Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(2), 188-201
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62022

Dynamic Analysis of an Impulsive Controlled Biological System with Seasonal Effect

He Liu

Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang
Email: liuhe900418@163.com

Received: Mar. 11th, 2017; accepted: Mar. 27th, 2017; published: Mar. 30th, 2017

Abstract

In this paper, firstly, on the basis of ecology theory and mathematical biology knowledge, an impulsive controlled biological dynamical system with seasonal effect has been established by introducing Hassell-Varley functional response in the process of dynamic modeling. Secondly, using the Floquet theory and comparison theorem of impulsive differential equations, the existence, local asymptotic stability and global asymptotic stability of the semi-trivial periodic solution have been analyzed, and then the extinction and permanence of biological populations in the system have also been discussed. Finally, all those results can provide some theoretical support for further researching how to utilize control strategy to maintain the survival of ecological populations.

Keywords

Seasonal Effect, Floquet Theory, Semi-Trivial Periodic Solution, Permanence, Stability

一类具有季节效应的脉冲控制生物系统动力学研究

刘　贺

温州大学，浙江 温州
Email: liuhe900418@163.com

收稿日期：2017年3月11日；录用日期：2017年3月27日；发布日期：2017年3月30日

文章引用: 刘贺. 一类具有季节效应的脉冲控制生物系统动力学研究[J]. 应用数学进展, 2017, 6(2): 188-201.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62022

摘　要

基于生态学理论与数学生物学知识，在动态建模过程中加入了Hassell-Varley功能反应函数，建立了一类具有季节效应的脉冲控制生物动力系统。借助脉冲微分方程的Floquet定理与比较定理，分析了系统半平凡周期解的存在性、局部渐近稳定性和全局渐近稳定性，同时讨论了系统生物种群的灭绝性与持久生存性。这些研究结果为进一步研究如何运用脉冲控制策略维持生态种群持久生存提供了一定的理论支撑。

关键词

季节效应，Floquet定理，半平凡周期解，持久生存，稳定性

1. 引言

众所周知，捕食者种群与食饵种群之间的捕食作用关系是生态种群之间最基本作用关系之一，作用过程具有复杂动态特性和随机不确定性[1]。此外，捕食者种群与食饵种群捕食作用关系一直并将继续在生态学和生物数学中占据主导地位[2] [3]。如何刻化这类捕食动态过程至关重要，目前大多数研究专家利用捕食者种群的功能反应函数来描述[4] [5] [6] [7]。1969年，Hassell和Varley [8]首先发现捕食者种群之间的干扰行为可以影响捕食效率的实验证据，并提出了现在被称作Hassell-Varley型功能反应函数，这类功能反应函数可以表示如下：

$$f(N,P)=\frac{aNP}{N+bP^{\gamma}}.$$

其中 N 和 P 分别代表食饵种群和捕食者种群密度，a 表示捕食者种群搜索食饵种群的效率，$b(>0)$ 表示食饵种群生物量转化为捕食者种群生物量的转化率，$\gamma(0\le\gamma\le1)$ 称为Hassell-Varley常数[8]，用来表示捕食者种群之间的干扰。若 $\gamma=1$，即捕食者种群没有形成群体，则该模型就变为比率型捕食者－食饵系统；若 $\gamma=0$，即捕食者种群之间没有干扰，则该模型就变为Michaelis-Menten型(或是Holling type II 型)捕食者－食饵系统。文献[9] [10] [11]已经研究了几类带有Hassell-Varley型功能反应的捕食-食饵系统，获得了一些比较好的结果。

自然生物种群受到周期性变化的自然环境的影响，就会本能地改变自己的生活习惯，例如季节迁徙现象和生物的不同季节的繁殖现象，因此研究受到周期性扰动的生态系统的动力学性态问题是十分重要的[12]。同时，在现实自然界中，生物种群自身的生长即不是连续的也不是离散的，而是两种并行存在的[13] [14] [15]。此外人类对自然资源的管理与开发利用都是离散的，而且还是瞬间完成的，从而在瞬间时刻也破坏了原有生态种群的固有状态，因此把这种瞬间扰动用脉冲微分方程来表示生物系统的数学模型更加符合实际[16]-[21]。文献[22] [23]详细介绍了脉冲微分方程理论以及它在现实其它学科中的运用，为后期做研究提供了宝贵的数学基础与依据。文献[24] [25] [26] [27] [28]详细研究了以时间作为实施脉冲控

制取得的成果，证明了带有脉冲扰动的生物系统的半平凡周期解的存在性、局部渐近稳定性和全局渐近稳定性以及有界性和保持生态种群持久生存的关键条件；同时通过数值模拟显示系统所具有的特定动力学性态。

根据以上讨论，在这篇文章中考虑带有Hassell-Varley功能反应和季节效应的三种群脉冲动力学系统：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}&=r_1\left(1+d_1\sin(\omega t)\right)x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K_1}\right)-\frac{a_1x(t)y(t)}{x(t)+b_1y^{\gamma_1}(t)}-\frac{a_2x(t)z(t)}{x(t)+b_2z^{\gamma_2}(t)}\\ \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}&=r_2\left(1+d_2\sin(\omega t+\varphi)\right)y(t)\left(1-\frac{y(t)}{K_2}\right)+\frac{e_1a_1x(t)y(t)}{x(t)+b_1y^{\gamma_1}(t)}-\frac{a_3y(t)z(t)}{y(t)+b_3z^{\gamma_3}(t)}\\ \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{e_2a_2x(t)z(t)}{x(t)+b_2z^{\gamma_2}(t)}+\frac{e_3a_3y(t)z(t)}{y(t)+b_3z^{\gamma_3}(t)}-mz(t)\end{aligned}\right\} & t\neq nT,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x(t)&=0\\ \Delta y(t)&=0\\ \Delta z(t)&=-\delta z(t)+p\end{aligned}\right\} & t=nT,\end{cases}\tag{1.1}$$

其中 $x(t),y(t)$ 和 $z(t)$ 分别表示食饵、中级捕食者和高级捕食者在时刻 t 的种群密度。$\Delta x(t)=x(t^+)-x(t),\Delta y(t)=y(t^+)-y(t),\Delta z(t)=z(t^+)-z(t)$。假设所有参数都是正数。$a_i\,(i=1,2,3)$ 表示捕食者搜索食饵的效率；$e_i\,(i=1,2,3)$ 表示食饵生物量转化为捕食者生物量的转化率；$K_i\,(i=1,2)$ 表示环境最大容纳量；$b_i\,(i=1,2,3)$ 表示半饱和常数；m 表示高级捕食者的死亡率；T 表示脉冲效应周期；$p>0$ 表示在 $t=nT$ 时刻，高级捕食者的释放量或储存量；$\delta>0$ 表示在固定时刻 $t=nT$ 的收获率；r_1 和 r_2 分别表示内禀增长率 $r_1(t)$ 与 $r_2(t)$ 的平均值；ω 表示季节扰动的角频率；参数 $d_i\,(1,2)(0\le d_i\le 1)$ 表示季节周期性振荡的强度。r_1d_1 和 r_2d_2 是内禀增长函数的扰动最大量，参数 φ 是平面三角度，其中 $0\le\varphi\le 2\pi$。当 $\varphi=0$ 时，表示食饵 x 与中级捕食者 y 的内禀增长率是同步受季节扰动的；当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ 时，表示食饵 x 与中级捕食者 y 的内禀增长率是异步受季节扰动的；当 $\varphi=\pi$ 时，表示食饵 x 与中级捕食者 y 的内禀增长率是反同步受季节扰动的。

首先假设 $\sin(\omega t)=\sin(\omega t+\varphi)=1$ 代入公式(1.1)，能够得到下面的辅助系统：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}&=r_1(1+d_1)x_1(t)\left(1-\frac{x_1(t)}{K_1}\right)-\frac{a_1x_1(t)y_1(t)}{x_1(t)+b_1y_1^{\gamma_1}(t)}-\frac{a_2x_1(t)z_1(t)}{x_1(t)+b_2z_1^{\gamma_2}(t)}\\ \frac{\mathrm{d}y_1(t)}{\mathrm{d}t}&=r_2(1+d_2)y_1(t)\left(1-\frac{y_1(t)}{K_2}\right)+\frac{e_1a_1x_1(t)y_1(t)}{x_1(t)+b_1y_1^{\gamma_1}(t)}-\frac{a_3y_1(t)z_1(t)}{y_1(t)+b_3z_1^{\gamma_3}(t)}\\ \frac{\mathrm{d}z_1(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{e_2a_2x_1(t)z_1(t)}{x_1(t)+b_2z_1^{\gamma_2}(t)}+\frac{e_3a_3y_1(t)z_1(t)}{y_1(t)+b_3z_1^{\gamma_3}(t)}-mz_1(t)\end{aligned}\right\} & t\neq nT,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x_1(t)&=0\\ \Delta y_1(t)&=0\\ \Delta z_1(t)&=-\delta z_1(t)+p\end{aligned}\right\} & t=nT,\end{cases}\tag{1.2}$$

假设 $\sin(\omega t)=\sin(\omega t+\varphi)=-1$ 代入公式(1.1)，能够得到下面的辅助系统：

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}&=r_1(1-d_1)\left(1-\frac{x_2(t)}{K_1}\right)-\frac{a_1x_2(t)y_2(t)}{x_2(t)+b_1y_2^{\gamma_1}(t)}-\frac{a_2x_2(t)z_2(t)}{x_2(t)+b_2z_2^{\gamma_2}(t)}\\ \frac{\mathrm{d}y_2(t)}{\mathrm{d}t}&=r_2(1-d_2)\left(1-\frac{y_2(t)}{K_2}\right)+\frac{e_1a_1x_2(t)y_2(t)}{x_2(t)+b_1y_2^{\gamma_1}(t)}-\frac{a_3y_2(t)z_2(t)}{y_2(t)+b_3z_2^{\gamma_3}(t)}\\ \frac{\mathrm{d}z_2(t)}{\mathrm{d}t}&=\frac{e_2a_2x_2(t)z_2(t)}{x_2(t)+b_2z_2^{\gamma_2}(t)}+\frac{e_3a_3y_2(t)z_2(t)}{y_2(t)+b_3z_2^{\gamma_3}(t)}-mz_2(t)\end{aligned}\right\} & t\neq nT,\\ \left.\begin{aligned}\Delta x_2(t)&=0\\ \Delta y_2(t)&=0\\ \Delta z_2(t)&=-\delta z_2(t)+p\end{aligned}\right\} & t=nT,\end{cases}\tag{1.3}$$

这个生态系统表示食饵种群、中级捕食者种群和高级捕食者种群生活在一个生活格局中，高级捕食者种群主要依靠捕食食饵种群和中级捕食者种群而获得生存的物质能力，中级捕食者种群也捕食食饵种群获得生存的物质能量，但是中级捕食者种群也会从其他地方获得生存的物质能量。因为高级捕食者种群密度过高与过低都会影响其他两类种群密度的变化，为了维持三种群持久生存，在固定时间对高级捕食者种群进行一定量捕杀，减少成年高级捕食者种群的数量，以至于促进自然资源更好的繁衍生息。同时释放一定量的幼年高级捕食者种群，以防止食饵种群和中级捕食者种群繁衍太快，产生内部竞争过大、或者其他自然资源走向灭绝。

2. 基础知识与主要引理

定义 2.1：设 $R_+=[0,\infty)$ 和 $R_+^3=\left\{X\in R^3\,|\,X\geq 0\right\}$。定义 N 是所有非负数的集合，$f=(f_1,f_2,f_3)$ 表示系统(1.1)的一个映射。设 $V:R_+\times R_+^3\to R_+$，那么 V 属于 V_0 类，其中 V_0 满足以下条件：

1) 对 $\forall X\in R_+^3, n\in N$，$\lim_{(t,y)\to(nT,X)}V(t,y)=V(nT^+,X)$ 存在，那么 V 在 $(nT,(n+1)T]\times R_+^3$ 上是连续的。

2) V 在 X 上满足局部 Lipschitzian。

定义2.2 [19] [26] [30] [32] [33] 设 $V\in V_0$，那么 $\forall(t,X)=(nT,(n+1)T]\times R_+^3$，定义系统(1.1)右导数 $V(t,X)$ 为

$$D^+V(t,X)=\lim_{h\to 0}\sup\frac{1}{h}\left[V(t+h,X+hf(t,X))-V(t,X)\right].$$

系统(1.1)的任意解 $X(t)$ 在 $(nT,(n+1)T]\,(n\in N)$ 上是连续的，并且 $X(nT^+)=\lim_{t\to nT}X(t)$ 是一定存在的，那么系统(1.1)的任意解是连续分段光滑的。根据文献[29]-[31]，映射 f 的光滑性可以保证系统(1.1)的解是唯一存在的。

定义2.3：如果存在一个紧集 $\Omega\subset\operatorname{int}R_+^3$，系统(1.1)的任意解 $X(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 都最终进入或者驻留在紧集 Ω 内，那么称系统(1.1)是持久存在的。

引理2.1　如果 $X(t)$ 是系统(1.1)的任意解，其初始值为 $X(0^+)\geq 0$，那么 $\forall t\geq 0$，就有 $X(t)\geq 0$。进一步讲，如果 $X(0^+)>0$，就有 $X(t)>0, t>0$。

引理2.2　(Lakshmikantham, 1989 [29])。**假设 $V\in V_0$ 并且**

$$\begin{cases}D^+V(t,X)\leq g(t,V(t,X)), & t\neq nT,\\ V(t,X(t^+))\leq\Psi_n(V(t,X)), & t=nT,\end{cases}\tag{2.1}$$

其中 $g:R_+\times R_+\to R$ 在 $(nT,(n+1)T]\times R_+$ 上是连续的，且对 $\forall u\in R_+, n\in N$，$\lim_{(t,v)\to(nT,u)}g(t,v)=g(nT^+,u)$

是存在的，$\Psi_n : R_+ \to R_+$ 是单调不减函数。设 $r(t)$ 是脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = g(t, u(t)), & t \neq nT, \\ u(t^+) = \Psi_n(u(t)), & t = nT, \\ u(0^+) = u_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

在 $[0, +\infty)$ 上的最大解，那么 $V(0^+, X_0) \le u_0$，由此可得 $V(t, X(t)) \le r(t), t \ge 0$。其中 $X(t)$ 是系统(1.1)的任意解。

如果引理中的不等式条件反过来，那么可得出相类似的结果。特别注意的是如果 $g(t, u(t))$ 的条件是光滑的，那么系统(2.2)的解是存在且唯一的，那么 $r(t)$ 是系统(2.2)的唯一解。

现在假设种群 x 和种群 y 是灭绝的，则系统(1.1)就变成子系统(2.3)。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = -mz(t), & t \neq nT, \\ z(t^+) = (1-\delta)z(t) + p, & t = nT, \\ z(0^+) = z_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

可求得子系统(2.3)的周期解 $z^*(t) = \dfrac{p\exp(-m(t-nT))}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}, t \in (nT, (n+1)T], n \in N$，其中初始值为 $z^*(0^+) = \dfrac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}$。进一步可求得子系统(2.3)任意解与周期解之间的关系，即为 $z(t) = (1-\delta)^n \left(z(0^+) - \dfrac{p}{(1-(1-\delta)\exp(-mT))} \right) \exp(-mt) + z^*(t)$，其中初始值为 $z_0 = z(0^+) \ge 0$，$t \in (nT, (n+1)T], n \in N$。

引理 2.3 **设 $z^*(t)$ 和 $z(t)$ 分别是子系统(2.3)的正周期解与任意解，其中初始值为 $z_0 \ge 0$，则当 $t \to \infty$ 时，有 $|z(t) - z^*(t)| \to 0$。**

由引理 2.3 得知，当 t 充分大时，任意解 $z(t)$ 趋近于子系统(2.3)的正周期解 $z^*(t)$。因而系统(1.1)的半平凡周期解可写为

$$(0, 0, z^*(t)) = \left(0, 0, \frac{p\exp(-m(t-nT))}{1-(1-\delta)\exp(-mT)} \right).$$

为了研究半平凡周期解的稳定性，给出了具有周期 T 线性脉冲方程的 Floquet 定理：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)x(t), & t \neq t_k, t \in R \\ x(t^+) = x(t) + B_k x(t), & t = t_k, k \in Z. \end{cases} \tag{2.4}$$

满足以下条件(H):

(H1) $A(\cdot) \in PC(R, C^{n\times n})$ 与 $A(t+T) = A(t)(t \in R)$，其中 $PC(R, C^{n\times n})$ 是在 $t = t_k$ 时刻所有左连续的分段光滑连续矩阵函数的集合，$C^{n\times n}$ 是所有 $n \times n$ 矩阵的集合；

(H2) $B_k \in C^{n\times n}$，$\det(E + B_k) \neq 0, t_k \le t_{k+1} (k \in Z)$；

(H3) 存在某个数 $q \in N$ 使得 $B_{k+q} = B_k, t_{k+q} = t_k + T (k \in Z)$。

设 $\Phi(t)$ 为方程(2.4)的基本矩阵，那么存在唯一一个非奇异矩阵 $M \in C^{n\times n}$ 使得

$$\Phi(t+T)=\Phi(t)M\,(t\in R). \tag{2.5}$$

对于等式(2.5)，其相对应的基本矩阵 $\Phi(t)$ 和常数矩阵或是系统(2.4)的单值矩阵 M 。

系统(2.4)的所有单值矩阵都是相似的并且有相同的特征值。单值矩阵的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 称之为系统(2.4) Floquet 因子。

引理 2.4 (Floquet 定理[26] [31] [32] [33]) 设条件(H1)~(H3)成立。那么具有周期 T 的线性脉冲方程(2.4)是

1) 稳定的当且仅当系统(2.4)的所有因子 $\mu_j(1,2,\cdots,n)$ of (2.4)满足不等式 $|\mu_j|\le 1$，而且，对于这些 μ_j，$|\mu_j|=1$，那么对应的是简单的初等因子；

2) 渐近稳定的当且仅当系统(2.4)的所有因子 $\mu_j(1,2,\cdots,n)$ 满足不等式 $|\mu_j|<1$；

3) 不稳定的，如果对于某些 $j=1,2,\cdots,n$，不等式 $|\mu_j|>1$。

3. 数学分析

现在研究半平凡周期解 $\left(0,0,z^*(t)\right)=\left(0,0,\dfrac{p\exp\left(-m(t-nT)\right)}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)$ 的局部渐近稳定性和全局渐近稳定性。

定理 3.1 设 $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ 是系统(1.1)的任意解，如果

$$r_1(1+d_1)T+\frac{a_2}{b_2}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_2}\frac{1}{m(1-\gamma_2)}\left(\exp\left(-m(1-\gamma_2)T\right)-1\right)<0$$

与

$$r_2(1+d_2)T+\frac{a_3}{b_3}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_3}\frac{1}{m(1-\gamma_3)}\left(\exp\left(-m(1-\gamma_3)T\right)-1\right)<0$$

成立，那么，系统(1.1)的半平凡周期解 $\left(0,0,z^*(t)\right)$ 是局部渐近稳定的。

证明：首先，为了证明周期解 $\left(0,0,z^*(t)\right)$ 的局部渐近稳定性，考虑辅助系统(1.2)，那么，根据引理2.2，可得 $0\le x(t)\le x_1(t), 0\le y(t)\le y_1(t)$ 和 $0\le z(t)\le z_1(t)$，其中 $\left(x(t),y(t),z(t)\right)$ 与 $x_1(t),y_1(t),z_1(t)$ 分别是系统(1.1)和(1.2)的任意解。因此只需证明系统(1.2)的周期解 $\left(0,0,z_1^*(t)\right)$ 局部渐近稳定即可，其中 $z_1^*(t)=z^*(t)$。考虑任意解的微扰为

$$x_1(t)=u(t),\ \ y_1(t)=v(t),\ \ z_1(t)=w(t)+z_1^*(t). \tag{2.6}$$

结合公式(2.6)和公式(1.2)，通过线性化表示，系统变为

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\left(r_1(1+d_1)-\dfrac{a_2}{b_2}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_2}(t)\right)u(t)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=\left(r_2(1+d_2)-\dfrac{a_3}{b_3}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_3}(t)\right)v(t)\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}w(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e_2a_2}{b_2}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_2}(t)u(t)+\dfrac{e_3a_3}{b_3}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_3}(t)v(t)-mw(t)\end{array}\right\} & t\ne nT,\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\Delta u(t)=0\\ \Delta v(t)=0\\ \Delta w(t)=-\delta w(t)\end{array}\right\} & t=nT.\end{cases} \tag{2.7}$$

因此

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix},\ 0 \le t < T,$$

其中 $\Phi(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} r_1(1+d_1) - \frac{a_2}{b_2}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_2}(t) & 0 & 0 \\ 0 & r_2(1+d_2) - \frac{a_3}{b_3}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_3}(t) & 0 \\ \frac{e_2 a_2}{b_2}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_2}(t) & \frac{e_3 a_3}{b_3}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_3}(t) & -m \end{pmatrix} \Phi(t)$$

$\Phi(0) = I$， I 是单位矩阵并且

$$\begin{pmatrix} u(nT^+) \\ v(nT^+) \\ w(nT^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(nT) \\ v(nT) \\ w(nT) \end{pmatrix}.$$

则半平凡周期解 $\left(0,0,z^*(t)\right)$ 的稳定性是由矩阵

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta \end{pmatrix} \Phi(T)$$

的特征值决定。

如果所有 Θ 特征值的绝对值不超过 1，那么半平凡周期解 $\left(0,0,z^*(t)\right)$ 是局部渐近稳定的。因此，对于 Θ 的所有特征值，即

$$\begin{aligned} u_1 &= \exp\left(\int_0^T \left(r_1(1+d_1) - \frac{a_2}{b_2}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_2}(t)\right)\mathrm{d}t\right), \\ u_2 &= \exp\left(\int_0^T \left(r_2(1+d_2) - \frac{a_3}{b_3}\left(z_1^*\right)^{1-\gamma_3}(t)\right)\mathrm{d}t\right), \\ u_3 &= (1-\delta)\exp(-mT) < 1. \end{aligned}$$

根据引理 2.4，如果 $|u_1| < 1$ 与 $|u_2| < 1$， $\left(0,0,z^*(t)\right)$ 是局部渐近稳定的。即

$$r_1(1+d_1)T + \frac{a_2}{b_2}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_2} \frac{1}{m(1-\gamma_2)}\left(\exp\left(-m(1-\gamma_2)T\right)-1\right) < 0$$

与

$$r_2(1+d_2)T + \frac{a_3}{b_3}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_3} \frac{1}{m(1-\gamma_3)}\left(\exp\left(-m(1-\gamma_3)T\right)-1\right) < 0\,.$$

定理证明完毕。

下面证明系统(1.1)任意解的一致有界性。

定理 3.2 对于足够大的 t，一定存在一个常数 $M > 0$ 使得对系统(1.1)的任意解 $X(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$，都有 $x(t) \le M, y(t) \le M, z(t) \le M$ 。

证明：设 $V(t,X(t))=e_2x(t)+e_3y(t)+z(t)$，很显然 $V\in V_0$。计算 $V(t,X)$ 的右导数，可得

$$\begin{cases} D^+V(t)+LV(t)=\left(r_1(1+d_1\sin(\omega t))+L\right)e_2x(t)-\dfrac{e_2r_1(1+\sin(\omega t))}{K_1}x^2(t) \\ \qquad +\left(r_2(1+d_2\sin(\omega t+\varphi))+L\right)e_3y(t)-\dfrac{e_3r_2(1+d_2\sin(\omega t+\varphi))+L}{K_2} \\ \qquad +(L-m)z(t)+\dfrac{a_1x(t)y(t)}{x(t)+b_1y^{\gamma_1}(t)}(e_1e_3-e_2) & t\neq nT, \\ V(t^+)=e_2x(t)+e_3y(t)+(1-\delta)z(t)+p\le V(t)+p & t=nT. \end{cases} \tag{2.8}$$

设 $L-m<0,e_1e_3-e_2<0$，那么 $D^+V(t)+LV(t)$ 是有界的。选择适当的 L_1 与 L_2 使得

$$\begin{cases} D^+V(t)=-L_1V(t)+L_2, & t\neq nT, \\ V(t^+)=V(t)+p, & t=nT, \end{cases}$$

其中 L_1,L_2 是两个正数。

由引理 2.2，易得

$$V(t)\le\left(V(0^+)-\frac{L_2}{L_1}\right)\exp(-L_1t)+\frac{p(1-\exp(-nL_1T))}{\exp(L_1T)-1}\exp(L_1T)\exp(-L_1(r-nT))+\frac{L_2}{L_1},$$

其中 $t\in(nT,(n+1)T]$。因此

$$\lim_{t\to\infty}V(t)\le\frac{L_2}{L_1}+\frac{p\exp(L_1T)}{\exp(L_1T)-1}$$

所以 $V(t,X(t))$ 是一致有界的。这个结果也暗含了系统(1.1)的任意解也是有界的。

定理 3.3 设 $(x(t),y(t),z(t))$ 是系统(1.1)的任意解，如果

$$r_1(1+d_1)T+\frac{a_2}{b_2}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_2}\frac{1}{m(1-\gamma_2)}\left(\exp(-m(1-\gamma_2)T)-1\right)<0$$

$$r_2(1+d_2)T+\frac{a_3}{b_3}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_3}\frac{1}{m(1-\gamma_3)}\left(\exp(-m(1-\gamma_3)T)-1\right)<0,$$

与

$$p\ge\max\left\{\frac{r_1(1+d_1)mT}{a_2}\left(M+b_2M^{\gamma_2}\right),\frac{r_2(1+d_2)mT}{a_3}\left(M+b_3M^{\gamma_3}\right)\right\}$$

成立，那么半平凡周期解 $(0,0,z^*(t))$ 是全局渐近稳定性的。

证明 根据定理 3.1，易得 $(0,0,z^*(t))$ 是局部渐近稳定的。下面只需证明 $(0,0,z^*(t))$ 是全局吸引即可。设 $V(t)=e_1x(t)+y(t)$，则有

$$V'\big|_{(1.1)}=e_1r_1(1+d_1\sin(\omega t))x(t)\left(1-\frac{x(t)}{K_1}\right)+r_2(1+d_2\sin(\omega t+\varphi))y(t)\left(1-\frac{(t)}{K_2}\right)$$
$$-\frac{e_1a_2x(t)z(t)}{x(t)+b_2z^{\gamma_2}(t)}-\frac{a_3y(t)z(t)}{y(t)+b_3z^{\gamma_3}(t)}$$

根据定理 3.2，对于足够大的时间t，存在一个常数$M>0$使得对系统(1.1)的任意解$X(t)=(x(t),y(t),z(t))$都有$x(t)\le M, y(t)\le M, z(t)\le M$。因此

$$V'\big|_{(1.1)}\le e_1r_1(1+d_1)x(t)-\frac{e_1a_2x(t)z(t)}{M+b_2M^{\gamma_2}}+r_2(1+d_2)y(t)-\frac{a_3y(t)z(t)}{M+b_3M^{\gamma_3}}.$$

易得

$$\begin{cases}\dfrac{dz(t)}{dt}=\dfrac{e_2a_2x(t)z(t)}{x(t)+z^{\gamma_2}(t)}+\dfrac{e_3a_3y(t)z(t)}{y(t)+z^{\gamma_3}(t)}-mz(t)\ge -mz(t), & t\ne nT,\\ \Delta z(t)=p & t=nT.\end{cases}\tag{2.9}$$

由引理 2.2 与 2.3 知道，存在某一时刻$t_1>0$和充分小的$\varepsilon>0$，当$\forall t\ge t_1$，使得$z(t)\ge z^*(t)-\varepsilon$。

设$\eta\triangleq\dfrac{p\exp(-mT)}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}-\varepsilon$，

那么

$$V'\big|_{(1.1)}\le\left(e_1r_1(1+d_1)-\frac{e_1a_2\eta}{M+b_2M^{\gamma_2}}\right)x(t)+\left(r_2(1+d_2)-\frac{a_3\eta}{M+b_3M^{\gamma_3}}\right)y(t),$$

如果$e_1r_1(1+d_1)-\dfrac{e_1a_2\eta}{M+b_2M^{\gamma_2}}<0$与$r_2(1+d_2)-\dfrac{a_3\eta}{M+b_3M^{\gamma_3}}<0$，即

$$p\ge\max\left\{\frac{r_1(1+d_1)mT}{a_2}\left(M+b_2M^{\gamma_2}\right),\frac{r_2(1+d_2)mT}{a_3}\left(M+b_3M^{\gamma_3}\right)\right\}.$$

因此$t\ge t_1$，则有

$$V'\big|_{(1.1)}\le\left(e_1r_1(1+d_1)-\frac{e_1a_2\eta}{M+b_2M^{\gamma_2}}\right)x(t)+\left(r_2(1+d_2)-\frac{a_3\eta}{M+b_3M^{\gamma_3}}\right)y(t)<0.$$

因此当$t\to\infty$时，$V(t)\to0$，$x(t)\to0$，$y(t)\to0$。因此半平凡周期解$(0,0,z^*(t))$是全局吸引子。从而半平凡周期解$(0,0,z^*(t))$是全局渐近稳定的。

推论 1 **设**$(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$**是系统(1.2)的任意解，如果**

$$r_1(1+d_1)T+\frac{a_2}{b_2}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_2}\frac{1}{m(1-\gamma_2)}\left(\exp(-m(1-\gamma_2)T)-1\right)<0$$

$$r_2(1+d_2)T+\frac{a_3}{b_3}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_3}\frac{1}{m(1-\gamma_3)}\left(\exp(-m(1-\gamma_3)T)-1\right)<0,$$

与

$$p\ge\max\left\{\frac{r_1(1+d_1)mT}{a_2}\left(M+b_2M^{\gamma_2}\right),\frac{r_2(1+d_2)mT}{a_3}\left(M+b_3M^{\gamma_3}\right)\right\}$$

成立，那么半平凡周期解$(0,0,z_1^*(t))$**是全局渐近稳定的，其中**$z_1^*(t)=z^*(t)$。

推论 2 **设**$(x_2(t),y_2(t),z_2(t))$**是系统(1.2)的任意解，如果**

$$r_1(1-d_1)T+\frac{a_2}{b_2}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_2}\frac{1}{m(1-\gamma_2)}\left(\exp(-m(1-\gamma_2)T)-1\right)<0$$

$$r_2(1-d_2)T+\frac{a_3}{b_3}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_3}\frac{1}{m(1-\gamma_3)}\left(\exp(-m(1-\gamma_3)T)-1\right)<0,$$

与

$$p\geq\max\left\{\frac{r_1(1-d_1)mT}{a_2}\left(M+b_2M^{\gamma_2}\right),\frac{r_2(1-d_2)mT}{a_3}\left(M+b_3M^{\gamma_3}\right)\right\}$$

成立，半平凡周期解$\left(0,0,z_2^*(t)\right)$是全局渐近稳定的，其中$z_2^*(t)=z^*(t)$。

现在研究系统(1.1)的持久生存性。

定理 3.4 如果

$$r_1(1-d_1)T+\frac{a_2}{b_2}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_2}\frac{1}{m(1-\gamma_2)}\left(\exp(-m(1-\gamma_2)T)-1\right)<0,$$

$$r_2(1-d_2)T+\frac{a_3}{b_3}\left(\frac{p}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}\right)^{1-\gamma_3}\frac{1}{m(1-\gamma_3)}\left(\exp(-m(1-\gamma_3)T)-1\right)<0$$

与

$$p\leq\min\left\{\frac{r_1(1-d_1)mT}{a_2}\left(M+b_2M^{\gamma_2}\right),\frac{r_2(1-d_2)mT}{a_3}\left(M+b_3M^{\gamma_3}\right)\right\}$$

成立，那么系统(1.1)是持久生存的。

证明：为了完成定理的证明，首先考虑辅助系统(1.3)，根据引理 2.2，易得

$$x(t)\geq x_2(t),\quad y(t)\geq y_2(t).\quad z(t)\geq z_2(t).$$

其中$\left(x(t),y(t),z(t)\right)$和$\left(x_2(t),y_2(t),z_2(t)\right)$分别是系统(1.1)和(1.3)的任意解。

假设$X_2(t)=\left(x_2(t),y_2(t),z_2(t)\right)$的系统(1.3)的任意解，其初始值为$X_2(0)>0$。由定理 3.2，假设对$\forall t\geq0$，有

$$x_2(t)\leq M,\ y_2(t)\leq M,\ z_2(t)\leq M.$$

由引理 2.2，存在参数$t_1>0$和充分小的ε使得

$$\forall t>t_1,\ z(t)>z^*(t)-\varepsilon.$$

那么对于充分大的时间t，有

$$z(t)\geq\frac{p\exp(-mT)}{1-(1-\delta)\exp(-mT)}-\varepsilon\triangleq\zeta_1.$$

因此，对于充分大的时间t，只需找到ζ_2与ζ_3使得$x_2(t)\geq\zeta_2$与$y_2(t)\geq\zeta_3$即可。

选择$\zeta_2>m$和充分小的$\varepsilon_1>0$使得$\alpha\equiv\frac{e_2a_2\zeta_2}{\zeta_2+b_2\zeta_1^{\gamma_2}}+\frac{e_3a_3M}{M+b_2\zeta_1^{\gamma_3}}<m$，并记

$$\eta_1\triangleq\exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\left[r_1(1-d_1)\left(1-\frac{\zeta_2}{K_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}M^{1-\gamma_1}-\frac{a_2}{b_2}\left(v_3^*(t)+\varepsilon_1\right)^{1-\gamma_2}\right]\right)\mathrm{dt}\right)>1,$$

其中$v_3^*(t)=\frac{p\exp\left((-m+\alpha)(t-nT)\right)}{1-(1-\delta)\exp\left((-m+\alpha)T\right)},t\in\left(nT,(n+1)T\right],n\in N.$

现在证明对任意的时间 t， $x_2(t)<\zeta_2$ 不成立。否则，可以得到

$$\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\le(-m+\alpha)z(t).$$

根据引理 2.2 与 2.1，当 $t\to\infty$ 时，易知 $z(t)\le v_3(t)$， $v_3(t)\to v_3^*(t)$，其中 $v_3(t)$ 是

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v_3(t)}{\mathrm{d}t}=(-m+\alpha)v_3(t), & t\ne nT,\\ v_3(t^+)=v_3(t)+p, & t=nT,\\ v_3(0^+)=z_0.\end{cases}\tag{2.10}$$

的解。因此，存在一个 $T_1>0$ 使得 $z_2(t)\le v_3(t)<v_3^*(t)+\varepsilon_1$ 且

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}\ge x_2(t)\left[r_1(1-d_1)\left(1-\frac{\zeta_2}{K_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}M^{1-\gamma_1}-\frac{a_2}{b_2}\left(v_3^*(t)+\varepsilon_1\right)^{1-\gamma_2}\right].\tag{2.11}$$

设 $N_1\in N$ 及 $N_1T\ge T_2>T_1$ 并在 $t\in(nT,(n+1)T],n\ge N_1$ 上积分(2.11)，易得

$$\begin{aligned}x_2((n+1)T)&\ge x_2(nT^+)\exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\left[r_1(1-d_1)\left(1-\frac{\zeta_2}{K_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}M^{1-\gamma_1}-\frac{a_2}{b_2}\left(v_3^*(t)+\varepsilon_1\right)^{1-\gamma_2}\right]\right)\mathrm{d}t\right)\\&=x_2(nT)\exp\left(\int_{nT}^{(n+1)T}\left(\left[r_1(1-d_1)\left(1-\frac{\zeta_2}{K_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}M^{1-\gamma_1}-\frac{a_2}{b_2}\left(v_3^*(t)+\varepsilon_1\right)^{1-\gamma_2}\right]\right)\mathrm{d}t\right)\\&=x_2(nT)\eta_1\end{aligned}\tag{2.12}$$

那么，当 $k\to\infty$ 时，得到 $x_2((N_1+k)T)\ge x_2(N_1T)\eta_1^k\to\infty$，这与 $x_2(t)$ 有界相矛盾。因此，存在一个 $t_1>0$ 使得 $x_2(t_1)\ge\zeta_2$。

第二，如果 $\forall t\ge t_1$，有 $x_2(t)\ge\zeta_2$，那么就得到上面的结论。因此，只需考虑这些解不落入区域 $R=\{x_2(t):x_2(t)<\zeta_2\}$。设 $t^*=\inf_{t\ge t_1}\{x_2(t)<\zeta_2\}$，易得 $x_2(t)\ge\zeta_2,t\in(t,t^*)$ 与 $t^*\in(n_1T,(n_1+1)T],n_1\in N$。由于 $x_2(t)$ 是连续的，很容易就能证明 $x_2(t^*)=\zeta_2$。

可以断言一定存在一个 $t_2\in((n_1+1)T,(n_1+1)T+T']$ 使得 $x_2(t)\ge\zeta_2$，否则，

$$x_2(t)<\zeta_2,t_2\in((n_1+1)T,(n_1+1)T+T'],T'=n_2T+n_3T.$$

选择适当的 $n_2,n_3\in N$ 使得 $(n_2-1)T>\dfrac{\ln\left(\dfrac{\varepsilon_1}{M+p}\right)}{-m+\alpha}$ 及 $\exp(\beta(n_2+1)T)\eta_1^n>1$，其中

$$\beta=r_1(1-d_1)\left(1-\frac{\zeta_2}{K_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}M^{1-\gamma_1}-\frac{a_2}{b_2}M^{1-\gamma_3}<0.$$

考虑(2.10)及 $v_3(t^{*+})=z(t^{*+})$， $\forall t\in(nT,(n+1)T)$， $n_1+1<n<n_1+n_2+n_3+1$，

$$v_3(t)=\left(v_3((n_1+1)T^+)-\frac{p}{1-\exp(-(m-\alpha)T)}\right)\times\exp(-(m-\alpha)t)+v_3^*(t)$$

那么

$$\left|v_3(t)-v_3^*(t)\right|<(M+p)\exp\left(-(m-\alpha)(t-(n_1+1)T)\right)<\varepsilon_1$$

$$z_2(t) \le v_3(t) \le v_3^*(t) + \varepsilon_1,\ \ (n_1+n_2+1)T \le t \le (n_1+1)T+T',$$

意味着 $\forall (n_1+n_2+1)T \le t \le (n_1+1)T+T$。(2.11)是成立的。在 $((n_1+n_2+1)T,(n_1+1)T+T')$ 上积分(2.11)，可以得到

$$x_2((n_1+n_2+n_3+1)T) \ge x_2((n_1+n_2+1)T)\eta_1^n.$$

对于 $t\in(t^*,(n_1+1)T)$，考虑以下两种情形：

情形 I：如果对 $\forall t\in(t^*,(n_1+1)T)$，$x_2(t)<\zeta_2$，那么 $\forall t\in(t^*,(n_1+1+n_2)T)$，则有 $x_2(t)<\zeta_2$。

因此

$$\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} \ge x_2(t)\left[r_1(1-d_1)\left(1-\frac{\zeta_2}{K_1}\right)-\frac{a_1}{b_1}M^{1-\gamma_1}-\frac{a_2}{b_2}M^{1-\gamma_3}\right]=\beta x_2(t). \tag{2.13}$$

在 $t\in(t^*,(n_1+1+n_2)T)$ 上积分公式(2.13)，就有

$$x_2((n_1+n_2+1)T) \ge x_2(t^*)\exp((\beta(n_2+1)T)).$$

那么

$$x_2((n_1+n_2+n_3+1)T) \ge \zeta_2\exp(\beta(n_2+1)T)\eta_1^n > \zeta_2,$$

这与已知相矛盾。

设 $t_3=\inf_{t>t^*}\{x_2(t)\ge\zeta_2\}$，则 $\forall t\in[t^*,t_3)$，$x_2(t_3)=\zeta_2$ 及公式(2.13)成立。在 $[t^*,t_3)$ 上积分公式(2.13)，则有

$$x_2(t) \ge x_2(t^*)\exp(\beta(t-t^*)) \ge \zeta_2\exp(\beta(1+n_1+n_3)T) \triangleq \zeta_2'.$$

当 $t>t_3$ 时，由于 $x_2(t_3)\ge\zeta_2$，同理可证，$\forall t>t_3$，$x_2(t)\ge\zeta_2'$ 成立。

情形 II：存在一个 $t_5\in(t^*,(n_1+1)T]$ 使得 $x_2(t_5)\ge\zeta_2$。设 $t_4=\inf_{t>t^*}\{x_2(t)\ge\zeta_2\}$，则对于 $t\in[t^*,t_4)$，$x_2(t)<\zeta_2$ 及 $x_2(t_4)=\zeta_2$。对于 $t\in[t^*,t_4)$，则公式(2.13)成立。在 $t\in[t^*,t_4)$ 上积分公式(2.13)，得到 $x_2(t)\ge x_2(t^*)\exp(\beta(t-t^*))>\zeta_2'$。由于 $x_2(t_4)\ge\zeta_2$，同理可证，可以得到当 $t>t_4$ 时，$x_2(t)\ge\zeta_2'$。

因此在这两种情形下，可以得出结论 $\forall t\ge t_1$，$x_2(t)\ge\zeta_2'$。

类似的，可以证明 $\forall t\ge t_1$，$y_2(t)\ge\zeta_3'$。

设集合
$$\begin{aligned}\Omega=\{&(x(t),y(t),z(t)):x(t)\ge x_2(t)\ge\zeta_2,y(t)\ge y_2(t)\ge\zeta_3,z(t)\ge z_2(t)\ge\zeta_1,\\ &x_2(t)+y_2(t)+z_2(t)\le x(t)+y(t)+z(t)\le 3M\}\end{aligned}$$
。

很显然，可以得出集合 $\Omega\in\operatorname{int}R_3^+$ 是全局吸引子。系统(1.1)的任意解最终进入并保持在区域 Ω 内。因此，系统(1.1)是持久生存的。证明完毕。

4. 结论

本论文基于生态学理论与数学生物学知识，在动态建模过程中加入了 Hassell-Varley 功能反应函数，建立了一类具有季节效应的脉冲控制生物动力系统。基于脉冲微分方程理论、比较定理和生物学意义，研究了季节效应如何影响这类生态动力系统的特定动力学性态，分析了系统半平凡周期解的存在性、局部渐近稳定性和全局渐近稳定性，明确了该系统具有这些特定动力学性态的阈值条件，同时讨论了系统生物种群的灭绝性与持久生存性。这些研究结果为进一步研究如何运用脉冲控制策略维持生态种群持久生存提供了一定的理论支撑。

致　谢

首先，我向我的导师赵敏教授表达我最诚挚的谢意！感谢老师对我的论文细致而又严谨的指导，感谢老师对我生活及学习上无微不至的关怀。

其次，感谢我们实验室的于恒国师兄和戴传军师兄，感谢你们一直以来在实验室对我问题的细致引导、鼓励和解答，使我对我们专业有了更深更细致的理解。

最后，感谢温州大学数学与信息科学院的各位老师和领导，感谢他们的教导和帮助。同时感谢赵敏导师国家自然科学基金面上项目(KZ1111021)的资助。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(KZ1111021)。

参考文献 (References)

[1] Berryman, A.A. (1992) The Origins and Evolution of Predator-Prey Theory. *Ecology*, **5**, 1530-1535. https://doi.org/10.2307/1940005

[2] May, R.M. (2001) Stability and Complexity in Model Ecosystems. Princeton University Press, Princeton.

[3] Murray, J.D. (2003) Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. 3rd Edition, Springer, New York.

[4] Arditi, R. and Ginzburg, L.R. (1989) Coupling in Predator-Prey Dynamics: Ratio-Dependence. *Journal of Theoretical Biology*, **139**, 311-326. https://doi.org/10.1016/S0022-5193(89)80211-5

[5] Collings, J.B. (1997) The Effects of the Functional Response on the Bifurcation Behavior of a Mite Predator-Prey Interaction System. *Journal of Mathematical Biology*, **36**, 149-168. https://doi.org/10.1007/s002850050095

[6] Ruan, S. and Xiao, D. (2001) Global Analysis in a Predator-Prey System with Non-Monotonic Functional Response. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **61**, 1445-1472. https://doi.org/10.1137/S0036139999361896

[7] Skalski, G.T. and Gilliam, J.F. (2001) Functional Responses with Predator Interference: Viable Alternatives to the Holling Type II Mode. *Ecology*, **82**, 3083-3092. https://doi.org/10.1890/0012-9658(2001)082[3083:FRWPIV]2.0.CO;2

[8] Hassell, M.P. and Varley, G.C. (1969) New Inductive Population Model for Insect Parasites and Its Bearing on Biological Control. *Nature*, **5211**, 1133-1137. https://doi.org/10.1038/2231133a0

[9] Cosner, C., Deangelis, D.L., Ault, J.S. and Olson, D.B. (1999) Effects of Spatial Grouping on the Functional Response of Predators. *Theoretical Population Biology*, **1**, 65-75. https://doi.org/10.1006/tpbi.1999.1414

[10] Abrams, P.A. and Ginzburg, L.R. (2008) The Nature of Predation: Prey Dependent, Ratio Dependent or Neither. *Trends in Ecology and Evolution*, **8**, 337-341.

[11] Sutherland, W.J. (1983) Aggregation and the "Ideal Free" Distribution. *The Journal of Animal Ecology*, **3**, 821-828. https://doi.org/10.2307/4456

[12] Gakkhar, S. and Naji, R.K. (2003) Chaos in Seasonally Perturbed Ratio-Dependent Prey-Predator System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **1**, 107-118. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00114-5

[13] Sabin, G.C.W. and Summers, D. (1993) Chaos in a Periodically Forced Predator-Prey Ecosystem Model. *Mathematical Biosciences*, **1**, 91-113. https://doi.org/10.1016/0025-5564(93)90010-8

[14] Upadhyay, R.K. and Lyengar, S.P.K. (2005) Effect of Seasonality on the Dynamics of 2 and 3 Species Prey-Predator System. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **6**, 509-530. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2004.11.001

[15] Ackland, G.J. and Gallagher, I.D. (2004) Stabilization of Large Generalized Lotka-Volterra Food Webs by Evolutionary Feedback. *Physical Review Letters*, **93**, Article ID: 158701.

[16] Jiang, G. and Lu, Q. (2006) The Dynamics of a Prey-Predator Model with Impulsive State Feedback Control. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. *Series B*, **6**, 1301-1320. https://doi.org/10.3934/dcdsb.2006.6.1301

[17] Liu, X. and Chen, L. (2003) Complex Dynamics of Holling Type II Lotka-Volterra Predator-Prey System with Impulsive Perturbations on the Predator. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **2**, 311-320. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(02)00408-3

[18] Liu, B., Zhang, Y. and Chen, L. (2005) Dynamic Complexities in a Lotka-Volterra Predator-Prey Model Concerning Impulsive Control Strategy. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, **2**, 517-531. https://doi.org/10.1142/S0218127405012338

[19] Samoilenko, A.M. and Perestyuk, N.A. (1995) Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/2892

[20] Zavalishchin, S.T. and Sesekin, A.N. (1997) Dynamic Impulse Systems Theory and Applications. Mathematics and Its Applications. Kluwer, Dordrecht, 394.

[21] Lakshmikantham, V. and Liu, X. (1989) On Quasi-Stability for Impulsive Differential Systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **13**, 819-828. https://doi.org/10.1016/0362-546X(89)90074-6

[22] Liu, X. and Rolf, K. (1998) Impulsive Control of a Lotka-Volterra System. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15**, 269-284. https://doi.org/10.1093/imamci/15.3.269

[23] Akhmet, M.U. (2003) On the General Problem of Stability for Impulsive Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **288**, 182-196. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.08.001

[24] Liu, X. and Chen, L. (2004) Global Dynamics of the Periodic Logistic System with Periodic Impulsive Perturbations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **289**, 279-291. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2003.09.058

[25] Negi, K. and Gakkhar, S. (2007) Dynamics in a Beddington-DeAngelis Prey-Predator System with Impulsive Harvesting. *Ecological Modelling*, **206**, 421-430. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2007.04.007

[26] Lakshmikantham, V., Bainov, D.D. and Simeonov, P.C. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore. https://doi.org/10.1142/0906

[27] Benchohra, M., Henderson, J. and Ntouyas, S. (2006) Impulsive Differential Equations and Inclusions. Hindawi Publishing Corporation, New York. https://doi.org/10.1155/9789775945501

[28] Zavalishchin, S.T. and Sesekin, A.N. (1997) Dynamic Impulsive Systems: Theory and Applications. Mathematics and Its Application. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8893-5

[29] Tan, Y., Tao, F. and Chen, L. (2008) Dynamics of a Non-Autonomous System with Impulsive Output. *International Journal of Biomathematics*, **1**, 225-238. https://doi.org/10.1142/S1793524508000187

[30] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993) Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. Longman Scientific and Technical, Essex.

[31] Ang, T.Y. (2001) Impulsive Control Theory. World Scientific, Singapore.

[32] Bainov, D.D. and Simeonov, P.C. (1989) System with Impulsive Effect: Stability, Theory and Applications. Ellis Horwood Limited, Chichester.

[33] Bainov, D.D. and Simeonov, P.S. (1993) Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions. World Scientific, Singapore.