Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(8), 942-945**
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.68113

Hans汉斯

Prime Ideals and Krull Dimension of $\mathbb{Z}[x]$

Rongzheng Jiao

School of Mathematics Science, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu
Email: rzjiao@hotmail.com

Received: Nov. 4th, 2017; accepted: Nov. 17th, 2017; published: Nov. 23rd, 2017

Abstract

Using elementary method, we get all the prime ideals of integral domain $\mathbb{Z}[x]$, which give an explicit proof of a result in Mumford's red book. We get the Krull dimension 2 of $\mathbb{Z}[x]$ by direct computation as a by-product.

Keywords

Integral Domain, Prime Ideal, Maximal Ideal, Krull Dimension, Euclid Domain

$\mathbb{Z}[x]$的素理想与Krull维数

焦荣政

扬州大学数学科学学院，江苏 扬州
Email: rzjiao@hotmail.com

收稿日期：2017年11月4日；录用日期：2017年11月17日；发布日期：2017年11月23日

摘 要

本文用初等方法考虑一元多项式环$\mathbb{Z}[x]$上的素理想、极大理想。进而得到$\mathbb{Z}[x]$的**Krull**维数为**2**。

关键词

整环，素理想，极大理想，Krull维数，欧几里得整环

文章引用: 焦荣政. $\mathbb{Z}[x]$的素理想与 Krull 维数[J]. 应用数学进展, 2017, 6(8): 942-945.
DOI: 10.12677/aam.2017.68113

1. 引言

有理整系数上一元多项式环 $\mathbb{Z}[x]$ 上的所有素理想是一个很有意思的问题。一个整系数多项式在 $\mathbb{Z}[x]$ 上生成的理想是不是 $\mathbb{Z}[x]$ 上的素理想有一些判别法则。如标准的 Eisenstein 判别法

定理 1： $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是一个整系数多项式。如果满足：

1) p 不是 a_n 的因子；2) p 是 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0$ 的因子；3) p^2 不是 a_0 的因子。

则 $f(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的不可约多项式。

再列举其它一些看上去比较简洁的判别准则。

A. Cohn 也有一个经典判别准则：

定理 2： 如果将素数 p 表示成十进制则 $p=a_m10^m+a_{m-1}10^{m-1}+\cdots+a_0$，则

则 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约。(文献[1])

1981 年 Brillhart, Filaseta, Odlyzko [2]将此结果推广成任意在 b -进制。

定理 3： 如果将素数 p 表示成 b -进制 $p=a_mb^m+a_{m-1}b^{m-1}+\cdots+a_0$，则

则 $f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_0$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约。

M. R. Murty [3]还进一步推广至有限域上的多项式。

2000 年 M. Cavachi [4]中证明了

定理 4： $f(x),g(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中互素的多项式，且 $\deg f(x)<\deg g(x)$，则

$f(x)+pg(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上除了有限个素数 p 外不可约。

2006 年 A. I. Bonciocat 与 N. C. Bonciocat [5]给出：

定理 5： 设 $f(x)=p^ma_nx^n+p^ea_{n-2}x^{n-2}+a_{n-3}x^{n-3}+\cdots+a_0$ 是整系数多项式。

其中 p 是素数，$n\ge 3$。且 a_0，a_{n-2}，a_n 均不是 0；而 a_{n-2}，a_n 都不是 p 的倍数。如果

$p^m>|a_na_{n-2}|p^{3e}+\sum_{i=3}^{n}|a_n^{i-1}a_{n-i}|p^{ie}$，且 m 与 e 的奇偶性不同。则 $f(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约。

2013 年 J. Harrington 与 L. Jones [6]给出了

定理 6： 设 $f(x)=x^n+k_{n-1}x^{n-1}+\cdots+k_1x+k_0$ 是整系数多项式。这里 $3\le k_{n-1}\le k_{n-2}\le k_1\le k_0\le 2k_{n-1}-3$。则 $f(x)$ 与 $f(x^2)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 上不可约。

由这些判别准则中任何一个，我们都可以造出 $\mathbb{Z}[x]$ 中有无穷多个不可约多项式。

如果 $g(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的不可约多项式，容易知道由 $g(x)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中生成的主理想 $(g(x))$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素理想，也就有商环 $Z[x]/(g(x))$ 是整环。但我们知道，整环 $\mathbb{Z}[x]$ 不是主理想环，比如容易验证 $\mathbb{Z}[x]$ 中由 2 和一个整系数多项式 x^3+2x+1 生成的理想 $(2,x^3+2x+1)$ 就不是由一个整系数多项式生成的主理想。另一个有意思的问题，$\mathbb{Z}[x]$ 中所有的素理想是些什么样子？

2. Z[x]中素理想分类

1) $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[x]$，$\mathbb{Z}$ 中的素数 p 是其中的素元，当然是$\mathbb{Z}$中不可约的。看成 $\mathbb{Z}[x]$ 中的元素时，在 $\mathbb{Z}[x]$ 中也是不可约的。所以其生成的理想看成 $\mathbb{Z}[x]$ 的理想时也是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素理想。所以$\{(p)\mid p$ 是素数$\}$是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素理想。

另外，由于 $\mathbb{Z}[x]$ 是整环，所以零理想是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素理想。代数几何中将 $\mathbb{Z}[x]$ 中的零理想看成 $\mathbb{Z}[x]$

的广点(generic point)。

2) 如果 $g(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的不可约多项式，则由它生成的主理想 $(g(x))$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素理想。

再来细究 $\mathbb{Z}[x]$ 中的极大理想 $\mathfrak{M}$，也就是在什么情形下，商环 $F=\mathbb{Z}[x]/(\mathfrak{M})$ 是一个域。我们先来考虑域 F 的特征 char(F)。熟知一个域的特征是 0 或者一个素数 q。首先我们来说明域 $F=\mathbb{Z}[x]/(\mathfrak{M})$ 的特征 char(F)不可能是 0。这是因为 $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}[x]$，如果 $\mathrm{char}(F)=0$，则有 $F\supset\mathbb{Q}$，这显然不对，因为分数跑到整数之外了，故域 F 的特征只能是素数 q。

可以做作自然同态映射 $F=\mathbb{Z}[x]/(\mathfrak{M})$ 到 $\bar{F}=\mathbb{Z}_q[x]/(\bar{\mathfrak{M}})$，实际上就是通常的整系数一元多项式模 q 映射，其中 $\bar{\mathfrak{M}}$ 是 $\mathfrak{M}$ 在 $\mathbb{Z}_q[x]$ 中的系数模 q 的自然像。显然域 F 到 $\bar{F}$ 的自然同态是满同态。由于 $\mathbb{Z}_q[x]/(\bar{\mathfrak{M}})$ 是域，这样理想 $\bar{\mathfrak{M}}$ 是整环 $\mathbb{Z}_q[x]$ 的极大理想，因而是素理想。顺便说一句，因为有限整环是域，所以整环 $\mathbb{Z}_q[x]$ 的素理想与极大理想本质上是一回事。注意到 $\mathbb{Z}_q[x]$ 是有限域 $\mathbb{Z}_q$ 上的一元多项式环，抽象代数里基本结果告诉我们，域上一元多项式环是欧几里得整环，从而是主理想整环，也就是 $\bar{\mathfrak{M}}$ 是整环 $\mathbb{Z}_q[x]$ 中的一个不可约多项式。任取此多项式在自然同态下的一个原像，容易用反证法证明该原像是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的一个不可约多项式，至此我们已经证明了 $\mathbb{Z}[x]$ 中的极大理想 $\mathfrak{M}=(q,f(x))$。

3) $\mathbb{Z}[x]$ 中的极大理想形如 $\mathfrak{M}=(q,f(x))$，其中了 q 是素数，$f(x)$ 是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的一个不可多项式，且 $f(x)$ 模 q 是 $\mathbb{Z}_q[x]$ 中的不可约多项式。

上面实际就给出 D. Munford 名著[7]中 Example H 的一个严格初等证明。

3. Z[x]的 Krull 维数

十九世纪末德国学派将代数集的维数定义为其函数域的超越次数，而上世纪 40 年代以来至今代数几何里采用的 Krull 维数：即函数环中素理想列的最大长度。

设 P 是环 R 的素理想，则素理想列 $P=P_0\supsetneq P_1\supsetneq\cdots$ 的长度上界称为 P 的高度，记为 $ht(P)$。对任一个理想 $I\subsetneq R$，称 $\inf\limits_{I\subset P} ht(P)$ 为理想 I 的高度 这里的 P 是 R 中素理想。R 中素理想列的长度的上界称为环 R 的 Krull 维数，记为 dim(R)。

由上节直接的讨论，我们知道 $\mathbb{Z}[x]$ 中的素理想列长度达到上确界 2 的链为 $0\subsetneq(q)\subsetneq(q,f(x))$，这里f(x)是 $\mathbb{Z}[x]$ 中的不可约多项式，且多项式 $f(x)$ 模 q 后是 $\mathbb{Z}_q[x]$ 中的一个不可约多项式。这样就有 $\mathbb{Z}[x]$ 的素理想列长度上确界为 2。也就是整环 $\mathbb{Z}[x]$ 的 Krull 维数是 2。我们这里给出的是最直接的方法来计算 $\mathbb{Z}[x]$ 的 Krull 维数。交换代数里面有更一般的结果，那涉及很专业的交换代数方法与技巧，有兴趣的可参看[8]推论 10.12。

致　谢

本工作得到江苏高校品牌专业工程资助(No. PPZY2015B109)。并感谢审稿人提出有益的修改意见。

参考文献 (References)

[1] 波利亚·舍贵. 分析中的问题与定理, 第二卷[M]. 张奠宙, 等, 译. 上海: 上海科技出版社, 1985.

[2] Brillhart, J., Filaseta, M. and Odlyzko, A. (1981) On Irreducibility Theorem of A. Cohn. *Canadian Journal of Mathematics*, **33**, 1055-1059. https://doi.org/10.4153/CJM-1981-080-0

[3] Murty, M.R. (2002) Prime Numbers and Irreducible Polynomials. *The American Mathematical Monthly*, **109**, 452-458. https://doi.org/10.2307/2695645

[4] Cavachi, M. (2000) On a Special Case of Hilbert's Irreduciblility Theorem. *Journal of Number Theory*, **82**, 96-99.

[5] Bonciocat, A.I. and Bonciocat, N.C. (2006) Some Classes of Irreducible Polynomials. *Acta Arithmetica*, **123**, 349-360. https://doi.org/10.4064/aa123-4-4

[6] Harrington, J. and Jones, L. (2013) A Class of Irreducible Polynomials. *Colloquium Mathematicum*, **132**, 113-119.

https://doi.org/10.4064/cm132-1-9

[7] Munford, D. (1999) The Red Book of Varieties and Schemes. 2nd Edition, Springer, Berlin, 74-75. https://doi.org/10.1007/b62130

[8] Eisenbud, D. (2004) Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry. Springer, Berlin.