Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2017, 6(8), 956-967**
Published Online November 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2017.68115

Hans汉斯

Existence and Uniqueness of Solutions to a Class of Multi-Point Fractional Boundary Value Problem on the Infinite Interval

Xiaohong Hao[1], Zhilong Cheng[2]

[1]Anhui Institute of Information Technology, Wuhu Anhui
[2]Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu
Email: haoxiaohong200866@163.com, zhilong0793@sina.cn

Received: Nov. 5th, 2017; accepted: Nov. 19th, 2017; published: Nov. 27th, 2017

Abstract

In this paper, we consider the following multi-point boundary value problem of fractional differential equation on the infinite interval

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right),\ t\in J:=(0,\infty),\ n-1<\alpha<n,$$

$$u(0)=D_{0+}^{\alpha-2}u(0)=D_{0+}^{\alpha-3}u(0)=\cdots=D_{0+}^{\alpha-(n-1)}u(0)=0,\ D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i D_{0+}^{\alpha-1}u(\xi_i)$$

By using Leray-Schauder Nonlinear Alternative theorem and Banach fixed point theorem, some results on the existence and uniqueness of solutions can be established.

Keywords

Fractional Differential Equation, Multi-Point Boundary Value Problem, Nonlinear Alternative Theorem, Banach Fixed Point Theorem

一类无穷区间上的多点分数阶边值问题解的存在性和唯一性

郝晓红[1]，程智龙[2]

[1]安徽信息工程学院，安徽 芜湖
[2]苏州科技大学数理学院，江苏 苏州
Email: haoxiaohong200866@163.com, zhilong0793@sina.cn

收稿日期：2017年11月5日；录用日期：2017年11月19日；发布日期：2017年11月27日

文章引用：郝晓红，程智龙. 一类无穷区间上的多点分数阶边值问题解的存在性和唯一性[J]. 应用数学进展，2017, 6(8): 956-967. DOI: 10.12677/aam.2017.68115

摘　要

本文讨论一类无穷区间上的多点分数阶边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right),\ t\in J:=(0,\infty),\ n-1<\alpha<n,$$

$$u(0)=D_{0+}^{\alpha-2}u(0)=D_{0+}^{\alpha-3}u(0)=\cdots=D_{0+}^{\alpha-(n-1)}u(0)=0,\ D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i D_{0+}^{\alpha-1}u(\xi_i)$$

的可解性。通过应用Leray-Schauder非线性抉择定理和Banach压缩映像原理，得到解的存在性和唯一性。最后给出例子说明定理的适用性。

关键词

分数阶微分方程，多点边值问题，非线性抉择定理，Banach压缩映像原理

1. 引言

由于分数计算理论和应用的快速发展，分数阶微分方程引起数学爱好者的极大兴趣。其主要应用于流体力学、分数控制系统、神经分数模型、力学、物理学、黏弹力学、化学工程和经济等方面。分数计算理论是解决微分、积分方程及其它特殊方程的有效工具。

但是分数阶微分方程边值问题的研究还处于初级阶段，尤其是无穷区间上的分数阶微分方程边值问题尚不多见。在以往的参考文献中，多是以下积分边值条件的模型。[1]中，赵和葛研究了无穷区间上的分数阶边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+f\left(t,u(t)\right)=0,\ t\in(0,\infty),\ \alpha\in(1,2),$$

$$u(0)=0,\ \lim_{t\to\infty}D_{0+}^{\alpha-1}u(t)=\beta u(\xi),$$

其中，$0<\xi<\infty$，D_{0+}^{α} 是 Riemann-Liouvill 分数阶导数。

[2]中，Nieto 研究了以下边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+f\left(t,u(t)\right)=0,\ t\in[0,1],\ n-1<\alpha<n,n\in N,$$

$$u(0)=u'(0)=u''(0)=\cdots=u^{n-2}(0)=0,\ u(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_i u(\eta_i),$$

其中，$n\geq 2, a_i>0, 0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{m-2}<1,\ f\in C\left([0,1]\times R,R\right)$。${}_R D_{0+}^{\alpha}, {}_C D_{0+}^{\alpha}$ 分别是 Riemann-Liouvill 分数阶导数和 Caputo 分数阶导数。

然而，据作者所知，到目前还没有文献研究以下无穷区间上的分数阶边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)=f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right),\ t\in J:=(0,\infty),\ n-1<\alpha<n, \tag{1.1}$$

$$u(0)=D_{0+}^{\alpha-2}u(0)=D_{0+}^{\alpha-3}u(0)=\cdots=D_{0+}^{\alpha-(n-1)}u(0)=0,\ D_{0+}^{\alpha-1}u(\infty)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i D_{0+}^{\alpha-1}u(\xi_i) \tag{1.2}$$

其中 $n-1<\alpha\le n, n\in N, n>2, 0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_m<+\infty, \alpha_i>0, i=1,2,\cdots,m$ 。$f\in C(J\times R\times R,R)$。$D_{0+}^{\alpha}$ 和 I_{0+}^{α} 分别是 Riemann-Liouvill 分数阶导数和分数阶积分。

当 $\alpha=n$ 时，问题(1.1) (1.2)是 n 阶多点边值问题，很多文献已做过研究，如[3] [4] [5] [6]。

本文应用非线性抉择定理和 Banach 压缩映像原理研究边值问题(1.1) (1.2)的解的存在性和唯一性。

本文结构如下：第二部分给出背景材料和预备知识；第三部分给出所研究问题(1.1) (1.2)的解的存在性和唯一性；最后给出例子说明我们的主要结论。

2. 预备知识

定义 2.1 ([7])函数 $y:(0,+\infty)\to R$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分为

$$I_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s,\ t>0,$$

其中 $\alpha>0$，$\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数。

定义 2.2 ([7])函数 $y:(0,+\infty)\to R$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 分数阶导数为

$$D_{0+}^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n\int_0^t\frac{y(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}s,$$

其中 $\alpha>0$，$\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数，$n=[\alpha]+1$。

引理 2.1 ([7])设 $f\in C[0,1], q\ge p\ge 0$，则

$$D_{0+}^{p}I_{0+}^{q}f(t)=I_{0+}^{q-p}f(t).$$

引理 2.2 ([7])若 $\alpha>0$，则分数阶微分方程 $D_{0+}^{\alpha}u(t)=0$ 当且仅当

$$u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n},$$

其中 $c_i\in R, i=1,2,\cdots,n$，其中 n 是大于等于 α 的最小整数。

引理 2.3 ([8])若 $\alpha>0, u\in C(0,1)\cap L(0,1),\ {}^cD_{0+}^{\alpha}u(t)\in C(0,1)\cap L(0,1)$，存在 $c_i, i=1,2,\cdots,N$ 使得

$$I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N},$$

其中 $c_i\in R, i=0,1,2,\cdots,N-1$，$N=[\alpha]+1$。

定义空间

$$X=\left\{u(t)\in C(J,R):\sup_{t\in J}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}<+\infty, D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\in C(J,R), \sup_{t\in J}\left|D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right|<+\infty\right\}$$

模为 $\|u\|=\max\left\{\sup_{t\in J}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}, \sup_{t\in J}\left|D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right|\right\}$。

定理 2.1 ([9])设 X 是一个实 Banach 空间，Ω 是 X 中的有界开子集，$0\in\Omega, F:\bar{\Omega}\to X$ 是一个全连续算子。则 $\exists x\in\partial\Omega, \lambda>1, s.t. F(x)=\lambda x$，或存在不动点 $x^*\in\bar{\Omega}$。

引理 2.4 ([9]) $(X,\|\bullet\|)$ 是 Banach 空间。

证明：设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是空间 $(X,\|\bullet\|)$ 中的 Cauchy 序列，则对 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$，$s.t.$ 当 $\forall t\in J$，$n,m>N$，有 $\left|\frac{u_n(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{u_m(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon$，则 $\left\{\frac{u_n(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 及 $u(t)\in X$。并且 $\left\{D_{0+}^{\alpha-1}u_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $v\in X$，

并且 $\sup_{t\in J}|v(t)|<+\infty$ 。

接下来证明 $v=D_{0+}^{\alpha-1}u$ 。

令 $\sup_{t\in J}\frac{|u(t)|}{1+t^{\alpha-1}}=\frac{M_0}{2}$ ，则对于常数 $\frac{M_0}{2}>0, t\in J, \exists N>0$ ， $s.t.$ 当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{u_n(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|<\frac{M_0}{2}.$$

令 $M_i=\sup_{t\in J}\frac{|u_i(t)|}{1+t^{\alpha-1}}, i=1,2,\cdots,N$ ， $M=\max\{M_i, i=1,2,\cdots,N\}$ ，易得 $\frac{|u_n(t)|}{1+t^{\alpha-1}}\le M, n=1,2,\cdots$ 。于是对 $\forall t\in J, n-1<\alpha<n$ ，有

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1(t-s)^{n-1-\alpha}(1+s^{\alpha-1})\frac{|u_n(s)|}{1+s^{\alpha-1}}\mathrm{d}s\right|\le M\int_0^t(t-s)^{n-1-\alpha}(1+s^{\alpha-1})\mathrm{d}s\\&=M\left[t^{n-\alpha}\int_0^1(1-\tau)^{n-1-\alpha}\mathrm{d}\tau+t^{n-1}\int_0^1(1-\tau)^{n-1-\alpha}\tau^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\right]\\&=\frac{M}{n-\alpha}t^{n-\alpha}+B(\alpha,n-\alpha)Mt^{n-1},\end{aligned}$$

其中， $B(\alpha,n-\alpha)$ 是 Beta 函数。根据 $\left\{D_{0+}^{\alpha-1}u_n(t)\right\}_{n=1}^{\infty}$ 的一致收敛性及 Lebesgue 控制收敛定理，可得

$$\begin{aligned}v(t)&=\lim_{n\to+\infty}D_{0+}^{\alpha-1}u_n(t)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n-1}\int_0^t(t-s)^{n-1-\alpha}(1+s^{\alpha-1})\frac{u_n(s)}{1+s^{\alpha-1}}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n-1}\int_0^t(t-s)^{n-1-\alpha}(1+s^{\alpha-1})\frac{u(s)}{1+s^{\alpha-1}}\mathrm{d}s\\&=D_{0+}^{\alpha-1}u(t).\end{aligned}$$

当 $\alpha=n$ 时，有

$$v(t)=\lim_{n\to+\infty}u_n^{(n-1)}(t)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^{n-1}\lim_{n\to+\infty}u_n(t)=u^{(n-1)}(t).$$

所以， $(X,\|\bullet\|)$ 是 Banach 空间。

注意到 Arzela-Ascoli 定理不能在空间 X 中使用，为此，引入以下改进的紧凑型标准。

引理 2.5 ([10]) 设 $Z\subseteq Y$ 是有界集，那么，当下述条件成立时， Z 在 Y 中是相对紧的：

(i) 对 $\forall u(t)\in Z$ ， $\frac{u(t)}{1+t^{\alpha-1}}$ 和 $D_{0+}^{\alpha-1}u(t)$ 在 J 的任何紧区间上是等度连续的。

(ii) 对于给定的 $\varepsilon>0$ ， $\exists$ 常数 $T=T(\varepsilon)>0$ ， $s.t.$ 对 $\forall t_1,t_2\ge T, u(t)\in Z$ ，有

$$\left|\frac{u(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}-\frac{u(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon,\ \left|D_{0+}^{\alpha-1}u(t_1)-D_{0+}^{\alpha-1}u(t_2)\right|<\varepsilon.$$

3. 主要结论

令 $A=\left(1+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\right)\int_0^{\infty}\left((1+s^{\alpha-1})a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}\left((1+s^{\alpha-1})a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s,$

$$B=\left(1+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\right)\int_0^{\infty}c(s)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s.$$

假设以下条件成立：

(H_1)存在非负函数 $a(t),b(t),c(t)\in L^1(J)$, s.t.

$$|f(t,x,y)|\le a(t)|x|+b(t)|y|+c(t),\ \int_0^{+\infty}\left(\left(1+t^{\alpha-1}\right)a(t)+b(t)\right)\mathrm{d}t<\Gamma(\alpha),\ \int_0^{+\infty}c(t)\mathrm{d}t<+\infty.$$

(H_2)假设 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i<1,\ A<1$。

引理 3.1 假设(H_1) (H_2)成立。问题(1.1) (1.2)等价于积分方程

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^{\xi_i}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right.\\&\left.-\int_0^{\infty}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right]t^{\alpha-1}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

证明： 由条件(H_1)，

$$\int_0^{\infty}\left|f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right)\right|\mathrm{d}t\le\|u\|\int_0^{\infty}\left(\left(1+t^{\alpha-1}\right)a(t)+b(t)\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}c(t)\mathrm{d}t<+\infty.$$

所以(3.1)定义有意义。

根据引理 2.3，

$$u(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_nt^{\alpha-n}.\tag{3.2}$$

由条件(1.2)，可得

$$c_2=c_3=\cdots=c_n=0.\tag{3.3}$$

$$c_1=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^{\xi_i}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^{\infty}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right].\tag{3.4}$$

将(3.3) (3.4)带入(3.2)，得

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\left[\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^{\xi_i}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right.\\&\left.-\int_0^{\infty}f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right]t^{\alpha-1}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

定义积分算子 $T:X\to X$

$$
\begin{aligned}
Tu(t)=&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m \alpha_i\right)}\left[\sum_{i=1}^m \alpha_i\int_0^{\xi_i} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right.\\
&\left.-\int_0^{\infty} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right]t^{\alpha-1}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

引理 3.1 证明算子 T 的不动点就是问题(1.1) (1.2)的解。

引理 3.2 假设(H_1) (H_2)成立。则 $T:\bar{\Omega}\to X$ 一致连续。其中 $\Omega=\{u\in X,\|u\|<R\}$，

$$R\le \frac{B}{1-A},\ A<1.$$

证明： 第一步：证明 $T:\bar{\Omega}\to X$ 是相对紧的。

方便起见，在这一步中，记

$$G=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m \alpha_i\right)}\left|\sum_{i=1}^m \alpha_i\int_0^{\xi_i} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s-\int_0^{\infty} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right|$$

设 V 是 $\bar{\Omega}$ 中的子集，$I\subset J$ 是一个紧区间，$t_1,t_2\in I,t_1<t_2$，则对 $\forall u(t)\in V$，有

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\le&\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right.\\
&\cdot f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\\
&\left.-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}} f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\mathrm{d}s\right|+G\cdot\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\
\le&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t_1}\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right.\\
&\left.-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s+G\cdot\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|,
\end{aligned}
$$

且有

$$\left|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_2)-D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_1)\right|\le\int_{t_1}^{t_2}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s.$$

注意到对 $\forall u(t)\in V$，有 $f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right)$ 在 I 中有界。

故得 $\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}},D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)$ 在 I 中一致连续。

接下来证明对 $\forall u(t)\in V$，有 $f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right)$ 满足引理 2.5 的条件(ii)。

根据条件(H_1)，

$$\int_0^{\infty}\left|f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right)\right|\mathrm{d}t\le\|u\|\int_0^{\infty}\left(\left(1+t^{\alpha-1}\right)a(t)+b(t)\right)\mathrm{d}t+\int_0^{\infty}c(t)\mathrm{d}t<A\|u\|+B\le R,$$

于是，对 $\forall\varepsilon>0$，存在常数 $L>0$，使得

$$\int_L^{\infty}\left|f\left(t,u(t),D_{0+}^{\alpha-1}u(t)\right)\right|\mathrm{d}t<\varepsilon. \tag{3.7}$$

另一方面，因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$，故 $\exists T_1>0, s.t. \forall t_1,t_2\ge T_1$，有

$$\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\le\left|1-\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon. \tag{3.8}$$

类似地，因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(t-L)^{\alpha-1}}{1+t^{\alpha-1}}=1$，故 $\exists T_2>L>0, s.t. \forall t_1,t_2\ge T_2, 0\le s\le L$，有

$$\begin{aligned}\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|&\le\left|1-\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\&\le\left|1-\frac{(t_2-L)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\right|+\left|1-\frac{(t_1-L)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|<\varepsilon.\end{aligned} \tag{3.9}$$

令 $T>\max\{T_1,T_2\}$，则对 $\forall t_1,t_2\ge T$，根据(3.7)~(3.9)，可得

$$\begin{aligned}\left|\frac{Tu(t_2)}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t_1)}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^{t_1}\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^{t_2}\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s+G\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\&\le\frac{\max\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|}{\Gamma(\alpha)}\int_0^L\left|\frac{(t_2-s)^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{(t_1-s)^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^{\infty}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_L^{\infty}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s+G\left|\frac{t_2^{\alpha-1}}{1+t_2^{\alpha-1}}-\frac{t_1^{\alpha-1}}{1+t_1^{\alpha-1}}\right|\\&\le\frac{\max\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|}{\Gamma(\alpha)}L\varepsilon+\frac{2\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}+G\varepsilon\\&=\left(\frac{\max\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|}{\Gamma(\alpha)}L+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}+G\right)\varepsilon,\end{aligned}$$

且有

$$\left|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_2)-D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t_1)\right|\le\int_{t_1}^{t_2}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s\le\int_L^{\infty}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s<\varepsilon.$$

根据引理 2.5 知，TV 是相对紧的。

第二步：证明 $T:\bar{\Omega}\to X$ 连续。

设 $u_n,u\in\bar{\Omega}, n=1,2,\cdots$，且当 $n\to+\infty$ 时，有 $\|u_n-u\|\to0$，则

$$\left|\frac{Tu_n(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|f\left(s,u_n(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_n(s)\right)\right|\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}\left|f\left(s,u_n(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_n(s)\right)\right|\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\cdot\int_0^{\xi_i}\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left|f\left(s,u_n(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_n(s)\right)\right|\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty\left|f\left(s,u(s),D_{0+}^{\alpha-1}u(s)\right)\right|\mathrm{d}s$$
$$\le\frac{2R}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t c(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{2R\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{2\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{2}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s+\frac{2R}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^\infty\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s$$
$$\le\frac{2R}{\Gamma(\alpha)}A+\frac{2}{\Gamma(\alpha)}B<+\infty.$$

且有

$$\left|\frac{Tu_n(t)}{1+t^{\alpha-1}}-\frac{Tu(t)}{1+t^{\alpha-1}}\right|\le 2R\int_0^t\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+2\int_0^t c(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{2R\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+2\frac{\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{2}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^\infty\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{2}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s$$
$$\le 2RA+2B<+\infty.$$

根据 Lebesgue 控制收敛定理，T 连续。

综上，T 全连续。

定理 3.1 设(H_1)，(H_2)成立，则边值问题(1.1) (1.2)至少有一个解 $u\in X$ 。

证明： Ω 如引理 3.2 中定义。设 $u\in\partial\Omega,\lambda>1,s.t.Tu=\lambda u$ ，则

$$\frac{|Tu(t)|}{1+t^{\alpha-1}}\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\|u\|\int_0^t\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t c(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\|u\|\int_0^\infty\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^\infty c(s)\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\|u\|\int_0^{\xi_i}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^m\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^m\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s$$

$$\le\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\right)\|u\|\int_0^{\infty}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\|u\|\int_0^{\xi_i}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s+\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\right)\int_0^{\infty}c(s)\mathrm{d}s$$

$$\le AR+B\le A\frac{B}{1-A}+B=R,$$

且有

$$\left|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)\right|\le\|u\|\int_0^{t}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\int_0^{t}c(s)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\|u\|\int_0^{\infty}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\infty}c(s)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\|u\|\int_0^{\xi_i}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s$$

$$\le\left(1+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\right)\|u\|\int_0^{\infty}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\|u\|\int_0^{\xi_i}\left(\left(1+s^{\alpha-1}\right)a(s)+b(s)\right)\mathrm{d}s$$

$$+\frac{\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}c(s)\mathrm{d}s+\left(1+\frac{1}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\right)\int_0^{\infty}c(s)\mathrm{d}s$$

$$\le AR+B=R.$$

故

$$\lambda R=\lambda\|u\|=\|Tu\|=\max\left\{\sup\frac{|Tu(t)|}{1+t^{\alpha-1}},\sup\left|D_{0+}^{\alpha-1}Tu(t)\right|\right\}\le R.$$

得到 $\lambda\le 1$, 这与 $\lambda>1$ 矛盾。根据引理 1.1， $\bar{\Omega}$ 中存在一个不动点。故问题(1.1) (1.2)在 X 中至少有一

个解。

定理 3.2 设(H_1)，(H_2)以及下面的(H_3)成立，则边值问题(1.1) (1.2)有唯一解 $u \in X$ 。

(H_3) 存在非负函数 $l_1(t), l_2(t) \in L^1(J)$ 使得

$$\left|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)\right| \le l_1(t)\left|x_1-x_2\right|+l_2(t)\left|y_1-y_2\right|$$

及

$$\int_0^{\infty}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t<\Gamma(\alpha),\ \int_0^{\xi_i}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t<+\infty,$$

$$k=2P\int_0^{\infty}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t+2Q\int_0^{\xi_i}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t<1,$$

成立。其中 $P=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}+\dfrac{2}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}+1,\ Q=\dfrac{2\left|\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right|}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}$ 。

证明： 对 $\forall u_1,u_2 \in X$ ，有

$$\begin{aligned}
\left\|Tu_1-Tu_2\right\| &\le \sup_{t\in J}\frac{\left|Tu_1-Tu_2\right|}{1+t^{\alpha-1}}+\sup_{t\in J}\left|D_{0+}^{\alpha-1}Tu_1-D_{0+}^{\alpha-1}Tu_2\right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|f\left(s,u_1(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_1(s)\right)-f\left(s,u_2(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{2\sum_{i=1}^{m}\alpha_i}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\xi_i}\left|f\left(s,u_1(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_1(s)\right)-f\left(s,u_2(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\quad+\frac{2}{\Gamma(\alpha)\left(1-\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\right)}\int_0^{\infty}\left|f\left(s,u_1(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_1(s)\right)-f\left(s,u_2(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\quad+\int_0^t\left|f\left(s,u_1(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_1(s)\right)-f\left(s,u_2(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\le P\int_0^{\infty}\left|f\left(s,u_1(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_1(s)\right)-f\left(s,u_2(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\quad+Q\int_0^{\xi_i}\left|f\left(s,u_1(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_1(s)\right)-f\left(s,u_2(s),D_{0+}^{\alpha-1}u_2(s)\right)\right|\mathrm{d}s \\
&\le 2P\left\|u_1-u_2\right\|\int_0^{\infty}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t \\
&\le 2Q\left\|u_1-u_2\right\|\int_0^{\xi_i}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t \\
&\le \left\{2P\int_0^{\infty}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t+2Q\int_0^{\xi_i}\max\left\{\left(1+t^{\alpha-1}\right)l_1(t),l_2(t)\right\}\mathrm{d}t\right\}\left\|u_1-u_2\right\| \\
&= k\left\|u_1-u_2\right\|.
\end{aligned}$$

因为 $k<1$，所以 T 收敛。根据 Banach 不动点定理，可得 T 有唯一不动点。故边值问题(1.1) (1.2)有唯一解。

4. 应用

例 4.1 考虑边值问题

$$D_{0+}^{\frac{5}{2}}u(t)=\frac{\sqrt{\left|u(t)D_{0+}^{\frac{3}{2}}u(t)\right|}}{4\mathrm{e}^{t^{\frac{3}{2}}}},\ t\in J:=(0,\infty),$$

$$u(0)=D_{0+}^{\frac{1}{2}}u(0)=0,\ D_{0+}^{\frac{3}{2}}u(\infty)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i D_{0+}^{\frac{3}{2}}u(\xi_i),$$

其中，$\alpha=\frac{5}{2},\ f(t,x,y)=\frac{\sqrt{\left|u(t)D_{0+}^{\frac{3}{2}}u(t)\right|}}{4\mathrm{e}^{t^{\frac{3}{2}}}}.$

因为

$$|f(t,x,y)|\le\frac{1}{8\mathrm{e}^{t^{\frac{3}{2}}}}|x|+\frac{1}{8\mathrm{e}^{t^{\frac{3}{2}}}}|y|,$$

通过简单计算可知，

$$\int_0^\infty\left(\left(1+s^{\frac{3}{2}}\right)\frac{1}{8\mathrm{e}^{t^{\frac{3}{2}}}}+\frac{1}{8\mathrm{e}^{t^{\frac{3}{2}}}}\right)\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)<\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right)=\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

故定理 3.1 的条件成立。所以边值问题(1.1) (1.2)至少有一个解。

基金项目

安徽省自然科学基金项目支持(KJ2016A071)；校质量工程项目支持(2016xjjyxm04)。

参考文献 (References)

[1] Zhao, X.K. and Ge, W.G. (2010) Unbounded Solutions for a Fractional Boundary Value Problems on the Infinite Interval. *Acta Applicandae Mathematicae*, **109**, 495-505. https://doi.org/10.1007/s10440-008-9329-9

[2] El-Shahed, M. and Nieto, J.J. (2010) Nontrivial Solutions for a Nonlinear Multi-Point Boundary Value Problem of Fractional Order. *Computers & Mathematics with Applications*, **59**, 3438-3443. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.03.031

[3] Guo, Y., Ji, Y. and Zhang, J. (2007) Three Positive Solutions for a Nonlinear *n*th-Order *m*-Point Boundary Value Problem. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **68**, 3485-3492. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.03.041

[4] Zhang, X.M., Feng, M.Q. and Ge, W.G. (2009) Existence and Nonexistence of Positive Solutions for a Class of nth-Order Three-Point Boundary Value Problems in Banach Spaces. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 584-597. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.12.028

[5] Du, Z.J., Liu, W.B. and Lin, X.J. (2007) Multiple Solutions to a Three-Point Boundary Value Problem for Higher-Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **335**, 1207-1218. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.02.014

[6] Wong, J.Y. (2008) Multiple Fixed-Sign Solutions for a System of Higher Order Three-Point Boundary-Value Problems with Deviating Arguments. *Computers & Mathematics with Applications*, **55**, 516-534. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.04.023

[7] Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev, O.I. (1993) Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. Gordon and Breach, Yverdon.

[8] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. In: *Mathematics in Science and Engineering*, Vol. 198, Academic Press, New York, London, Toronto.

[9] Bai, Z.B. and Lu, H. (2005) Positive Solutions for Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **311**, 495-505. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.02.052

[10] Su, X.W. and Zhang, S.Q. (2011) Unbounded Solutions to a Boundary Value Problem of Fractional Order on the Half-Line. *Computers & Mathematics with Applications*, **61**, 1079-1087. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.12.058