Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(2), 139-145
Published Online March 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62016

Disjoint Subgraphs with Specified Properties in Graphs

Yihua Wang[1], Shuo Li[2], Xiaoning Yi[1]

[1]School of Mathematics, Shandong University, Jinan Shandong
[2]Department of Mathematics, Changji University, Changji Xinjiang
Email: yihuawww@163.com, yxnyixiaoning@163.com

Received: Feb. 26th, 2017; accepted: Mar. 18th, 2017; published: Mar. 21st, 2017

Abstract

Let G be a graph of order n with $n \geq 4k$, where k is a positive integer. Suppose that $\delta(G) \geq \frac{3n}{4}$, then the partition of G can be $k-1$ vertex disjoint 4-cliques and a chordal cycle, where the degree of vertexes in this chordal cycle is equal or greater than 3 or 4.

Keywords

Vertex-Disjoint, 4-Cliques, Chordal Cycle

图中具有指定性质的不交子图

王怡华[1]，李　硕[2]，衣晓宁[1]

[1]山东大学数学学院，山东　济南
[2]昌吉学院数学系，新疆　昌吉
Email: yihuawww@163.com, yxnyixiaoning@163.com

收稿日期：2017年2月26日；录用日期：2017年3月18日；发布日期：2017年3月21日

摘　要

令G是一个顶点数为n的简单图，满足$n \geq 4k$，k是任意正整数。假设$\delta(G) \geq \frac{3n}{4}$，则图$G$可划分成$k-1$个点不交的4-团和一个弦圈，使得弦圈上点的度大于等于3或4。

文章引用: 王怡华, 李硕, 衣晓宁. 图中具有指定性质的不交子图[J]. 应用数学进展, 2017, 6(2): 139-145.
https://doi.org/10.12677/aam.2017.62016

关键词

点不交，4-团，弦圈

1. 引言

本文中的图都为简单图。令 $G(V,E)$ 是一个简单图，图 G 的顶点数和边数分别为 $|G|=|V|$ 和 $e(G)=|E|$。图 G 中的一列子图称为独立的如果任意两个子图在 G 中没有公共点。若 G_1 和 G_2 在 G 中没有公共点，我们定义 $e(G_1,G_2)$ 为 G_1 和 G_2 之间的边数。假设 H 是 G 的子图并且 $u\in V(G)$， $N(u,H)$ 表示 u 在 H 中的邻点，并且 $d(u,H)=e(u,H)=|N(u,H)|$。对 G 中的子图 U，令 $N(U,H)=\bigcup_{u\in U}N(u,H)$，且 $G[V(U)]$ 表示 $V(U)$ 的导出子图。$\delta(G)$ 表示图 G 的最小度。同时，我们定义 $\sigma_2(G)=\min\{d(x)+d(y)|x\in V,y\in V,xy\notin E\}$。我们用 C_n 和 P_n 分别表示顶点数为 n 的圈和路。路 P 称为图 G 的支撑路，如果路 P 覆盖图 G 中所有点。团是指 G 的一个完全子图，若一个团中包含的顶点数为 k，则称其为 k-团。

1963 年，Erdös 提出了一个关于图中包含 k 个点不交团的猜想。

猜想 1 [1]设 G 是一个顶点数为 n 的图。如果 $n=sk$，s 和 k 为正整数且 $s\geq 3,k\geq 1$。假设 $\delta(G)\geq (s-1)k$，那么 G 含有 k 个点不交的 K_s，即 $G\supseteq kK_s$。

1970 年，Hajnal 和 Szemeréd 证明了该猜想，但他们的证明非常难懂，并且证明过程也非常复杂。1978 年，Bollobós 关于此猜想给出了简单的证明。当 $s=4$ 时，为如下定理。

定理 1.1 [2]设 G 是一个顶点数为 n 的图。如果 $n=4k$，k 为正整数。假设 $\delta(G)\geq\frac{3n}{4}$，那么 G 含有 k 个独立的 4-团。

关于图中点不交的圈问题，1963 年，Corrádi 和 Hajanal 证明了下面定理。

定理 1.2 [3]设 G 是一个顶点数为 n 的图。如果 $n\geq 3k$，k 为正整数。假设 $\delta(G)\geq 2k$，那么 G 含有 k 个独立的圈。

最近 Wang 考虑了每个连通分支为固定大小的 2-因子问题。

定理 1.3 [4]设 G 是一个顶点数为 n 的图。如果 $n>4k$，k 为正整数。假设 $\delta(G)\geq\lceil n/2\rceil$，那么 G 有含有 k 个独立的圈的 2-因子，其中 k-1 个为 4-圈。

本文将定理 1.3 的 4-圈推广到 4-团，得到如下命题。

定理 1.4 设 G 是一个顶点数为 n 的图。如果 $n\geq 4k$，k 为正整数。假设 $\delta(G)\geq\frac{3n}{4}$，那么 G 含有 k-1 个独立的 4-团和一个弦圈，弦圈上的度大于等于 3 或 4。

在证明定理 1.4 之前，我们先引入下面几个引理。

2. 引理

引理 2.1 设 G 是一个顶点数为 n 的图。如果 $4k+1\leq n\leq 4k+3$，k 为正整数。假设 $\delta(G)\geq\frac{3n}{4}$，那么

G 含有 k 个独立的 4-团。

证明：

假设 $n=4k+s, s\in\{1,2,3\}$。令 S 为 G 中任意 s 个点的集合，则 $\delta\left(G\left[V\left(G-S\right)\right]\right)\geq\frac{3n}{4}-s=\frac{3\times\left(4k+s\right)}{4}-s=3k-\frac{s}{4}$。因为最小度为整数且 $0<\frac{s}{4}<1$，所以 $\delta\left(G\left[V\left(G-S\right)\right]\right)\geq 3k$。又因为 $\left|V\left(G-S\right)\right|=4k$，由定理 1.1 可知，图 G 含有 k 个点不交的 4-团。□

引理 2.2 令 T 为图 G 中的一个 4-团并且令 μ 和 υ 为图 G 中不在 T 上的两个不相邻的点。如果 $d\left(\mu,T\right)+d\left(\upsilon,T\right)\geq 7$，那么 $G\left[V\left(T\right)\bigcup\{\mu,\upsilon\}\right]$ 包含一个 4-团 T' 和一条边 e，使得 T' 和 e 是不交的并且 e 恰好与 μ 和 υ 中的一点相连。

证明： 假设 $T=a_1a_2a_3a_4a_1$。因为 $d\left(\mu,T\right)+d\left(\upsilon,T\right)\geq 7$，则设 $d\left(\mu,T\right)\geq 3, d\left(\upsilon,T\right)=4$，所以点 μ 在 T 中的邻点中至少有三个，不妨设为 a_1,a_2,a_3。$G\left[V\left(T-\{a_4\}\right)\bigcup\{\mu\}\right]\supseteq T'$ 与边 $e=a_4v$ 是不交的。□

引理 2.3 [5]如果 $P=x_1x_2\cdots x_m$ 为 G 中的一条路，$m\geq 3$，满足 $d\left(x_1,P\right)+d\left(x_m,P\right)\geq m$，那么 G 含有一个圈 C 满足 $V\left(C\right)=V\left(P\right)$。另外，对于 G 中任意两个不相邻的点 x,y，如果 $d\left(x\right)+d\left(y\right)\geq n+1$，那么 G 是哈密顿连通的。

令 G 是一个顶点数为 n 的图，定义 G 的(n+1)-闭包 $C_{n+1}\left(G\right)$ 为从 G 中递归地连接每对度和至少为 $n+1$ 的不相邻的两个点所得到的图。

引理 2.4 [6]令 G 是一个顶点数为 n 的图，如果 $C_{n+1}\left(G\right)$ 是完全图，那么 G 是哈密顿连通的。

引理 2.5 [4]假定 $n\geq 5$ 且 $\sigma_2\geq n+1$。那么对于任意 $x\in V\left(G\right)$，G 含有一个 4-圈 Q 满足 $G-V\left(Q\right)$ 有一条起始于 x 的哈密顿路。

3. 定理的证明

令 G 是一个顶点数为 n 的图，$n>4k$，k 为正整数，满足条件 $\delta\left(G\right)\geq\frac{3n}{4}$。因为 G 有一个哈密顿圈，当 $k=1$ 时定理 1.4 成立。假设 $k\geq 2$，令 $r=n-4k$。为了证明，我们首先证明下列的断言。

断言 3.1 G 包含 k 个独立的 4-团 $T_1\cdots T_k$ 使得 $G-V\left(\bigcup_{i=1}^{k}T_i\right)$ 有一条哈密顿路 P。并且当 $r\geq 5$ 时，对任意 $v\in V\left(P\right), d_p\left(v\right)=\{3,4\}$。

证明： 我们首先证明断言 $1\leq r\leq 4$ 的情况。由引理 2.1，$r=1$ 时，断言是平凡的。如果 $r=4$，那么 $n=4\left(k+1\right)$。由定理 1.1，G 包含 $k+1$ 个独立的 4-团。所以当 $2\leq r\leq 3$ 时，由引理 2.1，G 包含 k 个独立的 4-团 $T_1\cdots T_k$。令 $H=\bigcup_{i=1}^{k}T_i$ 且 $D=G-H$。我们选择 $T_1,\cdots,T_k$ 使得

(a) D 中的路尽可能的长

当 $r=2$ 时，我们断言 D 包含一条边。否则，令 x_1x_2 为 D 中不相邻的两点。则 $d\left(x_1,H\right)+d\left(x_2,H\right)\geq 6k+3$，因此存在 $T_i\in H$ 使得 $d\left(x_1,T_i\right)+d\left(x_2,T_i\right)\geq 7$。由引理 2.2，$G\left[V\left(T_i\bigcup\{x_1x_2\}\right)\right]$ 包含相互独立的一个 4-团和一条边。这与选择(a)矛盾。这也证明断言对 $r=2$ 时成立。

假定 $r=3$。令 x_3 为 D 中另外一点，且 $x_1x_3\notin E, x_2x_3\notin E$。所以 $e\left(x_1x_2,H\right)+2d\left(x_3,H\right)\geq 12k+7$。则存在 $T_i\in H$，使得 $e\left(x_1x_2,T_i\right)+2d\left(x_3,T_i\right)\geq 13$。假设 $T_i=T_1=a_1a_2a_3a_4a_1$ 且 $d\left(x_1,T_1\right)+d\left(x_3,T_1\right)\geq 7$。当 $d\left(x_1,T_1\right)=4, d\left(x_3,T_1\right)\geq 3$ 时，不妨设 $N\left(x_3,T_1\right)=\{a_1,a_2,a_3\}$。因为 D 中不含长度为 3 的路，所以点 x_1 与 x_3 不相邻。由引理 2.2，则 $G\left[V\left(T_1-a_4\right)\bigcup\{x_3\}\right]$ 包含一个 4-团并且 $x_1a_4\in E$，产生一条路 $P=x_2x_1a_4$，矛盾。因此 $d\left(x_1,T_1\right)\geq 3, d\left(x_3,T_1\right)=4$。不妨设 $N\left(x_1,T_1\right)=\{a_1,a_2,a_3\}$，类似地，$G\left[V\left(T_1-a_1\right)\bigcup\{x_3\}\right]$ 包含一个 4-团并且 $x_1a_1\in E$，产生一条路 $P=x_2x_1a_1$，矛盾。证明断言对 $r=3$ 时成立。

现在假定 $r \ge 5$。首先我们证明下列命题成立。

(*)假定 $T_1', \cdots, T_l'$ 是 G 中 l 个独立的 4-团且 $P' = y_1, \cdots, y_p$ 是 $G - \bigcup_{i=1}^{l} T_i'$ 的一条支撑路。则存在 $T_j', 1 \le j \le l$，使得 $G\left[V\left(T_j' \bigcup P'\right)\right]$ 包含一条支撑路。

如果不是，则 $d\left(y_1, T_j'\right) = d\left(y_p, T_j'\right) = 0, j \in \{1, 2, \cdots, l\}$。另外，我们可以假设 $G\left[V\left(P'\right)\right]$ 包含一个哈密顿圈。否则，$y_1 y_p \notin E$，则 $d\left(y_1, P'\right) + d\left(y_p, P'\right) \ge \frac{3n}{2} \ge p$。由引理 2.3，$G\left[V\left(P'\right)\right]$ 含有一个哈密顿圈。因为 G 是连通的，所以存在一个 4-团 T_j' 使得 $e\left(P', T_j'\right) > 0$。因此，$G\left[V\left(T_j' \bigcup P'\right)\right]$ 包含一条支撑路。

令 s 为正整数，使得 $n = 4(k+s) + r - 4s$ 且 $1 \le r - 4s \le 4$。由引理 2.1 和当 $1 \le r \le 4$ 时的结论，我们可以找到 $k+s$ 个点不交的 4-团，设为 $T_1, \cdots, T_{k+s}$，和一条长度为 $n - 4(k+s) = r - 4s$ 的路。由 $(*)$ 递归可知，我们得到相互独立的 k 个 4-团和一条顶点数为 r 的路 P。

现在我们讨论 $r \ge 5$ 时哈密顿路 P 上点的度。

由 D 中顶点数为 r 的哈密顿路 P 的构造过程可知，T_j' 中与 P' 关联的点度大于等于 4，与下一个 4-团关联的点度大于等于 4，其余两个点度大于等于 3。

接下来讨论哈密顿路 P 中其余 $r - 4s$ 个点的度，$1 \le r - 4s \le 4$。

当 $r - 4s = 4$ 时，由定理 1.1 可知，G 中包含 $k + s + 1$ 个 4-团，则这四个点可以组成一个 4-团，设为 $T = x_1 x_2 x_3 x_4 x_1$，从 $x_i, i = \{1, 2, 3, 4\}$ 中任选两点，不妨设为 x_1, x_2。则

$$
\begin{aligned}
d\left(x_1, G-T\right) + d\left(x_2, G-T\right) &\ge \frac{3n}{4} \times 2 - 6 \\
&= \frac{3\left(4(k+s)+4\right)}{4} \times 2 - 6 \\
&= 6(k+s) > 4(k+s) + 1
\end{aligned}
$$

因此在 $G - T$ 的 $k+s$ 个 4-团中存在一个 4-团 $T_j, j \in \{1, \cdots, k+s\}$，使得 $d\left(x_1, T_j\right) + d\left(x_2, T_j\right) \ge 5$，则 T_j 中至少存在两个不同的点与 x_1 和 x_2 相连，设两条关联的边为 e_1, e_2。因此 $G\left[V\left(T_j \bigcup T\right)\right]$ 包含一个哈密顿圈 C，且在 C 中 e_1, e_2 关联的四个点度大于等于 4，非关联的点度大于等于 3。 若 $j \in k+1, \cdots, k+s$，则在哈密顿路 P 上这四个点中有两个度大于等于 4，两个大于等于 3。若 $j \in \{1, \cdots, k\}$，则让 T_j 替换 $\{T_{k+1}, \cdots, T_{k+s}\}$ 中任意 4-团 T_j'，可以得到上述相同结果。

当 $r - 4s = 3$ 时，设为 $T = x_1 x_2 x_3$。如果点 x_1 与 x_3 不相邻，则

$$
\begin{aligned}
d\left(x_1, G-T\right) + d\left(x_2, G-T\right) + d\left(x_3, G-T\right) &\ge \frac{3n}{4} \times 3 - 4 \\
&= \frac{3\left(4(k+s)+3\right)}{4} \times 3 - 4 \\
&= 9(k+s) + \frac{11}{4}
\end{aligned}
$$

所以在 $k+s$ 个 4-团中存在一个 4-团 $T_j, j \in \{1, \cdots, k+s\}$，使得 $d\left(x_1, T_1\right) + d\left(x_2, T_2\right) + d\left(x_3, T_3\right) \ge 10$，则 $d\left(x_i, T_j\right) \ge 2, i \in \{1, 2, 3\}$。因此，点 x_1 与 x_3 在 $G\left[V\left(T_j \bigcup T\right)\right]$ 中的度大于等于 3，点 x_2 在 $G\left[V\left(T_j \bigcup T\right)\right]$ 中的度大于等于 4。若 $j \in \{k+1, \cdots, k+s\}$，则在哈密顿路 P 上这三个点中有两个度大于等于 3，一个大于等于 4。否则，则让 T_j 替换 $\{T_{k+1}, \cdots, T_{k+s}\}$ 中任意 4-团 T_j'，可以得到上述相同结果。如果点 x_1 与 x_3 相邻，这三个点可以组成三角形，设为 $T = x_1 x_2 x_3 x_1$。则

$$\begin{aligned} d\left(x_1,G-T\right)+d\left(x_2,G-T\right)+d\left(x_3,G-T\right) &\geq \frac{3n}{4}\times 3-6 \\ &= \frac{3\left(4\left(k+s\right)+3\right)}{4}\times 3-6 \\ &= 9\left(k+s\right)+\frac{3}{4} \end{aligned}$$

所以在 $k+s$ 个 4-团中存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k+s\}$，使得 $d\left(x_1,T_1\right)+d\left(x_2,T_2\right)+d\left(x_3,T_3\right)\geq 10$。因此，与点 x_1 与 x_3 不相邻的情况类似，点 x_1，x_2 与 x_3 在哈密顿路 P 上度大于等于 4。

当 $r-4s=2$ 时，这两个点组成路 T，设 $T=x_1x_2$。则

$$d\left(x_1,G-T\right)+d\left(x_2,G-T\right)\geq \frac{3n}{4}\times 2-2=\frac{3\left(4\left(k+s\right)+2\right)}{4}\times 2-2=6\left(k+s\right)+1$$

所以在 $k+s$ 个 4-团中至少存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k+s\}$，使得 $d\left(x_1,T_j\right)+d\left(x_2,T_j\right)\geq 7$，则 $d\left(x_i,T_j\right)\geq 3, i\in\{1,2\}$。因此，点 x_1,x_2 在 $G\left[V\left(T_j\bigcup T\right)\right]$ 中的度大于等于 4。若 $j\in\{k+1,\cdots,k+s\}$，则这两点在哈密顿路 P 上度大于等于 4。否则，则让 T_j 替换 $\{T_{k+1},\cdots,T_{k+s}\}$ 中任意 4-团 T_j'，可以得到上述相同结果。

当 $r-4s=1$ 时，这个点设为 x。则

$$d\left(x,G-\{x\}\right)\geq \frac{3n}{4}=\frac{3\left(4\left(k+s\right)+1\right)}{4}=3\left(k+s\right)+\frac{3}{4}$$

所以在 $k+s$ 个 4-团中至少存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k+s\}$，使得 $d\left(x,T_j\right)=4$。因此点 x 在 $G\left[V\left(T_j\bigcup T\right)\right]$ 中的度大于等于 5。若 $j\in\{k+1,\cdots,k+s\}$，则这两点在哈密顿路 P 上度大于等于 5。否则，则让 T_j 替换 $\{T_{k+1},\cdots,T_{k+s}\}$ 中任意 4-团 T_j'，可以得到上述相同结果。

因此断言 3.1 成立。□

令 $H=\bigcup_{i=1}^{k}Q_i, D=G-H$，$P$ 为 D 中的一条哈密顿路，不妨设两个端点为 x_1,x_r。若 $d\left(x_1,H\right)+d\left(x_r,H\right)\geq 4k+1$，则存在 $T_i\in H$，使得 $d\left(x_1,T_i\right)+d\left(x_r,T_i\right)\geq 5$，设 $T_1=T_i=a_1a_2a_3a_4a_1$。由此可知 x_1 与 x_r 在 T_1 中至少有一个共同点，设为 a_1，则 $x_1a_1, x_ra_j\left(j\in\{2,3,4\}\right)\in E$。因此，$G\left[V\left(T_1\bigcup D\right)\right]$ 是哈密顿的。即图 G 含有 $k-1$ 个 4-团和一个哈密顿圈。由断言 3.1 可知，当 $r\geq 5$ 时，这个哈密顿圈上点的度大于等于 3 或 4。下面讨论当 $r\leq 4$ 时哈密顿圈上的度。若 $r=1$，设这个点为 x，$d\left(x,T_1\right)\geq 3$ 是平凡的，即所得哈密顿圈上点的度大于等于 3 或 4。若 $r=2$，$d\left(x_1,H\right)+d\left(x_r,H\right)\geq \frac{3n}{4}\times 2=6k+3$，则存在 $T_i\in H$，使得 $d\left(x_1,T_i\right)+d\left(x_r,T_i\right)\geq 7$，因此 x_1 和 x_2 在 T_i 中至少有三个邻点，即哈密顿圈上点的度大于等于 3 或 4。若 $r=3$，设路 P 上的三个点分别为 x_1,x_2,x_r，因为 $d\left(x_1,H\right)+d\left(x_2,H\right)+d\left(x_r,H\right)\geq \frac{3n}{4}\times 3=9k+\frac{27}{4}$，所以存在 $T_i\in H$，使得 $d\left(x_1,T_i\right)+d\left(x_2,T_i\right)+d\left(x_r,T_i\right)\geq 10$，则 x_1,x_2,x_r 在 T_i 中至少有三个邻点，即哈密顿圈上点的度大于等于 3 或 4。若 $r=4$，由断言 3.1 可知，P 为一个 4-团，即哈密顿圈上点的度大于等于 3 或 4。综上，当 $d\left(x_1,H\right)+d\left(x_r,H\right)\geq 4k+1$，主要定理得证。

否则，

$$d\left(x_1,H\right)+d\left(x_r,H\right)\leq 4k \tag{1}$$

则 $d\left(x_1,D\right)+d\left(x_r,D\right)\geq \frac{3n}{4}\times 2-4k=\frac{3\left(4k+r\right)}{4}\times 2-4k=2k+\frac{3r}{2}>r$。由引理 2.3，$D$ 含有一个圈 C，

使得 $V(C)=V(P)$。

断言 3.2 如果 $r\ge 4$，那么 $d(x,D)+d(y,D)\ge r+1$，对于任意 $\{x,y\}\in D$ 且 $xy\notin E$

证明： 首先假定 D 中的每条哈密顿路的端点是邻接的。令 P 为 D 中的一条哈密顿路并且令 $P=x_1x_2\cdots x_r$。我们假定 $d(x_1,D)\ge d(x_i,D), i\in\{2,3,\cdots,r\}$。假设 $N(x_1,D)=\{x_2,x_{p_1},\cdots,x_{p_s}\}$，对于任意 $p_j\in\{p_1,\cdots,p_s\}$，存在一条哈密顿路 $P=x_2x_3\cdots x_{p_j}x_1x_2\cdots x_{p_{j+1}}$。由假设可知 $x_2x_{p_{j+1}}\in E$，因为 $d(x_1,D)$ 的极大性，我们得到 $d(x_2,D)=d(x_1,D)$。相同地，$d(x_r,D)=d(x_{r-1},D)=\cdots d(x_1,D)$。则 D 是一个正则图。

令 $x_1x_i\notin E$，则 $x_2x_{i+1}\notin E$。否则 D 有一条哈密顿路 $P=x_1x_r\cdots x_{i+1}x_2x_3\cdots x_i$，由假设可知 $x_1x_i\notin E$ 产生矛盾。因此

$$d(x_1)+d(x_2)\ge\frac{3n}{4}\times 2\ge\frac{3n}{2}=\frac{3(4k+r)}{2}=6k+\frac{3r}{2}$$

由(1)可得，$d(x_1,H)+d(x_2,H)\le 4k$，则 $d(x_1,D)+d(x_2,D)\ge r+1$。因为 D 为 G 的正则子图，所以 $d(x,D)+d(y,D)=d(x_1,D)+d(x_2,D)\ge r+1$ 对于任意 $\{x,y\}\in D$。如果 D 中存在一条哈密顿路使得它的两个端点 u,v 是非邻接的，我们有 $d(u,D)+d(v,D)\ge r+1$。令 $x_1x_2\cdots x_rx_1$ 为 D 中的一个哈密顿圈并且假定 $d(x_1)\ge(r+1)/2$。现在我们构造 $D'=C_{r+1}(D)$。假定 $N(x_1)=\{x_2,x_{p_1},\cdots,x_{p_s}\}$ 并且 $s\ge(r-1)/2$。我们可以找到一条哈密顿路 $P=x_2x_3\cdots x_{p_j}x_1x_r\cdots x_{p_{j+1}}$，对任意的 $p_j\in\{p_1,\cdots,p_s\}$。因此，我们得到一条以 x_2 为其中一个端点的 $d(x_1)$ 的哈密顿路。如果 $x_2x_{p_{j+1}}\notin E(D)$，则 $d(x_2,D)+d(x_{p_{j+1}},D)\ge r+1$。在 D' 中我们连接 $x_2x_{p_{j+1}}$，所以我们有 $d(x_2,D')\ge(r+1)/2$。相同地，$d(x_i,D')\ge(r+1)/2, i\in\{3,\cdots,r\}$。因此 $d(u,D')+d(v,D')\ge r+1$，对于 D' 中的任意一对 $\{u,v\}$。由定义可知 D' 是一个完全图。由引理 2.4，D 是哈密顿连通的，也就是说对于 D 中的每对点 $\{u,v\}$，都存在一条以 u,v 为端点的哈密顿路。因此，对于 D 中的每对非相邻的点 $\{u,v\}$，$d(u)+d(v)\ge r+1$ 成立。

现在我们证明主要定理 $r\le 4$ 的情形，我们选择 k 个点不交的 4-团 $T_1,\cdots,T_k$ 和 D 中一条哈密顿路。

如果 $r=4$，由断言 3.2 可知，D 为一个 4-团，设为 $T=x_1x_2x_3x_4x_1$，从 $x_i, i=\{1,2,3,4\}$ 中任选两点，不妨设为 x_1,x_2。则

$$d(x_1,G-T)+d(x_2,G-T)\ge\frac{3n}{4}\times 2-6=\frac{3(4k+4)}{4}\times 2-6=6k>4k+1$$

因此在 H 中存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k\}$，使得 $d(x_1,T_j)+d(x_2,T_j)\ge 5$，则 T_j 中至少存在两个不同的点与 T 中两点相连，设两条关联的边为 e_1,e_2。因此 $G[V(T_j\bigcup T)]$ 包含一个哈密顿圈 C，且在 C 中 e_1,e_2 关联的四个点度大于等于 4，非关联的点度大于等于 3。

如果 $r=3$，D 为一个三角形，设为 $T=x_1x_2x_3$。则

$$d(x_1,G-T)+d(x_2,G-T)+d(x_3,G-T)\ge\frac{3n}{4}\times 3-6=\frac{3(4k+3)}{4}\times 3-6=9k+\frac{3}{4}$$

所以在 H 中存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k\}$，使得 $d(x_1,T_1)+d(x_2,T_2)+d(x_3,T_3)\ge 10$，$x_1,x_2,x_3$ 在 T_j 中至少存在两个邻点。显然 T_j 中存在三个不同的点分别为与 T 中三点相连，对应的边设为 e_1,e_2,e_3。因此 $G[V(T_j\bigcup T)]$ 包含一个哈密顿圈 C，且在 C 中 T 中的三个点度大于等于 3，T_1 中的与 e_1,e_2,e_3 关联的三个点度大于等于 4，剩余一个点度大于等于 3。

如果 $r=2$，这两个点组成路 P，设 $P=x_1x_2$。则

$$d\left(x_1,G-P\right)+d\left(x_2,G-P\right)\geq\frac{3n}{4}\times2-2=\frac{3\left(4k+2\right)}{4}\times2-2=6k+1$$

在 H 中存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k\}$，使得 $d\left(x_1,T_j\right)+d\left(x_2,T_j\right)\geq7$，则 $d\left(x_i,T_j\right)\geq3, i\in\{1,2\}$。即 P 中两点在 T_j 中的邻点至少有三个为共同点，对应的边组成的集合设为 E。因此 $G\left[V\left(T_j\bigcup P\right)\right]$ 包含一个哈密顿圈 C，且在 C 中 P 中的两个点度大于等于 4，T_1 中的与 E 中的边关联的三个点度大于等于 5，剩余一个点度大于等于 4。

如果 $r=1$，D 为一个点，设为 x。则

$$d\left(x,G-\{x\}\right)\geq\frac{3n}{4}=\frac{3\left(4k+1\right)}{4}=3k+\frac{3}{4}$$

在 H 中至少存在一个 4-团 $T_j, j\in\{1,\cdots,k\}$，使得 $d\left(x,T_j\right)=4$。因此 $G\left[V\left(T_j\right)\bigcup\{x\}\right]$ 包含一个哈密顿圈 C，且在 C 中点的度为 4。

当 $r\geq5$ 时。令 P 为 D 的一条哈密顿路，其中一个端点为 u，使得 $d\left(u,T_i\right)\geq1$，对于某些 $i\in\{1,\cdots,k\}$。不失一般性，$T_i=T_1$。

由引理 2.5，D 中有一个 4-圈 Q 使得 $G\left[V\left(D\right)-V\left(Q\right)\right]$ 含有一条起始于 u 的哈密顿路 P_1。因为 $d\left(u,T_1\right)\geq1$，所以 $G\left[V\left(P_1\right)\bigcup V\left(T_1\right)\right]$ 有一条哈密顿路 P'。因为 D 是哈密顿的，我们可以选择在 Q 与 P' 中两条互不相交的边 x_1y_1 和 x_2y_2。我们称 $G\left[V\left(Q\right)\right]$ 有一条从 y_1 到 y_2 的支持路。否则，假设 $Q=y_1y_1'y_2y_2'y_1$。则 $y_1'y_2'\notin E$ 且 $N\left(y_1',P'\right)=N\left(y_2',P'\right)=\varnothing$。由 $d\left(y_1',H\right)+d\left(y_2',H\right)\geq\frac{3n}{4}\times2-4=\frac{3\left(4k+r\right)}{4}p\times2-4\geq6k+2$，则存在 $T_i\in H$，使得 $d\left(y_1',T_i\right)+d\left(y_2',T_i\right)\geq7$。由断言 3.2，$D$ 是哈密顿连通的，则在 y_1' 与 y_2' 之间存在一条 D 中的哈密顿路并且 $G\left[V\left(D\bigcup T_i\right)\right]$ 是哈密顿的，产生矛盾。用 Q 代替 T_1，则断言 3.2 对 $D=G\left[V\left(P'\right)\right]$ 仍成立。那么 D 是哈密顿连通的，存在一条以 x_1 和 x_2 为端点的哈密顿路。因此 $G\left[V\left(D\bigcup T_1\right)\right]$ 是哈密顿的，产生矛盾。

现在我们讨论 $r\geq5$ 时弦圈 C 的结构。由定理证明中弦圈 C 的构造过程可知，$G\left[V\left(D\right)\bigcup T_i\right]$ 包含哈密顿圈，即所构造的弦圈 C。在 C 上 T_i 中与 D 中哈密顿路 P' 关联的点度大于等于 4，其余两点度大于等于 3。弦圈 C 中其它点的度的情况断言 3.1 已证。□

基金项目

国家自然科学基金资助项目(11671232)。新疆自然科学基金面上项目(2016D01C004)。

参考文献 (References)

[1] Erdös, P. (1967) Extremal Problems in Graph Theory. In: Harary, F., Ed., *A Seminar in Graph Theory*, Holt, Rinehart and Winston, 54-56.

[2] Bollobás, B. (2004) Extremal Graph Theory. Courier Corporation.

[3] Corradi, K. and Hajnal, A. (1963) On the Maximal Number of Independent Circuits in a Graph. *Acta Mathematica Hungarica*, **14**, 423-439. https://doi.org/10.1007/BF01895727

[4] Wang, H. Covering a Graph with Cycles of Lengths at Least 4.

[5] Ore, O. (1960) Note on Hamilton Circuits. *The American Mathematical Monthly*, **67**, 55. https://doi.org/10.2307/2308928

[6] Chartrand, G., Lesniak, L. and Zhang, P. (2010) Graphs & Digraphs. CRC Press.