**Advances in Applied Mathematics** 应用数学进展, 2017, 6(7), 857-860
Published Online October 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.67103

# The Analysis and Teaching of the Arbitrary Constant in the Usual Solution of First Order Ordinary Differential Equation

**Guixin Hu**

School of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University (HPU), Jiaozuo Henan
Email: huguixin2002@163.com

Received: Oct. 8th, 2017; accepted: Oct. 24th, 2017; published: Oct. 31st, 2017

## Abstract

**The arbitrary constant of the usual solution to first order ordinary differential equation is discussed in this paper. Firstly, the arbitrary constant in the usual solution does not necessarily take over all of the real numbers. Secondly, the arbitrary constant and special solution is not necessarily a one-to-one correspondence, that is, a constant does not determine a unique special solution, also is not that each special solution can be determined by the arbitrary constant in usual solution. In order to use the method of variation of constant to solve the first order linear differential equation, the canonical form of the usual solution to the homogeneous equation of first order linear differential equation is provided.**

## Keywords

**Arbitrary Constant, Usual Solution, Ordinary Differential Equation**

# 一阶常微分方程通解中任意常数的分析及教学

**胡贵新**

河南理工大学，河南 焦作
Email: huguixin2002@163.com

收稿日期：2017年10月8日；录用日期：2017年10月24日；发布日期：2017年10月31日

## 摘　要

本文主要从两个方面分析一阶常微分方程通解中任意常数的含义。一：任意常数不一定取遍所有的实数；

文章引用：胡贵新．一阶常微分方程通解中任意常数的分析及教学[J]．应用数学进展，2017，6(7)：857-860. DOI: 10.12677/aam.2017.67103

二：任意常数和方程的特解不一定是一一对应的，即取定一个任意常数不一定仅仅只确定一个特解，也不是每个特解都可以由通解中的任意常数可以确定。最后为方便使用常数变易法求解非齐次一阶线性微分方程的通解，举例阐明了一阶线性微分方程对应齐次方程通解的规范形式。

## 关键词

任意常数，通解，常微分方程



## 1. 引言

微分方程通解中的任意常数$C$的含义，是一个较为难理解的概念，很多初学者不能很好地理解其中的含义，这对于求解微分方程及理解微分方程的其他相关概念来讲有很大的影响。本文主要阐明微分方程不同通解的表达形式，其中任意常数$C$的含义有可能不同，通解中任意常数$C$的含义不外乎是本文所给出的这几种类型。通过几个有代表性的例题及问题的分析，阐明一阶常微分方程通解中任意常数的含义，这也有助于理解高阶微分方程和偏微分方程通解中任意常数的含义。鉴于本文的目的不是讲解解题方法，所以不需要构造过于复杂的方程，仅用极为常见的一阶微分方程，就可以很清楚地说明通解中任意常数与微分方程解的关系，解决学生在学习过程中对任意常数理解上的困惑，帮助教师在授课过程中讲解微分方程通解的相关概念。

## 2. 主要结果

### 2.1. 任意常数 $C$ 不一定取遍所有的实数

通解中的任意常数，并不是真正意义下的任意，下面例题的通解中任意常数$C$是不能取小于 0 的数。此例题根据文献[1]中微分方程章节的一个课后习题改写，注意$C$的取值范围。

例 1：求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{x+y}$的通解。

解：分离变量可得$\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$，两边积分得到方程的隐式解$\mathrm{e}^{-y}=\mathrm{e}^{x}+C$，于是变形可得到方程的解为

$$\left(\mathrm{e}^{x}+C\right)\mathrm{e}^{y}+1=0 \tag{1}$$

注意(1)中的$C$必须是大于 0 才能使得(1)式成立，这里的$C$不能取遍所有的实数。

### 2.2. 任意常数和方程的特解不一定是一对一的

#### 2.2.1. 一个固定的 $C$ 不一定仅确定一个特解

以文献[2]中第 11 页例 2 为例说明此问题。

例 2：求微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^{2}}}{\sqrt{1-x^{2}}}$的通解。

解：这是一个可分离变量的微分方程，很容易求得其通解为

$$\arcsin y = \arcsin x + C,\ -\pi < C < \pi, \tag{2}$$

将(2)式变形为

$$y^2 + x^2 - 2xy\cos C = \sin^2 C, \tag{3}$$

由(3)式可知，对于$(0,\pi)$内的每个$C$，可以确定两个特解，这是因为(3)中$C$的作用相当于(2)中$C$和$-C$的作用。另外，(3)式中的$C$可以取除$(2n+1)\pi$之外的所有实数，很明显，相差$2\pi$整数倍的无穷多个数只能确定同一个特解。方程还有常数解$y=\pm 1$不包含在上述通解中。综上分析，(3)式中任意常数$C$既不是任意的，也不是一个固定的$C$仅确定一个特解，而即使取遍所有$C$可以取得的值，也不能包含方程所有的通解。

#### 2.2.2. 通解不一定包含方程的全部解

文献[2]中对于通解和特解定义的描述是：$n$阶微分方程的含有$n$个独立的任意常数的解称为该方程的通解，如果解中不包含任意常数则称之为特解，通解不一定包含全部解，也即并不是每个特解都可以由通解中的任意常数可以确定。

例 3：微分方程$(x+y)y'=0$的解有$y=-x$及$y=C$ （$C$是任意常数)，显然通解$y=C$不包含特解$y=-x$，尽管这里的$C$取遍所有的实数，也不能包含特解$y=-x$。

### 2.3. 并不是任何一个微分方程都有通解或者通积分。

从微分方程解的存在性定理可知，当方程的系数函数满足一定条件，方程的解就存在，很自然的一个问题是，如果方程有解，是不是就一定有通解或者通积分呢？答案是否定的。下面的这个例子说明了方程只有一个解，没有含任意独立常数的通解或通积分。

例 4：求解方程$y'^2+y^2=0$。很容易求得此方程只有解$y=0$，没有通常意义下的通解。

### 2.4. 齐次方程通解的规范形式

在求解非齐次一阶线性微分方程或者可以化成线性方程通解的过程中，一般用常数变易法先求得对应齐次方程的通解，这个齐次方程通解的表达形式，对常数变易法求解非齐次方程的解很关键，如何表示才可以使得求解问题更方便、规范？下面仅通过一个例子给出对应齐次方程的通解的规范形式，这种规范形式对所有利用常数变易法求解非齐次方程的通解都适用。

例 5：一阶线性微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)$对应的齐次方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y \tag{4}$$

显然$y=0$是(4)的一个特解，当$y\neq 0$时，(4)变形为

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=p(x)\mathrm{d}x$$

积分得

$$\ln|y|=\int p(x)\mathrm{d}x+\ln|C|\ \ (C\neq 0) \tag{5}$$

式(5)中的$C$是不为零的任意常数，如果$C=0$，那么$\ln|C|$就没有意义了，式(5)中不包含$y=0$这个特解和负数解。将(5)式变形为

$$y=C\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x},\ (C\text{ 是任意常数}) \tag{6}$$

(6)中的任意常数 $C$ 是可以达到真正意义上的任意性，(6)包含了(4)的所有解。但如果将(5)写成

$$\ln|y| = \int p(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \tag{7}$$

也即

$$y = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x} \tag{8}$$

虽然这里的 $C_1$ 可以取遍所有的实数，但通解(8)不包含齐次方程所有的解(不包含 $y=0$ 和负数解)。

分析：在用常数变易法求解一阶线性微分方程的通解时，如果将(5)或者(8)中的 $C$ 变成函数 $C(x)$，不但问题变得复杂，而且得不到非齐次方程的通解，而(6)才是最标准的对应齐次方程通解的表达形式，这种形式的通解有助于下面的推导。

## 3. 本文结论

微分方程的初等解法在几乎所有常微分方程教材中都有详细的阐述，也是学习微分方程必须掌握的知识点，例如文献[3]给出了几类常微分方程详细的求解方法。但是很多学生在学习一阶常微分方程通解的求解过程中，对通解中任意常数的含义理解都不是很透彻，而且教师在授课过程中在有限的课时内也很难讲解透彻，一阶常微分方程解的表达形式不同，任意常数的含义也是不一样的，所表示的是不是方程的通解也跟表达形式有关。本文主要对一阶常微分方程通解中的任意常数进行了深刻的分析，通过相关问题及例题的分析，阐明了一阶线性微分方程对应齐次方程通解的规范形式，对微分方程通解的教学与学习有一定的帮助和参考作用。本文中仅通过几个在微分方程中极为常见的例子解释了通解中任意常数 $C$ 的含义，主要结论有：1) 任意常数不是真正意义下的任意性；2) 一个任意常数不一定仅仅确定一个特解，通解不一定包含方程所有的解；3) 即使方程有解，也不一定有通解或者通积分。最后为方便使用常数变易法求解非齐次一阶线性微分方程的通解，举例阐明了对应齐次方程通解的规范形式，在微分方程通解的学习过程中起到重要的辅助作用。

## 基金项目

青年基金项目 11502073，61403126；河南理工大学研究生精品课程；河南省教育厅科学技术研究重点项目 13B110031。

## 参考文献 (References)

[1] 同济大学数学系，编. 高等数学：上册[M]. 第七版. 北京：高等教育出版社, 2014: 297-360.

[2] 东北师范大学微分方程教研室. 常微分方程[M]. 第二版. 北京：高等教育出版社, 2005: 1-49.

[3] 王高雄，周之铭，朱思铭，王寿松，编. 常微分方程[M]. 第三版.北京：高等教育出版社, 2006: 30-74.

**知网检索的两种方式：**

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询