}\sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot e^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(n+h)^k}\right)^{\frac{1}{r}}.\tag{1.5}$$

为了得到这个渐近展开式，我们需要下列指数型完全 Bell 多项式的相关知识。指数型完全 Bell 多项式 Y_n 被定义为(见[3], Section 3.3)：

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}x_m\frac{t^m}{m!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}Y_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{t^n}{n!}.\tag{1.6}$$

它的具体表达式为：

$$Y_0=1,\ Y_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{c_1+2c_2+\cdots+nc_n=n}\frac{n!}{c_1!c_2!\cdots c_n!}\left(\frac{x_1}{1!}\right)^{c_1}\left(\frac{x_2}{2!}\right)^{c_2}\cdots\left(\frac{x_n}{n!}\right)^{c_n}. \tag{1.7}$$

另外，根据[4], p.36, Equation (44)和[5], Theorem 1 可以知道多项式 Y_n 满足递归式：

$$Y_n\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x_{n-j}Y_j\left(x_1,x_2,\cdots,x_j\right),\quad n\ge 1. \tag{1.8}$$

2. 定理及证明

2.1. 定理

令 h,r 为实数，$r\ne 0$，并定义 $\beta_k=\frac{2rk!B_{k+3}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$，则我们有下列关于 $1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}$ 和常数 B 的渐近展开：

$$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}\sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(n+h)^k}\right)^{\frac{1}{r}},$$

其中，当 $k=0$ 时，$\alpha_0=1$；当 $k\ge 1$ 时，

$$\alpha_k=\frac{y_k}{k!}-\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{k-j}h^{k-j}\alpha_j, \tag{2.1}$$

在式(2.1.1)中，当 $k=0$ 时，$y_0=1$；当 $k\ge 1$ 时，$y_k=\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k-1}{j}\beta_{k-j}y_j$.

2.2. 证明

令 $M_n=\frac{1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}}{n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}}$，由(1.6)以及 β_k 的定义，我们可以将式(1.4)改写为：

$$\begin{aligned}\left(\frac{M_n}{B}\right)^r&\sim\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2B_{k+3}\cdot r}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\frac{1}{n^k}\right)\\&=\exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{k!}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Y_k\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\right)}{k!}\frac{1}{n^k},\quad n\to\infty\end{aligned}$$

另外，将 $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{(n+h)^j}$ 展开为关于 $\frac{1}{n}$ 的幂级数：

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{(n+h)^j}&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{n^j(1+h/n)^j}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\alpha_j}{n^j}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{-j}{i}\frac{h^i}{n^i}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\binom{-j}{k-j}\frac{h^{k-j}\alpha_j}{n^k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{k-j}h^{k-j}\alpha_j\right\}\frac{1}{n^k}\end{aligned}.$$

要证：$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2} \sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_k}{(n+h)^k}\right)^{\frac{1}{r}}$，即要使下列等式成立：

$$\frac{Y_k(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)}{k!}=\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{k-j}h^{k-j}\alpha_j .$$

当我们定义 $y_k = Y_k(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)$ 时，上式可以写成：

$$\frac{y_k}{k!}=\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{k-j}h^{k-j}\alpha_j .$$

通过以上等式，我们得到一个唯一解 $(\alpha_k)_{k\ge 0}$，而且 $(\alpha_k)_{k\ge 0}$ 有如下递推关系：

$$\begin{cases}\alpha_0=1, & k=0;\\ \alpha_k=\dfrac{y_k}{k!}-\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{k-j}h^{k-j}\alpha_j, & k\ge 1.\end{cases}$$

其中，y_k 满足(1.8)，定理得证。

通过指数型完全 Bell 多项式 Y_n 的定义(1.6)我们可以容易地计算出 α_k。下面我们列出 α_k 的前几项：

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=-\frac{r}{1800},\ \alpha_2=\frac{r(r-3600h)}{6480000},\ \alpha_3=\frac{r\left(98hr-176400h^2-11400\right)}{317520000}.$$

将 h 和 r 取特殊值，我们可以得到一系列有关 Glaisher-Kinkelin 常数 A 的类似常数 B 和 $1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}$ 的渐近展开。下面我们举出几个例子。

3. 例子

令 $h=0$，r 分别取 1，2，3，当 $n\to\infty$ 时，我们有：

$$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}\sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\left(1-\frac{1}{1800n}+\frac{1}{6480000n^2}-\frac{57}{1587600n^3}+\cdots\right),$$

$$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}\sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\left(1-\frac{1}{900n}+\frac{1}{1620000n^2}-\frac{57}{793800n^3}+\cdots\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$1^{1^2}2^{2^2}\cdots n^{n^2}\sim B\cdot n^{\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{n^3}{9}+\frac{n}{12}}\left(1-\frac{1}{600n}+\frac{1}{720000n^2}-\frac{57}{529200n^3}+\cdots\right)^{\frac{1}{3}}.$$

基金项目

国家自然科学基金/Natural Science Foundation of China (11501081)，省级大学生创新创业训练计划项目(项目编号：S201612026050)，中央高校基本科研基金(DC201502050405)。

参考文献 (References)

[1] Chen, C.-P. (2012) Glaisher-Kinkelin Constant. *Integral Transforms and Special Functions*, **23**, 785-792. https://doi.org/10.1080/10652469.2011.632501

[2] Wang, W.P. and Liu, H.M. (2016) Asymptotic Expansions Related to Hyperfactorial Function and Glaisher-Kinkelin Constant. *Applied Mathematics and Computation*, **283**, 153-162. https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.02.027

[3] Comtet, L. (1974) Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.

https://doi.org/10.1007/978-94-010-2196-8

[4] Riordan, J. (2002) An Introduction to Combinatorial Analysis. Dover Publications, Inc., Mineola, NY. Reprint of the 1958 Original.

[5] Rota Bulo, S., Hancock, E.R., Aziz, F. and Pelillo, M. (2012) Efficient Computation of Ihara Coefficients Using the Bell Polynomial Recursion. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 1436-1441. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.08.017