

Multivariate Lagrange Interpolation Defined on Hyperboloid

Haibo Liu, Tingting Hui, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 1151691797@qq.com, 875497388@qq.com, 2458416309@qq.com

Received: Jul. 1st, 2017; accepted: Jul. 18th, 2017; published: Jul. 21st, 2017

Abstract

The multivariate Lagrange interpolation problem, which is usually defined on the hyperboloid of two sheets, is often studied in practical scientific research and production. Multivariate Lagrange interpolation is proposed to define the definition of hyperboloid of two sheets, given to determine whether the node group on an hyperboloid of two sheets forms judgment theorem and superposition method to construct interpolation regular set of nodes, finally is to implement the method.

Keywords

Hyperboloid of Two Sheets, Multivariate Lagrange Interpolation, The Only Solution Node Group, Superposition Interpolation Method

定义于双叶双曲面上的多元Lagrange插值问题

刘海波, 惠婷婷, 崔利宏

辽宁师范大学, 辽宁 大连

Email: 1151691797@qq.com, 875497388@qq.com, 2458416309@qq.com

收稿日期: 2017年7月1日; 录用日期: 2017年7月18日; 发布日期: 2017年7月21日

摘要

针对在实际科研生产中经常涉及到的有关定义于双叶双曲面上的多元Lagrange插值问题进行了研究。提出了定义于双叶双曲面上的多元Lagrange插值定义, 给出了判定双叶双曲面上的结点组是否构成插值正则结点组的判定定理以及迭加构造方法, 最后通过算例对所得方法进行了实现。

关键词

双叶双曲面, 多元Lagrange插值, 唯一可解结点组, 迭加插值法

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

熟知, 多元函数插值长期以来一直是计算数学研究领域的一个主要研究内容(详见文献[1]), 有关多元函数插值基本理论和方法研究中一个基本问题是多元插值函数的唯一存在问题, 也就是插值的正则性问题。由文献[1]可知, 国内外学者对这一问题的研究主要有两个判别, 一种是给定插值空间, 去构造相应唯一正解结点组(参见文献[2]-[8]); 另一种是给定结点组, 去构造相应正则插值空间, 而且要求空间的次数尽可能低[9] [10] [11]。对于某一类问题, 目前, 有关在整个空间进行插值以及关于定义于空间中一般代数流形插值的研究结果相对完备, 而关于有着重要实用价值的具体流形上的插值结果并不多见。梁学章等人[12]讨论了单位球面上的纬线组选取插值唯一正解结点组的方法。Castell 等人[13]利用球面上偶数条纬线上等距点组构造了球面上的唯一正解结点组。

双叶双曲面是除球面外的另一类主要的二次代数曲面, 其在工程设计中有着重要的作用。例如, 许多机械零部件和建筑外形采用了双曲面的形式, 例如先进的搅拌机叶片的设计就是双叶双曲面结构, 其曲面双曲面叶轮体上表面为双曲线母线绕叶轮体轴线旋转形成的双曲面结构, 其独特的叶轮结构设计, 最大限度地 will 流体特性与机械运动相结合。因此, 对双叶双曲面上的插值问题研究意义重大。

2. 基本定义和基本定理

本文主要研究三维欧式空间 R^3 中的双叶双曲面 $F = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0 \right\}$ 上进行多元 Lagrange 插值问题。

首先引入若干基本概念

设 n 为非负整数, 令 $P_n^{(3)}$ 表示所有全次数为 n 的三元代数多项式构成的集合, 即 $\dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}$

定义 1 ($P_n^{(3)}$ 的插值正则结点组)

设 $m = \binom{n+3}{3}$, 令 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$ 为 R^3 中 m 个互异点构成的点集, 如果对于任意给定的数组 $\{f_i \in R \mid i=1, \dots, m\}$, 恒存在唯一多项式 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 使之满足: $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$, 则称 A 为 $P_n^{(3)}$ 的一个正则结点组。

定义 2 (F 上的插值唯一正解结点组)

设 F 为如上所定义的椭球面, $P_n^{(3)}(F)$ 为 $P_n^{(3)}$ 在 F 上的限制。 $\dim P_n^{(3)}(F) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+3-2}{3}$, $m = \dim P_n^{(3)}(F)$, 称 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$ 为定义于 F 上的一个 n 次插值正则结点组, 如果对于任意给定的数组 $\{f_i \in R \mid i=1, \dots, m\}$, 恒存在多项式 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足 $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ 。

定理 1 (构造 $P_n^{(3)}$ 插值正则解结点组的添加双曲面法)

设 m 为如上所定义, $r = \binom{n+5}{3}$, 结点组 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \notin F$ 关于 $P_n^{(3)}$ 的一个正则结点组, 而 $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r$

是定义于 F 的一个 $n+2$ 次正则结点组, 则 $\{Q_i\}_{i=1}^r = A \cup B$ 必定构成 $P_{n+2}^{(3)}$ 的正则结点组。

证明: 设 $Q_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, r$ 。因为 B 为定义于 F 上的 $n+2$ 次正则结点组, 由定义 2, 对任意给定数组 $\{f_i | i = m+1, \dots, r\}$ 恒存在多项式 $p_1(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$ 使得 $p_1(Q_i) = f_i, i = m+1, \dots, r$ 。

又因为 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \notin F$ 关于 $P_n^{(3)}$ 的一个正则结点组, 由定义 1 对任意的数组 $\{f_i | i = 1, \dots, m\}$ 恒存在多项式 $p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 使得 $p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - \frac{z_i^2}{c^2} + 1}, i = 1, \dots, m$,

其中 (x_i, y_i, z_i) 为 $Q_i, i = 1, \dots, m$ 的三维坐标, 构造一个多项式

$$p(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \right) p_2(x, y, z)$$

显然有 $p(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$ 且满足 $p(Q_i) = p_1(Q_i) + \left(\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - \frac{z_i^2}{c^2} + 1 \right) p_2(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, r$

则由定义 1 知, $A \cup B$ 为 $P_{n+2}^{(3)}$ 的正则结点组。

定理 2 (构造 F 上插值正则结点组添加圆锥曲线法)

设 $A = \{Q_i\}_{i=1}^{(n+1)^2}$ 为 F 上的 n 次插值正则结点组, 平面 $p(x, y, z) \cap A = \phi$ 与 F 横截相交于圆周曲线 $C(x, y, z)$, B 是定义于 C 上的一个 $n+1$ 次正则结点组, 则 $A \cup B$ 必定构成定义于 F 上的一个 $n+1$ 次正则结点组。

定理 3 (判定定理)

F 上的 $m = (n+1)^2$ 个互异点 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ 能够做成定义于 F 上的 n 次插值正则结点组的充分必要条件是, 若存在 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足 $p(Q_i) = 0, i = 1, \dots, m$, 蕴含如此的 $p(x, y, z)$ 在 F 恒为零。

证明: **充分性** 设 $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$, 满足 $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in A \cup B$ 由条件可知, $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in F$ 。从而, 对于定义于 F 的一个 n 次插值正则结点组 $\tilde{A} \subset F$, 亦有 $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A}$, 即 $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A} \cup B$ 。又因为 $\tilde{A} \cup B$ 为 $P_n^{(3)}$ 的插值正则结点组, 故 $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

必要性 令 $r = \binom{n+3}{3}$, 取 $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r \notin F$ 为关于 $P_{n-2}^{(3)}$ 的正则结点组, 可以断言: $\{Q_i\}_{i=1}^r$ 构成 $P_n^{(3)}$ 的正则结点组。事实上, 对任给 $\{f_i\}_{i=1}^r$, 由于 $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$ 为定义 F 上的 n 次正则结点组, 故存在多项式 $p_1(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ 满足 $p_1(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$,

又因为 $B \notin F$ 且为关于的 $P_{n-2}^{(3)}$ 的正则结点组, 则存在多项式 $p_2(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$ 满足

$$p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - \frac{z_i^2}{c^2} + 1}, i = m+1, \dots, r,$$

则多项式

$$\tilde{p}(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 \right) p_2(x, y, z) \quad (*)$$

满足 $\tilde{p}(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, r$ ，由定义知 $\{Q_i\}_{i=1}^r$ 是 $P_n^{(3)}$ 的正则结点组，同时，在上述过程中取 $f_1 = 0, i = 1, \dots, m$ ，则(*)式中的 $p_1(x, y, z) \equiv 0$ ，此时 $\tilde{p}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1\right) p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$

满足定理中的插值条件的多项式，故由 $P_n^{(3)}$ 空间中满足相同插值条件的多项式的唯一存在性有

$$p(x, y, z) = \tilde{p}(x, y, z) = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1\right) p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$$

即 $p(x, y, z)$ 在 F 上恒为零值。

3. 算例

例如：取被插值函数为 $f_0(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，双叶双曲面为 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 + 1 = 0$ ，在双叶双曲面内取一点 $Q_0(0, 0, 0)$ ，则该点为 $P_0^{(3)}$ 的一个正则结点组；另在双叶双曲面上取互异的 9 个点 $Q_1(0, 0, 1), Q_2(0, 0, -1), Q_3(2, 0, \sqrt{2}), Q_4(2, 0, -\sqrt{2}), Q_5(0, 1, \sqrt{2}), Q_6(0, -1, \sqrt{2}), Q_7(4, 2, 3), Q_8(4, 2, -3), Q_9(4, -2, 3)$ ，这九个点是定义于双叶双曲面 F 上的一个 $0+2$ 次正则结点组(如图 1 所示)，则由定理 1 知：点组 $\{Q_0 \dots Q_9\}$ 构成 $P_2^{(3)}$ 适定结点组。设插值多项式为

$$p(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

得到方程组为 $A * X = B$ ，其中

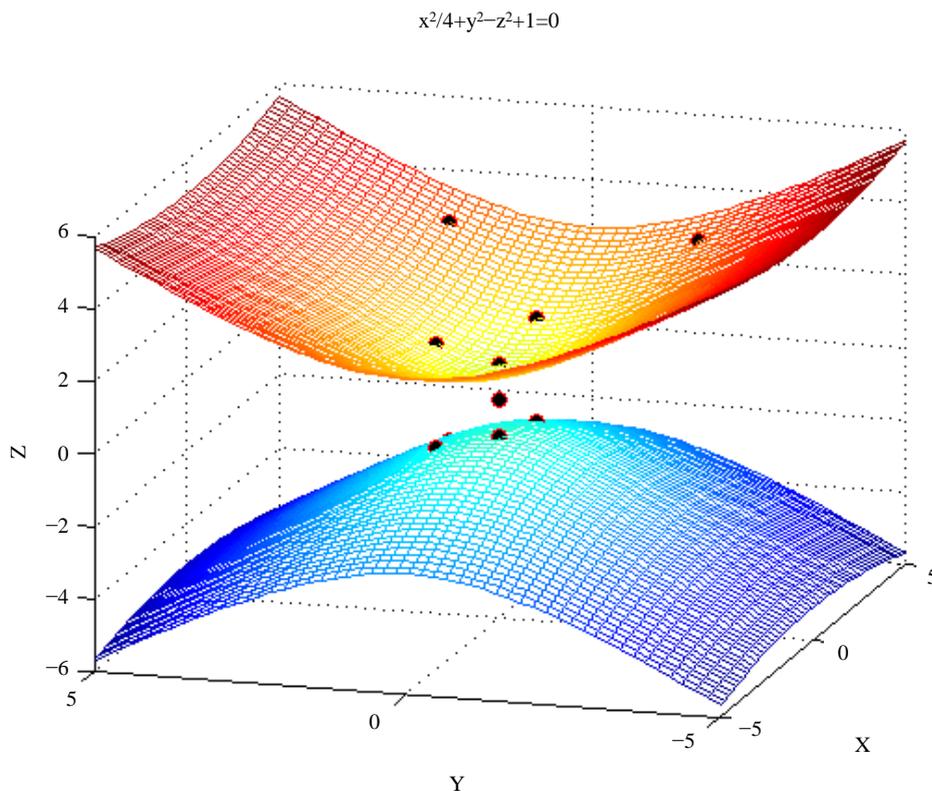


Figure 1. Point of the hyperboloid of two sheets
图 1. 双叶双曲面取点效果图

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 2 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 16 & 4 & 9 & 8 & 12 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 9 & -8 & 12 & -6 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 9 & 8 & -12 & -6 & 4 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{29} \\ \sqrt{29} \\ \sqrt{29} \end{bmatrix}, \text{解方程组} \begin{cases} a_1 = -0.4203 \\ a_2 = -0.2679 \\ a_3 = 1 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \\ a_6 = 0 \\ a_7 = 1.0852 \\ a_8 = 0 \\ a_9 = 0 \\ a_{10} = 0 \end{cases}$$

代入得到

$$p(x, y, z) = -0.4203x^2 - 0.2679y^2 + z^2 + 1.0852x$$

我们取点 (1,1,1), (2,2,2), 插值结果分别为 $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, 而精确值分别为 0.6431, 3.6576, 误差分别为 $t_1 = |\sqrt{3} - 0.6431| \approx 1.0890$, $t_2 = |2\sqrt{3} - 3.6576| \approx 0.1935$ 。

致 谢

首先我要感谢我的论文指导老师也是我硕士研究生导师崔利宏教授, 还有我的小伙伴惠婷婷同学。本文是在导师崔利宏教授的悉心指导和严格要求下完成的。感谢老师为我提供了论文材料, 耐心为我讲解疑难问题, 指明方向。每一个环节导师都倾注了大量的时间和心血。导师和蔼可亲, 遇到问题总是耐心讲解, 他的严谨求实的治学态度、诲人不倦的精神, 对我的影响深远而广泛, 使我在做文和做人方面终身受益。在此, 我向我的导师致以深深的谢意。最后, 向在百忙中抽出时间对本文进行评审并提出宝贵意见的各位专家表示衷心地感谢!

基金项目

辽宁省大学生实践基地建设项目, 辽教[2015] 399号; 辽宁省教育厅科研项目, L201683661。

参考文献 (References)

- [1] Carnicer, J.M. and Gasca, M. (2010) Multivariate Polynomial Interpolation: Some New Trends. *Monogr Real Acad Cienc Zaragoza*, **33**, 197-208. <https://doi.org/10.1137/s0036142999361566>
- [2] 梁学章. 关于多元函数的插值与逼近[J]. 高等学校计算数学学报, 1979(1): 123-124.
- [3] 梁学章. 二元插值的适定结点组与迭加插值法[J]. 吉林大学自然科学学报, 1979(1): 27-32.
- [4] Liang, X.Z., Lv, C.M. and Feng, R.Z. (2001) Properly Posed Sets of Nodes for Multivariate Lagrange Interpolation in C^s . *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **30**, 581-595. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.083>
- [5] 梁学章, 张洁琳, 崔利宏. 多元 Lagrange 插值与 Cayley-Bacharach 定理[J]. 高等数学计算数学学报, 2005(27): 276-281.
- [6] Liang, X.Z., Wang, R.H., Cui, L.H., et al. (2006) Some Researches on Trivariate Lagrange Interpolation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **195**, 192-205. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2005.03.083>
- [7] 梁学章, 张明, 张洁琳, 等. 高维空间中代数流形上多项式空间的维数与 Lagrange 插值适定结点组的构造[J]. 吉林大学学报(理学版), 2006(44): 309-317.
- [8] Liang, X.Z., Zhang, J.L., Zhang, M., et al. (2009) Superposition Interpolation Process in C^n . *Applied Mathematics and Computation*, **215**, 227-234. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.04.079>
- [9] De Boor, C. and Ron, A. (1990) On Multivariate Polynomial Interpolation. *Constructive Approximation*, **6**, 287-302. <https://doi.org/10.1007/BF01890412>

- [10] Gasca, M. and Maeztu, J.I. (1982) On Lagrange and Hermite Interpolation in R^k . *Number*, **39**, 1-14. <https://doi.org/10.1007/BF01399308>
- [11] Sauer, T. (1988) Polynomial Interpolation of Minimal Degree and Grobner Bases. Cambridge University Press, Cambridge, 483-494.
- [12] Liang, X.Z., Feng, R.Z. and Cui, L.H. (2000) Lagrange Interpolation on a Spherical Surface. *The American Journal of Mathematics*, **16**, 243-252.
- [13] Castell, W.Z., Fernandez, N.L. and Xu, Y. (2007) Polynomial Interpolation on the Unit Shpere II. *Advances in Computational Mathematics*, **26**, 155-171. <https://doi.org/10.1007/s10444-005-7510-5>

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org