Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2017, 6(8), 946-955
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.68114

Trajectory Fitting Estimator for the Ornstein-Uhlenbeck Processes with Self-Interacting Drift

Yaohong Gan, Litan Yan

Department of Mathematics, Donghua University, Shanghai
Email: gyh787716923@163.com, litan-yan@hotmail.com

Received: Nov. 4th, 2017; accepted: Nov. 19th, 2017; published: Nov. 27th, 2017

Abstract

In this paper, we consider parameter estimation problem for the non-ergodic Ornstein-Uhlenbeck processes with self-interacting drift

$$X_T = Z_T + \theta\int_0^T\int_0^t (X_t - X_u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}t,\ T \ge 0$$

where Z_T is an α-stable Lévy motion with $\theta > 0$ is an unknown parameter. We consider the consistency and the asymptotic distributions of the weighted trajectory fitting estimator $\hat{\theta}_T$ of θ based on the continuous observation $\{X_t, t \in [0,T]\}$ as $T \to \infty$.

Keywords

Parameter Estimation, Consistency, Asymptotic

带交互项的Ornstein-Uhlenbeck过程的轨迹拟合估计

甘姚红，闫理坦

东华大学数学系，上海
Email: gyh787716923@163.com, litan-yan@hotmail.com

收稿日期：2017年11月4日；录用日期：2017年11月19日；发布日期：2017年11月27日

文章引用：甘姚红，闫理坦．带交互项的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的轨迹拟合估计[J]．应用数学进展，2017，6(8): 946-955. DOI: 10.12677/aam.2017.68114

摘　要

在本文中，我们研究带自排斥漂移项的非遍历的Ornstein-Uhlenbeck过程的参数估计问题

$$X_T = Z_T + \theta\int_0^T \int_0^t \left(X_t - X_u\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t,\ T \ge 0$$

其中 Z_T 是α-stable Lévy过程，$\theta > 0$ 是未知参数。我们讨论当 $T \to \infty$，基于 $\left\{X_t, t \in [0,T]\right\}$ 连续观测下的 θ 的加权轨迹拟合参数 $\hat{\theta}_T$ 的相合性和渐近分布。

关键词

参数估计，相合性，渐近性

1. 引言

在 1991 年，Durret 和 Rogers [1]对刻画聚合物形状变化的模型做了研究。在某种条件下，他们建立了一个解具有渐近性质的随机微分方程。

$$X_T = B_T + \int_0^T \int_0^t f\left(X_t - X_u\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t \tag{1}$$

其中 B 是 d 维的标准布朗运动，f 是 Lipschitz 连续的。如果 $f(x) = g(x)/\|x\|$，且 $g(x) \ge 0$，则 X_T 是由 Diaconis 和 Pemantle [2]研究提出的对一个过程的一个连续模拟。这个随机微分方程的轨道可以看作是聚合物模型。由于 X 是在其自身过去轨迹改变的环境中发展的，所以随机微分方程(1)定义成自交互扩散的，其中对函数 f 没有任何限定。若对任意的 $x \in R^d$，$x \cdot f(x) \ge 0$，换而言之，若它更倾向于远离其之前到达过的位置，称之为自排斥的；对任意的 $x \in R^d$，$x \cdot f(x) \le 0$，换而言之，若它更倾向于回到其之前到达过的位置，称之为自吸引的。在 1995 年，Cranston 和 Le Jan [3]扩展了该模型，对自吸引扩散作了介绍，并且研究了当 $d = 1$ 的两种情况：$f(x) = ax + b$ 和 $f(x) = \sigma\mathrm{sign}(x)$。

本文，我们研究由α-stable Lévy 过程驱动的带自排斥漂移项的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的参数估计问题：

$$X_T = Z_T + \theta\int_0^T \int_0^t \left(X_t - X_u\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}t, T \ge 0 \tag{2}$$

其中 $\theta > 0$ 是一个未知参数。

在这篇论文中，我们采用轨迹拟合和加权最小二乘相结合的参数估计方法。轨迹拟合法是 Kutoyants [4]第一次提出，并发展为连续扩散过程的极大似然估计。在[5]中研究了由α-stable Lévy 过程驱动的 Ornstein-Uhlenbeck 过程的加权轨迹拟合估计。

为了得到我们要的估计量，需要作以下的介绍：

$$\mathrm{d}X_T = \mathrm{d}Z_T + \theta Y_T\mathrm{d}T,\ T \ge 0 \tag{3}$$

且

$$A_T=\int_0^T Y_s\mathrm{d}s,\ T\ge 0$$

其中

$$Y_T=\int_0^T\left(X_T-X_s\right)\mathrm{d}s$$

方程(2)可以写成

$$X_T=\theta A_T+Z_T$$

令 ω_T 是正的确定的(加权)函数。用 ω_T 乘以上面的方程，得到

$$\omega_T X_T=\theta\omega_T A_T+\omega_T Z_T$$

θ 的加权轨迹拟合估计是使得以下式子最小

$$\int_0^T\left|\omega_t X_t-\left(\theta\omega_t A_t+\omega_t Z_t\right)\right|^2\mathrm{d}t$$

显然，当 θ 取(4)时，上面的式子取最小值

$$\hat{\theta}_T=\frac{\int_0^T\omega_t^2 X_t A_t\mathrm{d}t}{\int_0^T\omega_t^2 A_t^2\mathrm{d}t}=\theta+\frac{\int_0^T\omega_t^2 Z_t A_t\mathrm{d}t}{\int_0^T\omega_t^2 A_t^2\mathrm{d}t}\tag{4}$$

本文结构如下：在第 2 节包含了整篇文章中涉及的基础知识的介绍，主要包括α-stable Lévy 过程的随机积分和相关的矩不等式。在第 3 节分为两部分，首先，我们证明当 $\alpha\in(1,2)$ 时加权拟合估计量 $\hat{\theta}_T$ 的相合性，即，当 T 趋于无穷时，$\hat{\theta}_T$ 几乎必然收敛于 θ。其次，我们研究 $\hat{\theta}_T$ 的渐近分布。得到了

$$\frac{h_1(T)}{h_2(T)T^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\hat{\theta}_T-\theta\right)\Rightarrow\theta\frac{\zeta}{\eta_\infty}$$

其中 ζ 是服从 $S_\alpha(1,\beta,0)$ 且与 η_∞ 独立的随机变量。

2. 预备知识

在本文中我们用“P”表示“依概率收敛”，“$\Rightarrow$”表示“依分布收敛”。如果随机变量 η 满足以下形式的函数，则称该随机变量具有平稳分布，记作 $\eta\sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$：

$$\varphi_\eta(u)=E\exp\{iu\eta\}=\begin{cases}\exp\left\{-\sigma^\alpha|u|^\alpha\left(1-i\beta\,\mathrm{sgn}(u)\tan\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)+i\mu u\right\}, & 若\alpha\ne 1\\ \exp\left\{-\sigma|u|\left(1+i\beta\dfrac{2}{\pi}\mathrm{sgn}(u)\log|u|\right)+i\mu u\right\}, & 若\alpha=1\end{cases}$$

其中 $\alpha\in(0,2]$，$\sigma\in[-1,1]$ 和 $\mu\in(-\infty,\infty)$ 分别为平稳指数：尺度参数、偏态参数和位置参数。当 $\mu=0$，称随机变量 η 为严格α-stable。若 $\mu=0$，且 $\beta=0$，则称 η 为对称的α-stable。当且仅当 $\beta=0$ (对称情形)，称 η 为严格的 1-stable ($\alpha=1$)。

假设 $\{L_t,t\ge 0\}$ 是由三元组 $(0,\rho,\lambda)$ 生成的一个 Lévy 过程，则 L_t 的特征函数为：

$$\varphi_{L_t}(u)=E\left[\mathrm{e}^{iuL_t}\right]=\exp\left\{it\lambda u+t\int_{R\setminus\{0\}}\left(\mathrm{e}^{iux}-1-iux1_D(x)\right)\rho(\mathrm{d}x)\right\},\ u\in R\tag{5}$$

其中 $D=\{x:|x|\le 1\}$，ρ 是 Lévy 测度

$$\rho(\mathrm{d}x)=\frac{c_1}{x^{1+\alpha}}1_{(0,\infty)}(x)\mathrm{d}x+\frac{c_2}{|x|^{1+\alpha}}1_{(-\infty,0)}(x)\mathrm{d}x$$

其中$1<\alpha<2$，$c_1\ge 0$，$c_2\ge 0$且$c_1+c_2>0$。方程(5)可以写成形式

$$\varphi_{L_t}(u)=\exp\left\{it\left(\lambda+t\int_{|x|>1}x\rho(\mathrm{d}x)\right)u-t\sigma^{\alpha}|u|^{\alpha}\left[1-\beta\,\mathrm{sgn}(u)\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right]\right\}$$

其中

$$\sigma^{\alpha}=-(c_1+c_2)\Gamma(-\alpha)\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$$

且

$$\beta=(c_1-c_2)/(c_1+c_2)$$

由 ItÔ-Lévy 分解定理，有

$$L_t=\lambda t+\int_0^t\int_{|x|<1}x\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)+\int_0^t\int_{|x|\ge 1}xN(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

其中$N(\mathrm{d}t,\mathrm{d}x)$是泊松随机可测，定义如下

$$N((0,t],A)=\sum_{s\le t}1_A(\Delta L_s)$$

并且$A\in\mathcal{B}(R\setminus\{0\})$，$\Delta L_s=L_s-L_{s-}$表示$L_s$在时间$s$上的跳，$\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}s)$为补偿泊松随机侧度，定义如下

$$\tilde{N}((0,t],A)=N((0,t],A)-t\rho(A)$$

其中

$$\rho(A)=\int_A\rho(\mathrm{d}x)$$

ItÔ-Lévy 分解也可写成如下的形式：

$$\begin{aligned}L_t&=\lambda t+\int_0^t\int_{R\setminus\{0\}}x\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)+t\int_{|x|\ge 1}x\rho(\mathrm{d}x)\\&=\left(\lambda\int_{|x|\ge 1}x\rho(\mathrm{d}x)\right)t+\int_0^t\int_{R\setminus\{0\}}x\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)\end{aligned}$$

令

$$m=\lambda+\int_{|x|\ge 1}x\rho(\mathrm{d}x)$$

则有

$$m=\lambda+\frac{c_1-c_2}{\alpha-1}$$

记作

$$\tilde{Z}_t=\int_0^t\int_{R\setminus\{0\}}x\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}x)$$

则$\tilde{Z}_t$为α-stable Lévy 运动，对任意的$0\le s<t<\infty$，有$\tilde{Z}_t-\tilde{Z}_s\sim S_\alpha\left(\sigma(t-s)^{1/\alpha},\beta,0\right)$。我们可以标准化$\tilde{Z}_t$，定义$Z_t=\frac{\tilde{Z}_t}{\sigma}$，则$\{Z_t,t\ge 0\}$是标准的α-stable Lévy 运动，$Z_1$具有平稳分布$S_\alpha(1,\beta,0)$。显然，$L_t=mt+\sigma Z_t$且$E[L_t]=mt$。

3. 估计量的相合性和渐近性

本文中，我们假设 $\alpha\in(1,2)$，$\theta>0$。我们讨论方程(2)是由一个α-stable Lévy 过程 Z_T 驱动，且 $\theta>0$ 是一个可以通过观测 X 估计出的未知参数。由

$$\mathrm{d}Y_T = TX_T\mathrm{d}T \tag{6}$$

可得

$$\mathrm{d}Y_T = \theta TY_T\mathrm{d}T + T\mathrm{d}Z_T \tag{7}$$

将(3)代入(6)得到(7)。由常数变易法，可得(7)的显式解为

$$Y_T = \mathrm{e}^{\frac{\theta T^2}{2}}\int_0^T s\mathrm{e}^{\frac{-\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s,\ T\ge 0$$

令

$$\eta_T = \int_0^T s\mathrm{e}^{\frac{-\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s$$

因此，$\{\eta_T\}_{T\ge 0}$ 是 L^p 有界的、右极左连的、$\mathcal{F}_T$ 鞅($1<p<\alpha$)，且有

$$Y_T = \mathrm{e}^{\frac{\theta T^2}{2}}\eta_T$$

此外，η_T 是一个服从 $S_\alpha\left(\tau_T^{\frac{1}{\alpha}},\beta,0\right)$ 是随机变量，其中

$$\tau_T = \int_0^T\left|s\mathrm{e}^{\frac{-\theta s^2}{2}}\right|^\alpha \mathrm{d}s<\infty$$

由于

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T\left|s\mathrm{e}^{\frac{-\theta s^2}{2}}\right|^\alpha\mathrm{d}s = \left(\frac{\theta}{2}\alpha\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$$

当 T 趋于无穷，η_T 收敛于一个α-stable 随机变量，并且具有分布 $S_\alpha\left(\left(\left(\frac{\theta}{2}\alpha\right)^{-\frac{\alpha}{2}-1}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}},\beta,0\right)$。

因此，根据鞅收敛定理，有

$$\min_{T\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{-\theta T^2}{2}}Y_T = \int_0^T s\mathrm{e}^{\frac{-\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s := \eta_T,\quad P-a.s.$$

结合(3)和(4)，我们可以得到

$$\hat{\theta}_T-\theta = \frac{\int_0^T\omega_t^2 Z_t A_t\mathrm{d}t}{\int_0^T\omega_t^2A_t^2\mathrm{d}t}$$

记

$$h_1(T) = \int_0^T\omega_t^2t^{-2}\mathrm{e}^{\theta t^2}\mathrm{d}t$$

和

$$h_2(T)=\int_0^T \omega_t^2 t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}\,\mathrm{d}t$$

本文，我们总是假设加权函数 ω_t 是给定的。当 T 取无穷时，对每个 $K>0$ 和 $i=1,2$，有 $h_i(T)\to\infty$ 和 $h_i(K)/h_i(T)\to 0$。为了给出加权轨迹拟合估计量的渐近性质，我们需要下面著名的 Toeplitz 引理(见 Dietz 和 Kutoyants [6])。

引理 1 [5]： 如果 φ_T 是定义在 $[0,\infty)$ 的概率空间测度，且 $\varphi_T([0,T])=1$，当 $T\to\infty$ 时，对每个 $K>0$ 有 $\varphi_T([0,K])=0$，则对每个有界的可测函数 $f:[0,\infty)\to R$ 有

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^\infty f_t\varphi_T(\mathrm{d}t)=f_\infty$$

其中 $f_\infty:=\lim_{T\to\infty}f_t$ 为 f 的极限且存在。

3.1. 相合性

定理 1： 令 $\theta>0$，当 T 趋于无穷时，有

$$\hat{\theta}_T\to\theta,\quad P-a.s.$$

证明： 由 Toeplitz 引理，可得

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\frac{A_T}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}&=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T Y_s\mathrm{d}s}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}T^2}}=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\left(\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}s^2}Y_s-\eta_\infty+\eta_\infty\right)\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}s^2}\mathrm{d}s}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}T^2}}\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\left(\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}s^2}Y_s-\eta_\infty\right)\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}s^2}\mathrm{d}s+\int_0^T\eta_\infty\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}s^2}\mathrm{d}s}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}T^2}}\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{\lambda(T)}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}T^2}}\int_0^T\left(\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{2}s^2}Y_s-\eta_\infty\right)\frac{\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}s^2}}{\lambda(T)}\mathrm{d}s+\lim_{T\to\infty}\frac{\eta_\infty\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}s^2}\mathrm{d}s}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}T^2}}\\
&=\frac{\eta_\infty}{\theta},\quad P-a.s.
\end{aligned}$$

其中 $\lambda(T)=\int_0^T\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}s^2}\mathrm{d}s$。因为

$$\lim_{T\to\infty}\frac{Z_T}{T^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}T^2}}=0,\quad P-a.s.$$

所以，再次利用 Toeplitz 引理，有

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty}\hat{\theta}_T-\theta&=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\omega_t^2 Z_t A_t\mathrm{d}t}{\int_0^T\omega_t^2A_t^2\mathrm{d}t}\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T\frac{A_t}{t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}\frac{Z_t}{t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}\frac{\omega_t^2t^{-2}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}{h_1(T)}\mathrm{d}t}{\int_0^T\left(\frac{A_t}{t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}\right)^2\frac{\omega_t^2t^{-2}\mathrm{e}^{\theta t^2}}{h_1(T)}\mathrm{d}t}\\
&=0,\qquad P-a.s.
\end{aligned}$$

定理证明完毕。

3.2. 渐近性

下面，我们讨论估计量 $\hat{\theta}_T$ 的渐近分布。假设加权函数满足以下条件：

假设 1： 当 T 趋于无穷时，有

$$\frac{d\left(\omega_T^2\right)}{T\omega_T^2} \to 0.$$

我们可以得到下面几个结果：

定理 2： 如果 $\theta > 0$ 且上面的假设成立，则有

$$\frac{h_1(T)}{h_2(T)T^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right) \Rightarrow \theta\frac{\zeta}{\eta_\infty}.$$

其中 ζ 是服从 $S_\alpha(1,\beta,0)$ 的随机变量，且独立于 η_∞。

证明： 显然，有

$$\begin{aligned}\frac{h_1(T)}{h_2(T)T^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right) &= \frac{h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 Z_t A_t \mathrm{d}t}{h_1^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t^2 \mathrm{d}t} \\ &= \frac{\eta_T^2}{h_1^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t^2 \mathrm{d}t}\frac{h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_T\int_0^T \omega_t^2 A_t \mathrm{d}t}{\eta_T^2} \\ &\quad - \frac{\eta_T^2}{h_1^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t^2 \mathrm{d}t}\frac{h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 A_t\left(Z_T - Z_t\right)\mathrm{d}t}{\eta_T^2} \\ &:= F_T\left(G_T + H_T\right)\end{aligned} \tag{8}$$

运用 Toeplitz 引理，可得

$$\lim_{T\to\infty} h_1^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t^2 \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left(\frac{A_t}{t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}\right)^2 \frac{\omega_t^2 t^{-2}\mathrm{e}^{\theta t^2}}{h_1(T)}\mathrm{d}t = \frac{\eta_\infty^2}{\theta^2}, \quad P-a.s.$$

因此，有

$$\lim_{T\to\infty} F_T = \theta^2, \quad P-a.s. \tag{9}$$

接，我们讨论 G_T。记

$$G_T = \frac{h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_T\int_0^T \omega_t^2 A_t \mathrm{d}t}{\eta_T^2} = \frac{h_2^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t \mathrm{d}t}{\eta_T}\cdot\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_T}{\eta_T}$$

由 Toeplitz 引理，可知

$$\lim_{T\to\infty} h_2^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t \mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \frac{A_t}{t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}\cdot\frac{\omega_t^2 t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta}{2}t^2}}{h_2(T)}\mathrm{d}t = \frac{\eta_\infty}{\theta}$$

几乎必然。因此

$$\lim_{T\to\infty}\frac{h_2^{-1}(T)\int_0^T \omega_t^2 A_t \mathrm{d}t}{\eta_T}=\frac{1}{\theta},\quad P-a.s. \tag{10}$$

对 G_T 中的第二个因子，有

$$\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_T}{\eta_T}=\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T-Z_{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right)+T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_{T^{\frac{1}{\alpha}}}}{\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}+\left(\eta_T-\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right)}$$

我们可以得到以下几个结论：

(i) 随机变量 $T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T-Z_{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ 服从α-stable 分布 $S_\alpha\left(\sigma\left(1-T^{\frac{1}{\alpha}-1}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\beta,0\right)$，且当 $T\to\infty$ 时，随机变量弱收敛于一个具有平稳分布 $S_\alpha(1,\beta,0)$ 的随机变量 ζ。

(ii) 由强大数定律，有

$$\lim_{T\to\infty}T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_{T^{\frac{1}{\alpha}}}=0,\quad P-a.s.$$

(iii) $T^{-\frac{1}{\alpha}}\left(Z_T-Z_{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$ 和 $\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}$ 是相互独立的。

(iv) 显然有

$$\lim_{T\to\infty}\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}=\eta_\infty,\quad P-a.s.$$

(v) 当 T 趋于无穷时，有 $\eta_T-\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}$ 依概率收敛于零。

证明：我们证明(v)。由 η_∞ 的定义，可得

$$\eta_T-\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}=\int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T s\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s$$

因此，有

$$\left|\eta_T-\eta_{T^{\frac{1}{\alpha}}}\right|\le\left|\int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T s\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s\right| \tag{11}$$

由于

$$P\left\{\left|\int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T s\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{E\left|\int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T s\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s\right|}{\varepsilon}\le\frac{C}{\varepsilon}\left(\int_{T^{\frac{1}{\alpha}}}^T s\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}Z_s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\le\frac{C}{\varepsilon}\left(T^{\alpha+1}\mathrm{e}^{-\frac{\theta\alpha T^{\frac{2}{\alpha}}}{2}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

对任意给定的 $\varepsilon>0$ 和常数 $C>0$，当 T 趋于无穷时，上面的式子趋于零。可知，当 T 趋于无穷时，(11)收敛于零

由(i)、(ii)、(iii)、(iv)、(v)，可以得到以下结论

$$\frac{T^{-\frac{1}{\alpha}}Z_T}{\eta_T} \Rightarrow \frac{\zeta}{\eta_\infty} \tag{12}$$

其中 ζ 和 η_∞ 相互独立。结合(10)和(12)我们可以发现，当 T 趋于无穷时，有

$$G_T \Rightarrow \theta\frac{\zeta}{\eta_\infty} \tag{13}$$

最后，我们需要证明当 T 趋于无穷时，依概率有 $H_T \to 0$。首先

$$\begin{aligned}
&\left|h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 A_t(Z_T - Z_t)\mathrm{d}t\right| \\
&\le h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 |Z_T - Z_t|\mathrm{d}t\int_0^t Y_s\mathrm{d}s \\
&\le h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 |Z_T - Z_t|\mathrm{d}t\int_0^t \left|\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}Y_s\right|\mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s \\
&\le \sup_{t\ge0}\left|\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}Y_s\right|\cdot h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 |Z_T - Z_t|\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

显然 $\sup_{t\ge0}\left|\mathrm{e}^{-\frac{\theta s^2}{2}}Y_s\right|$ 是几乎必然有限的。因此，上面的不等式的最后一项因子

$$h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 |Z_T - Z_t|\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s$$

依概率收敛于零。并且，当 T 充分大时，有

$$\begin{aligned}
&E\left[h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 |Z_T - Z_t|\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s\right] \\
&\le h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 E\left[|Z_T - Z_t|\right]\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s \\
&\le C(1,\alpha)\frac{\int_0^T (T-t)^{\frac{1}{\alpha}}\omega_t^2\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s}{T^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}t} \\
&:= C(1,\alpha)B_T
\end{aligned}$$

其中 $C(1,\alpha) = \dfrac{4\Gamma\left(-\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\sqrt{\pi}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}$。然后，由洛必达法则可得

$$\begin{aligned}
\lim_{T\to\infty} B_T &= \lim_{T\to\infty}\frac{\int_0^T (T-t)^{\frac{1}{\alpha}}\omega_t^2\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s}{T^{\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}t} = \lim_{T\to\infty}\frac{\frac{1}{\alpha}\int_0^T (T-t)^{\frac{1}{\alpha}}\omega_t^2\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s}{\frac{1}{\alpha}T^{\frac{1}{\alpha}-1}\int_0^T \omega_t^2 t^{-1}\mathrm{e}^{\frac{\theta t^2}{2}}\mathrm{d}t + T^{\frac{1}{\alpha}-1}\omega_T^2\mathrm{e}^{\frac{\theta T^2}{2}}} \\
&\le \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\int_0^T \omega_t^2\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\theta s^2}{2}}\mathrm{d}s}{\omega_T^2\mathrm{e}^{\frac{\theta T^2}{2}}} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{\omega_T^2\int_0^T \mathrm{e}^{\frac{\theta t^2}{2}}\mathrm{d}t}{\theta\omega_T^2 T\mathrm{e}^{\frac{\theta T^2}{2}}} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

因此，当 T 趋于无穷时，有

$$h_2^{-1}(T)T^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^T \omega_t^2 A_t\left(Z_T - Z_t\right)\mathrm{d}t \to 0,\quad P-a.s.$$

于是，当 $T\to\infty$，有 $H_T\to 0$ 依概率。由(8)、(9)、(13)以及(14)，可以得到以下结论：

$$\frac{h_1(T)}{h_2(T)T^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\hat{\theta}_T - \theta\right)\Rightarrow \theta\frac{\zeta}{\eta_\infty}.$$

其中 ζ 是一个服从 $S_\alpha(1,\beta,0)$ 的随机变量，且独立于 η_∞。证明完毕。

我们考虑下面两个特殊的加权函数：

(i) 令 $\omega_T = T^p, p\ge 0$，有

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left(\omega_T^2\right)'}{T\omega_T^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{2pT^{2p-1}}{T^{2p+1}} = 0.$$

(ii) 令 $\omega_T = \mathrm{e}^{rT}, r\ge 0$ 可得

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left(\omega_T^2\right)'}{T\omega_T^2} = \lim_{T\to\infty}\frac{2r\mathrm{e}^{2rT}}{T\mathrm{e}^{2rT}} = 0.$$

基金项目

国家自然科学基金(No. 11571071)；上海市教育委员会科研创新项目(No. 12ZZ063)。

参考文献 (References)

[1] Durrett, R. and Rogers, L.C.G. (1991) Asymptotic Behavior of Brownian Polymer. *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 337-349. https://doi.org/10.1007/BF01300560

[2] Pemantle, R. (1988) Phase Transition in Reinforced Random Walk and RWWE on Trees. *Annals of Probability*, **16**, 1229-1241. https://doi.org/10.1214/aop/1176991687

[3] Cranston, M. and Y. Le Jan. (1995) Self-Attracting Diffusion: Two Case Studies. *Mathematische Annalen*, **303**, 87-93. https://doi.org/10.1007/BF01460980

[4] Kutoyants, Yu.A. (1991) A Minimum Distance Parameter Estimation for Diffusion Type Observations. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, *Serie I*, **312**, 637-642.

[5] Hu, Y. and Long, H. (2007) Parameter Estimation for Ornstein-Uhlenbeck Processes Driven by α-stable Lévy Motions. *Communications on Stochastic Analysis*, **1**, 175-192.

[6] Dietz, H.M. and Kutoyants, Yu.A. (1997) A Class of Minimum-Distance Estimators for Diffusion Processes with Ergodic Properties. *Statistics and Decisions*, **15**, 211-227. https://doi.org/10.1524/strm.1997.15.3.211

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org