Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(5), 664-669
Published Online August 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.65078

Hans汉斯

Non-Real Eigenvalues of a Class of Fourth Order Indefinite Differential Operators

Xin Zhao, Yunlan Gao*, Xiaojuan Qin

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: 9357986@qq.com, *gaogaoyyyyy@sina.com

Received: Jul. 14th, 2017; accepted: Jul. 29th, 2017; published: Aug. 2nd, 2017

Abstract

The present paper deals with non-real eigenvalues of regular fourth order indefinite differential operators. Bounds of non-real eigenvalues are obtained under mild integrable conditions of coefficients when weighted function's sign changes one or any time.

Keywords

Indefinite Differential Operator, Fourth Order Differential Operator, Non-Real Eigenvalue

一类四阶不定微分算子的非实特征值

赵　馨，高云兰*，秦小娟

内蒙古工业大学理学院，内蒙古　呼和浩特
Email: 9357986@qq.com, *gaogaoyyyyy@sina.com

收稿日期：2017年7月14日；录用日期：2017年7月29日；发布日期：2017年8月2日

摘　要

本文讨论了一类四阶正则不定微分算子的非实特征值，在系数可积的条件下分别给出了权函数仅变号一次和权函数可变号任意次时非实特征值的界。

关键词

不定微分算子，四阶微分算子，非实特征值

*通讯作者。

文章引用: 赵馨, 高云兰, 秦小娟. 一类四阶不定微分算子的非实特征值[J]. 应用数学进展, 2017, 6(5): 664-669.
DOI: 10.12677/aam.2017.65078

1. 引言

微分算子的谱理论作为微分算子理论的基本问题之一，已经成为量子力学等领域的重要数学工具。关于带权函数的 Sturm-Liouville 边值问题，带有自伴边界条件的右定问题已经有非常完善的谱理论，而不定问题的谱结构与右定问题有很大区别。例如，不定 Sturm-Liouville 边值问题的实特征值上下无界，更关键的是会出现非实特征值。自 1918 年 Richardson 提出了关于 Richardson 方程非实特征值的存在性[1]，之后很多学者开始关注和研究带有不定权的 Sturm-Liouville 问题非实特征值的相关问题[2] [3] [4]，文献[5]给出了在分离边界条件下正则不定 Sturm-Liouville 边值问题非实特征值存在的充分条件，并得到了权函数仅变号一次和权函数可变号任意次时非实特征值的界。文献[6]给出了在绝对连续函数限制下正则不定 Sturm-Liouville 边值问题非实特征值的界。而对于四阶不定微分算子谱问题的研究则相对较少，文献[7]给出了四阶不定微分算子非实特征值的界。

本文考虑四阶不定微分方程

$$y^{(4)}+q(x)y=\lambda w(x)y, x\in(0,1) \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} By_1:=y(0)\cos\theta_1-y'''(0)\sin\theta_1=0,\\ By_2:=y(1)\cos\theta_2-y'''(1)\sin\theta_2=0,\\ By_3:=y'(0)\cos\theta_3-y''(0)\sin\theta_3=0,\\ By_4:=y'(1)\cos\theta_4-y''(1)\sin\theta_4=0,\end{cases} \tag{1.2}$$

$y\in L^2_{|w|}[0,1]$，$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4\in[0,\pi)$，其中 q，w 为实值函数，满足条件

$$w(x)\neq 0,\ x\in[0,1],\ q,w\in L^1[0,1], \tag{1.3}$$

且权函数 $w(x)$ 在 $[0,1]$ 上变号，其中 λ 是谱参数。令 $L^2_{|w|}[0,1]$ 为具有内积 $(f,g)_{|w|}:=\int_0^1|w|f\bar{g}$ 和范数 $\|f\|^2_{|w|}:=\int_0^1|w||f|^2$ 的 Hilbert 空间。

令

$$\tau y:=y^{(4)}+q(x)y=\lambda|w(x)|y, x\in(0,1). \tag{1.4}$$

则(1.1)，(1.2)相应的右定问题是(1.4)，(1.2)。

本文将在文献[5]的基础上考虑四阶不定微分算子的相应情况，给出问题(1.1)，(1.2)的权函数仅变号一次和权函数可变号任意次时非实特征值的估计。

2. 主要定理及其证明

命题2.1 [7] 如果问题(1.1) (1.2)有非实特征值，则问题(1.4) (1.2)至少有一个负特征值。

命题2.2 [7] 如果问题(1.4) (1.2)有n个负特征值，则问题(1.1) (1.2)至多有$2n$个非实特征值。

令 λ 为问题(1.1) (1.2)的特征值，ϕ 是相应的特征函数且 $\|\phi\|_2=\int_0^1|\phi|^2=1$，则 ϕ 满足方程(1.1)及边界条件(1.2)。即

$$\phi^{(4)}+q(x)\phi=\lambda w(x)\phi, \tag{2.1}$$

$$B\phi_1=B\phi_2=B\phi_3=B\phi_4=0. \tag{2.2}$$

令

$$\|\phi\|_C=\max\{|\phi|,|\phi'|,|\phi'''|:x\in[0,1]\}. \tag{2.3}$$

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{4N_q^\theta},\frac{1}{2}\right\},\|q\|_1=\int_0^1|q|,\ N_q^\theta=\left(|\cot\theta_1|+|\cot\theta_2|+|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2+q_0. \tag{2.4}$$

当 $q_0=\max\limits_{0\le x\le 1}|q(x)|$ 时。定义当 $\theta=0$ 时，$\cot\theta=0$，由(2.4)易知 $0\le\delta\le\frac{1}{2}$，因为 $w(x)\not\equiv 0$，所以可选 $\varepsilon_1>0$，使得

$$mes\Omega(\varepsilon_1)\le\frac{1}{8}\delta,\Omega(\varepsilon_1)=\left\{x\in[0,1]:w^2(x)\le\varepsilon_1\right\}. \tag{2.5}$$

引理2.3 对如上的 ϕ，有

$$\int_0^1|\phi''|^2\le N_q^\theta. \tag{2.6}$$

其中 $N_q^\theta=\left(|\cot\theta_1|+|\cot\theta_2|+|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2+q_0$。

证明：在方程(2.1)的两边同时乘以 $\overline{\phi}$，然后在 $[0,1]$ 上进行积分，再由(2.2)可得

$$\cot\theta_2|\phi(1)|^2-\cot\theta_1|\phi(0)|^2+\cot\theta_3|\phi'(0)|^2-\cot\theta_4|\phi'(1)|^2+\int_0^1|\phi''|^2+\int_0^1 q|\phi|^2=\lambda\int_0^1 w|\phi|^2$$

由 $\operatorname{Im}\lambda\ne 0$，上述等式可推出 $\int_0^1 w|\phi|^2=0$，因此

$$\cot\theta_2|\phi(1)|^2-\cot\theta_1|\phi(0)|^2+\cot\theta_3|\phi'(0)|^2-\cot\theta_4|\phi'(1)|^2+\int_0^1|\phi''|^2+\int_0^1 q|\phi|^2=0 \tag{2.7}$$

再由(2.3)和(2.7)，可得

$$\int_0^1|\phi''|^2\le\left(|\cot\theta_1|+|\cot\theta_2|+|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2+q_0.$$

引理2.4 对如上的 ϕ，存在一个长度为 δ 的区间 $I\subset[0,1]$，其中 δ，N_q^θ 见(2.4)，使得在 I 上 $|\phi(x)|\ge\frac{3}{4}$ 和 $\int_0^1|\phi'|^2\le\left(\frac{1}{2}+\|\phi\|_C\right)^2\delta$。

证明：对任意的长度 δ 的区间 $I\subset[0,1]$，由Cauchy-Schwarz不等式和(2.6)，得

$$\left(\int_I|\phi''|\right)^2\le\int_I 1\int_0^1|\phi''|^2\le\frac{1}{4}, \tag{2.8}$$

取 $x_0\in[0,1]$ 满足 $|\phi(x_0)|=\|\phi\|_C\ \delta+\frac{1}{2}\delta+\frac{3}{4}$，则对于 $x\in[0,1]$ 和 $|x-x_0|\le\delta$ 时，可得

$$|\phi'(x)-\phi'(x_0)|=\left|\int_{x_0}^x\phi''\right|\le\frac{1}{2},$$

和

$$\int_{x_0}^x\int_{x_0}^x|\phi''|=\int_{x_0}^x\left(\phi'(x)-\phi''(x_0)\right)=\phi(x)-\phi(x_0)-\phi'(x_0)(x-x_0).$$

由(2.8)可得

$$\left|\phi(x)-\phi(x_0)\right| \le \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\left|\phi''\right| + \left|\phi'(x_0)(x-x_0)\right| \le \left(\frac{1}{2}+\|\phi\|_C\right)\delta, \tag{2.9}$$

又由于对任意的 $x\in[0,1]$ 和 $|x-x_0|\le\delta$，可得

$$\int_0^1\int_{x_0}^{x}\left|\phi''\right| \le \frac{1}{2}|x-x_0| \le \frac{\delta}{2},$$

根据 δ 的定义，在 $I=[x_0-\delta,x_0]$ 或 $[x_0,x_0+\delta]$ 上成立 $\left|\phi(x)\right|\ge\frac{3}{4}$。

由Cauchy-Schwarz不等式和(2.7)，得到

$$\left(\int_I|\phi'|\right)^2 \le \int_I 1\int_0^1|\phi'|^2 \le \left(\frac{1}{2}+\|\phi\|_C\right)^2\delta^2,$$

因此根据 δ 的定义，在 $I=[x_0-\delta,x_0]$ 或 $[x_0,x_0+\delta]$ 上成立 $\int_0^1|\phi'|^2 \le \left(\frac{1}{2}+\|\phi\|_C\right)^2\delta$。

定理2.5 假设 $w\in AC[0,1]$，$w',w''\in L^2[0,1]$。当 $w_0=\max\{|w(x)|:x\in[0,1]\}$，$w_1=\left(\int_0^1|w'|^2\right)^{1/2}$，$\left(\int_0^1|w'|^2\right)^{1/2}$ 和 $w_2=\left(\int_0^1|w''|^2\right)^{1/2}$ 时，则对(1.1) (1.2)的任意一个非实特征值 λ，有

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\,\lambda| \le \frac{16}{7\varepsilon_1\delta}\Bigg[& w_0\left(\left(|\cot\theta_1|+|\cot\theta_2|+|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2+N_q^\theta+\|q\|_1\right)+w_1\left(\frac{1}{2}+\|\phi\|_C\right)\\ &+w_2\left(\sqrt{N_q^\theta}+\left(|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$|\mathrm{Im}\,\lambda| \le \frac{16}{7\varepsilon_1\delta}\left[w_1\left(\frac{1}{2}+\|\phi\|_C\right)+w_2\left(\sqrt{N_q^\theta}+\left(|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2\right)\right]. \tag{2.11}$$

证明：在方程(2.1)的两边同时乘以 $w\bar\phi$，然后在 $[0,1]$ 上进行积分，可得

$$w\bar\phi\phi'''\Big|_0^1 - w'\bar\phi\phi''\Big|_0^1 - w\bar\phi'\phi''\Big|_0^1 + \int_0^1 w|\phi''|^2 + \int_0^1\phi''w''\bar\phi + 2\int_0^1\phi''w'\bar\phi' + \int_0^1 wq|\phi|^2 = \lambda\int_0^1 w^2|\phi|^2$$

由(2.2)，有

$$\begin{aligned}&w(1)|\phi(1)|^2\cot\theta_2 - w(0)|\phi(0)|^2\cot\theta_1 - w'(1)\bar\phi\phi'(1)\cot\theta_4 + w'(0)\bar\phi\phi'(0)\cot\theta_3\\ &-w(1)|\phi'(1)|^2\cot\theta_4 + w(0)|\phi'(0)|^2\cot\theta_3 + \int_0^1 w|\phi''|^2 + \int_0^1\phi''w''\bar\phi + 2\int_0^1\phi''w'\bar\phi' + \int_0^1 wq|\phi|^2 = \lambda\int_0^1 w^2|\phi|^2\end{aligned}$$

根据 $w_0=\max\{|w(x)|:x\in[0,1]\}$，$w_1=\left(\int_0^1|w'|^2\right)^{1/2}$，$w_2=\left(\int_0^1|w''|^2\right)^{1/2}$，引理2.3和Cauchy-Schwarz不等式可得

$$\begin{aligned}&\Big|w(1)|\phi(1)|^2\cot\theta_2 - w(0)|\phi(0)|^2\cot\theta_1 - w'(1)\bar\phi\phi'(1)\cot\theta_4 + w'(0)\bar\phi\phi'(0)\cot\theta_3\\ &-w(1)|\phi'(1)|^2\cot\theta_4 + w(0)|\phi'(0)|^2\cot\theta_3 + \int_0^1 w|\phi''|^2 + \int_0^1\phi''w''\bar\phi + 2\int_0^1\phi''w'\bar\phi' + \int_0^1 wq|\phi|^2\Big|\\ &\le w_0\|\phi\|_C^2\left(|\cot\theta_2|+|\cot\theta_1|+|\cot\theta_4|+|\cot\theta_3|\right) + w_2\|\phi\|_C^2\left(|\cot\theta_4|+|\cot\theta_3|\right) + w_0N_q^\theta\\ &+w_2\sqrt{N_q^\theta} + 2w_1\sqrt{N_q^\theta}\frac{\sqrt{N_q^\theta}}{2} + w_0\|q\|_1.\end{aligned} \tag{2.12}$$

回顾(2.5)中 ε_1 的定义，可知

$$\int_0^1 w^2|\phi|^2 \ge \varepsilon_1 \int_{[0,1]\setminus\Omega(\varepsilon_1)} |\phi|^2 = \varepsilon_1\left(\int_{[0,1]}|\phi|^2 - \int_{\Omega(\varepsilon_1)}|\phi|^2\right) \ge \varepsilon_1\left(\frac{9}{16}\delta - mes\left(\Omega(\varepsilon_1)\right)\right) \ge \frac{7}{16}\varepsilon_1\delta.$$

再由(2.12)可知 $\operatorname{Im}\lambda\int_0^1 w^2|\phi|^2 \le w'(1)\bar{\phi}\phi'(1)\cot\theta_4 + w'(0)\bar{\phi}\phi'(0)\cot\theta_3 + \int_0^1 \phi'' w''\bar{\phi} + 2\int_0^1 \phi'' w'\bar{\phi}'$。即可得到(2.10) (2.11)，定理得证。

在下面的定理中，将考虑 $w(x)$ 仅变号一次的情况，即对于 $x_0 \in (0,1)$

$$(x-x_0)w(x) > 0, a.e.[0,1]. \tag{2.13}$$

选择 $\varepsilon_2 > 0$，使得

$$mes\Omega(\varepsilon_2) \le \frac{1}{8}\delta, \Omega(\varepsilon_2) = \left\{x\in[0,1]: w(x)(x-x_0) \le \varepsilon_2\right\}. \tag{2.14}$$

定理2.6 假设(2.13)成立，则对(1.1) (1.2)的任意一个非实特征值 λ，有

$$|\operatorname{Re}\lambda| \le \frac{16}{7\varepsilon_2\delta}\left[\left(|\cot\theta_1| + |\cot\theta_2| + 2|\cot\theta_3| + 2|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2 + 2\|\phi\|_C^2 + N_q^\theta + \|q\|_1\right], \tag{2.15}$$

$$|\operatorname{Im}\lambda| \le \frac{16}{7\varepsilon_2\delta}\left[\left(|\cot\theta_3| + |\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2 + 2\|\phi\|_C^2\right]. \tag{2.16}$$

证明：在方程(2.1)的两边同时乘以 $\bar{\phi}$，并在 $[x,1]$ 上进行积分，可得

$$\bar{\phi}\phi'''\Big|_x^1 - \bar{\phi}'\phi''\Big|_x^1 + \int_x^1|\phi''|^2 + \int_x^1 q|\phi|^2 = \lambda\int_x^1 w|\phi|^2,$$

由(2.2)，有

$$|\phi(1)|^2\cot\theta_2 - \bar{\phi}\phi'''(x) - |\phi'(1)|^2\cot\theta_4 + \bar{\phi}'\phi''(x) + \int_x^1|\phi''|^2 + \int_x^1 q|\phi|^2 = \lambda\int_x^1 w|\phi|^2,$$

再根据(2.3)，有

$$\left(|\cot\theta_2| + |\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2 - \bar{\phi}\phi'''(x) + \bar{\phi}'\phi''(x) + \int_x^1|\phi''|^2 + \int_x^1 q|\phi|^2 \ge \lambda\int_x^1 w|\phi|^2, \tag{2.17}$$

对(2.17)式的实部与虚部分离得到

$$\operatorname{Re}\lambda\int_x^1 w|\phi|^2 \le \left(|\cot\theta_2| + |\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2 + \operatorname{Re}\left(\bar{\phi}\phi'''(x)\right) + \operatorname{Re}\left(\bar{\phi}'\phi''(x)\right) + \int_x^1|\phi''|^2 + \int_x^1 q|\phi|^2, \tag{2.18}$$

$$\operatorname{Im}\lambda\int_x^1 w|\phi|^2 \le \operatorname{Im}\left(\bar{\phi}\phi'''(x)\right) + \operatorname{Im}\left(\bar{\phi}'\phi''(x)\right). \tag{2.19}$$

对(2.18)的两边在 $[x_0,1]$ 上积分，可得

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Re}\lambda|\int_{x_0}^1 (x-x_0)w|\phi|^2 = |\operatorname{Re}\lambda|\int_{x_0}^1\int_x^1 w|\phi|^2 \\ &\le \left(|\cot\theta_2| + |\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2 + \bar{\phi}\phi'(1)\cot\theta_4 + \bar{\phi}\phi'(x_0) + \int_{x_0}^1\int_x^1|\phi''|^2 + \int_{x_0}^1\int_x^1|q||\phi|^2. \end{aligned} \tag{2.20}$$

进一步得

$$|\operatorname{Re}\lambda|\int_{x_0}^1 (x-x_0)w|\phi|^2 = |\operatorname{Re}\lambda|\int_{x_0}^1\int_x^1 w|\phi|^2 \le \left(|\cot\theta_2| + 2|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2 + \bar{\phi}\phi'(x_0) + \int_{x_0}^1|\phi''|^2 + \int_{x_0}^1|q||\phi|^2.$$

同理，再对(2.18)的两边在 $[0,x_0]$ 上积分，可得

$$|\operatorname{Re}\lambda|\int_0^{x_0}(x-x_0)w|\phi|^2 = -|\operatorname{Re}\lambda|\int_0^{x_0}\int_0^x w|\phi|^2 \le \left(|\cot\theta_1| + 2|\cot\theta_3|\right)\|\phi\|_C^2 + \bar{\phi}\phi'(x_0) + \int_0^{x_0}|\phi''|^2 + \int_0^{x_0}|q||\phi|^2.$$

再根据(2.3)和Cauchy-Schwarz不等式得到

$$\left|\operatorname{Re}\lambda\right|\int_0^1 (x-x_0)w|\phi|^2 \le \left(|\cot\theta_1|+|\cot\theta_2|+2|\cot\theta_3|+2|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2+2\|\phi\|_C^2+N_q^\theta+\|q\|_1, \tag{2.21}$$

再用同样的方式处理虚部，从(2.19)可得

$$\left|\operatorname{Im}\lambda\right|\int_0^1 (x-x_0)w|\phi|^2 \le \left(|\cot\theta_3|+|\cot\theta_4|\right)\|\phi\|_C^2+2\|\phi\|_C^2. \tag{2.22}$$

回顾(2.14)中 ε_2 的定义，可知

$$\int_0^1 (x-x_0)w|\phi|^2 \ge \varepsilon_2 \int_{[0,1]\setminus\Omega(\varepsilon_2)} |\phi|^2 = \varepsilon_2\left(\int_{[0,1]}|\phi|^2-\int_{\Omega(\varepsilon_2)}|\phi|^2\right) \ge \varepsilon_2\left(\frac{9}{16}\delta - mes\left(\Omega(\varepsilon_2)\right)\right) \ge \frac{7}{16}\varepsilon_2\delta.$$

再由(2.21) (2.22)可得(2.15) (2.16)，定理得证。

基金项目

国家自然科学基金(11661059)，内蒙古自然科学基金(2017MS(LH)0103)资助。

参考文献 (References)

[1] Richardson, R.G.D. (1918) Contributions to the Study of Oscillatory Properties of the Solutions of Linear Differential Equations of the Second Order. *American Journal of Mathematics*, **40**, 283-316. https://doi.org/10.2307/2370485

[2] Turyn, L. (1980) Sturm-Liouville Problems with Several Parameters. *Journal of Differential Equations*, **38**, 239-259. https://doi.org/10.1016/0022-0396(80)90007-8

[3] Binding, P. and Volkmer, H. (1996) Eigencurves for Two-Parameter Sturm-Liouville Equations. *SIAM Review*, **38**, 27-48. https://doi.org/10.1137/1038002

[4] Binding, P. and Browne, P.J. (1988) Applications of Two Parameter Spectral Theory to Symmetric Generalised Eigenvalue Problem. *Applicable Analysis*, **29**, 107-142. https://doi.org/10.1080/00036818808839776

[5] Xie, B. and Qi, J. (2013) Non-Real Eigenvalues of Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Journal of Differential Equations*, **255**, 2291-2301. https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.06.013

[6] Behrndt, J., Chen, S., Philipp, F. and Qi, J. (2014) Estimates on the Non-Real Eigenvalues of Regular Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A*: *Mathematics*, **A144**, 1113-1126. https://doi.org/10.1017/S0308210513001212

[7] Han, X. and Gao, T. (2016) A Priori Bounds and Existence of Non-Real Eigenvalues of Fourth-Order Boundary Value Problem with Indefinite Weight Function. *Journal of Differential Equations*, **82**, 1-9.