

Numerical Analysis of Backward Euler-Galerkin Method for Water Contamination Problem

Nazakat Adil, Emam Mamat, Abdirixit Abduwali*

College of Mathematics and Systems Science, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang
Email: *rashit@xju.edu.cn

Received: Nov. 29th, 2017; accepted: Dec. 15th, 2017; published: Dec. 22nd, 2017

Abstract

The Galerkin finite element method for the diffusion of water contamination is analyzed. The time variable is discretized by backward Euler method. Finally, we did numerical simulations with a concrete example.

Keywords

Water Contamination Diffusion Equation, Galerkin Finite Element Method, Backward Euler Method

水污染问题的向后Euler-Galerkin方法及数值模拟

娜扎开提·阿迪力, 伊马木·麦麦提, 阿布都热西提·阿布都外力*

新疆大学数学与系统科学学院, 新疆 乌鲁木齐
Email: *rashit@xju.edu.cn

收稿日期: 2017年11月29日; 录用日期: 2017年12月15日; 发布日期: 2017年12月22日

摘要

分析了浅水流动中的水污染扩散问题的Galerkin有限元方法, 对于时间变量用向后Euler法进行离散。最后通过具体例子进行了数值模拟。

文章引用: 娜扎开提·阿迪力, 伊马木·麦麦提, 阿布都热西提·阿布都外力. 水污染问题的向后 Euler-Galerkin 方法及数值模拟[J]. 应用数学进展, 2017, 6(9): 1146-1150. DOI: 10.12677/aam.2017.69139

关键词

水污染扩散方程, Galerkin有限元方法, 向后Euler法

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

浅水流中的污染物扩散问题有比较重要的实用价值。在相对较浅的自由表面流动中, 水平速度为主要分量, 问题可以适当的近似为二维问题。Navier-Stokes 方程是流体力学中的基本方程, 因此可当该方程为出发点, 应用沿深度积分的方法可得到浅水流方程[1]。浅水流作为污染物运输的载体, 可以写出一种污染物扩散问题的方程[1]:

$$\frac{\partial(HC)}{\partial t} + \frac{\partial(HU_1C)}{\partial x} + \frac{\partial(HU_2C)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(Hk_1 \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(Hk_2 \frac{\partial C}{\partial y} \right) + Q, \quad (x, y) \in D, t \in I = (0, T). \quad (1)$$

其中 C 为污染物浓度; Q 为源项; k_1 、 k_2 分别为 x 、 y 方向的扩散系数; H 为水深; U_1 、 U_2 分别为流速在 x 、 y 方向的分量。水深与流速可由浅水流方程确定, 本文的数值例子中将它们预先给出。

利用深度平均的连续守恒方程

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(HU_1)}{\partial x} + \frac{\partial(HU_2)}{\partial y} = 0,$$

将(1)式进一步改写成

$$H \frac{\partial C}{\partial t} + HU \cdot \nabla C - \nabla \cdot (HK \nabla C) + Q = 0, \quad (x, y) \in D, t \in I.$$

其中 $U = (U_1, U_2)^T$, $K = \text{diag}(k_1, k_2)$ 。

王焕焕和冯新龙[2]分析了水污染扩散问题的两种有限差分格式, 证明了其相容性、稳定性与收敛性。王焕[3]研究了该问题的特征有限元方法, 得到了 H^1 误差和 L_2 误差估计。

为简便, 本文中以图 1 所示的河的示意图为例, 假设河内没有污染源。令扩散系数 $k_1 = k_2 = k$ (常数)。假设 C_2 与边界中的污染源充分远, 可认为污染物浓度在研究的时间段内为零, C_1 是河岸。因此问题可写成

$$\begin{cases} H \frac{\partial C}{\partial t} + HU \cdot \nabla C - \nabla \cdot (Hk \nabla C) = 0, & (x, y) \in D, t \in I, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} C(x, y, 0) = C_0(x, y), & (x, y) \in D, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial n} C(x, y, t) \Big|_{C_1} = 0, & t \in I, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} C(x, y, t) \Big|_{C_2} = 0, & t \in I. \end{cases} \quad (5)$$

2. 向后 Euler-Galerkin 有限元形式

本文使用下列空间, 对于非负整数 m 和实数 $k \in [1, \infty]$, 定义

$$W^{m,r}(D) = \{u \in L^r(D) \mid \partial^\alpha u \in L^r(D), |\alpha| \leq m\}. \quad [4]$$

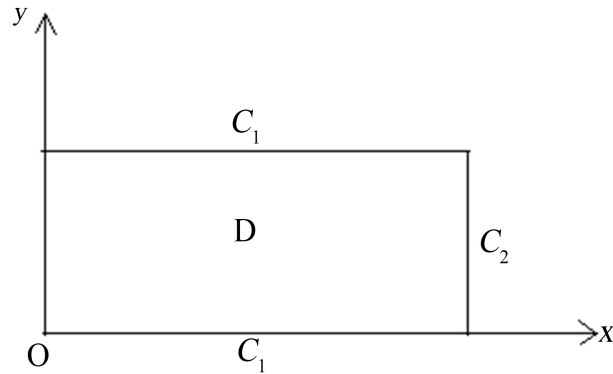


Figure 1. Diagram of the river
图 1. 河的形状示意图

在此空间上定义范数如下:

$$\|u\|_{m,r,D} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha u|^r dx \right)^{1/r}, \quad 1 \leq r < \infty,$$

当 $r=2$ 时, 记 $W^{m,r}(D)$ 为 H^m , 相应的范数为 $\|\cdot\|_m$ 。

现在推导(2)~(5)的变分形式。记 $H_0^1 = \{v \in H^1; v|_{C_2} = 0\}$, 用函数 $v(x, y) \in H_0^1$ 与方程(2)的两端做内积

$$\left(H \frac{\partial C}{\partial t}, v \right) + (HU \cdot \nabla C, v) - (\nabla \cdot (Hk \nabla C), v) = 0, \quad t \in I.$$

因此(2)~(5)的变分形式为: 求 $C(t): I \rightarrow H_0^1$, 使得

$$\begin{cases} \left(H \frac{\partial C}{\partial t}, v \right) + A(C, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1, t \in I, \\ C(0) = C_0(x, y). \end{cases} \quad (6)$$

其中 $A(\cdot, \cdot)$ 为下式所定义的双线性形式

$$A(u, v) = \int_D [-v \nabla \cdot (Hk \nabla C) + HvU \cdot \nabla C] dx dy, \quad \forall u, v \in H_0^1.$$

$A(\cdot, \cdot)$ 利用 Green 公式及(4)、(5)式可简化成

$$A(C, v) = \int_D [Hk \nabla C \cdot \nabla v + HvU \cdot \nabla C] dx dy.$$

设 $T_h = \{\tau\}$ 为 \bar{D} 上的拟均匀剖分, 网格参数 $h \leq h_0$, 选取的有限元空间为

$$V_h = \{v | v \in H_0^1(D), v|_\tau \in P_r(\tau), \forall \tau \in T_h\}.$$

因此对于问题(2)~(5)的 Galerkin 有限元形式是: 求 $C_h(t): I \rightarrow V_h$, 使得

$$\begin{cases} \left(H \frac{\partial C_h}{\partial t}, v_h \right) + A(C_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h, t \in I, \\ C_h(0) = C_{0h}. \end{cases} \quad (7)$$

其中 $C_{0h} \in V_h$ 是 C_0 的某个近似。

现设 $\{\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_N(x, y)\}$ 为空间 V_h 的基底, 将未知函数 C_h 表示为

$$C_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^N c_i(t) \phi_i(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

并在(7)中取 $v_h = \phi_j(x, y), j = 1, 2, \dots, N$, 则有

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{dc_i(t)}{dt} (H\phi_i, \phi_j) + \sum_{i=1}^N c_i(t) [(Hk\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + (HU \cdot \nabla\phi_i, \phi_j)] = 0, & j = 1, 2, \dots, N, t \in I, \\ c_i(0) = c_i^0, \end{cases} \quad (8)$$

其中 c_i^0 为 C_{0h} 按基函数 $\{\phi_i(x, y)\}$ 展开的系数。

引进矩阵和向量记号: $M = (m_{ij})_{N \times N}$, $A = (a_{ij})_{N \times N}$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_N)^T$, 其中 $m_{ij} = (H\phi_i, \phi_j) = \int_D H\phi_i\phi_j dx dy$, $a_{ij} = (Hk\nabla\phi_i, \nabla\phi_j) + (HU \cdot \nabla\phi_i, \phi_j)$ 。记 M 为质量矩阵, A 为刚度矩阵。借助上述记号, 可将(8)改写成

$$\begin{cases} M \frac{dc}{dt} + Ac = 0, & t \in I, \\ c(0) = c^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_N^0)^T. \end{cases}$$

如果再对时间变量用有限元离散会使计算量有成量级的增加。因此在时间 $t = t_n$ 上我们采用向后 Euler 差商, 从而得到的全离散格式为

$$\begin{cases} M \left(\frac{c^n - c^{n-1}}{\Delta t} \right) + Ac^n = 0, \\ c^0 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_N^0)^T. \end{cases} \quad (9)$$

其中 Δt 为时间步长。

根据文献[4]可知, 当有限元形式(7)中的初值 C_{0h} 满足条件

$$\|C_{0h} - C_0\| \leq \alpha h^r \|C_0\|_r \quad (\alpha \text{ 为常数})$$

时, 相应的近似解 $C_h(t)$ 与变分形式(6)的真解 $C(t)$ 之间的误差估计为

$$\|C_h(t) - C(t)\| \leq \alpha h^r \left\{ \|C_0\| + \int_0^t \|C_t(s)\| ds \right\}.$$

易知全离散格式(9)对时间 t 是一阶精度的。

3. 数值实验

针对图1所示的河, 考虑初边值问题(2)~(5)的数值计算。设 $U \approx (0 \text{ m/s}, 0 \text{ m/s})$ 、 $k = 15 \text{ m}^2/\text{s}$, 初始条件为

$$C_0(x, y) = \begin{cases} 200 \text{ g/m}^3, & x = 0, y = 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

为计算简便, 将水深函数 $H(x, y)$ ($0 \leq y \leq 300$, 单位: m) 取为

$$H(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x \leq 200; \\ 4, & 200 \leq x \leq 400; \\ 6, & 400 \leq x \leq 600; \\ 8, & 600 \leq x \leq 800; \end{cases}$$

x 轴方向 20 等分, y 轴方向 15 等分便得到矩形单元, 这里有限元空间取为

$$V_h = \{v | v \in H_0^1(\Omega), v|_\tau \in P_1(\tau), \forall \tau \in T_h\}.$$

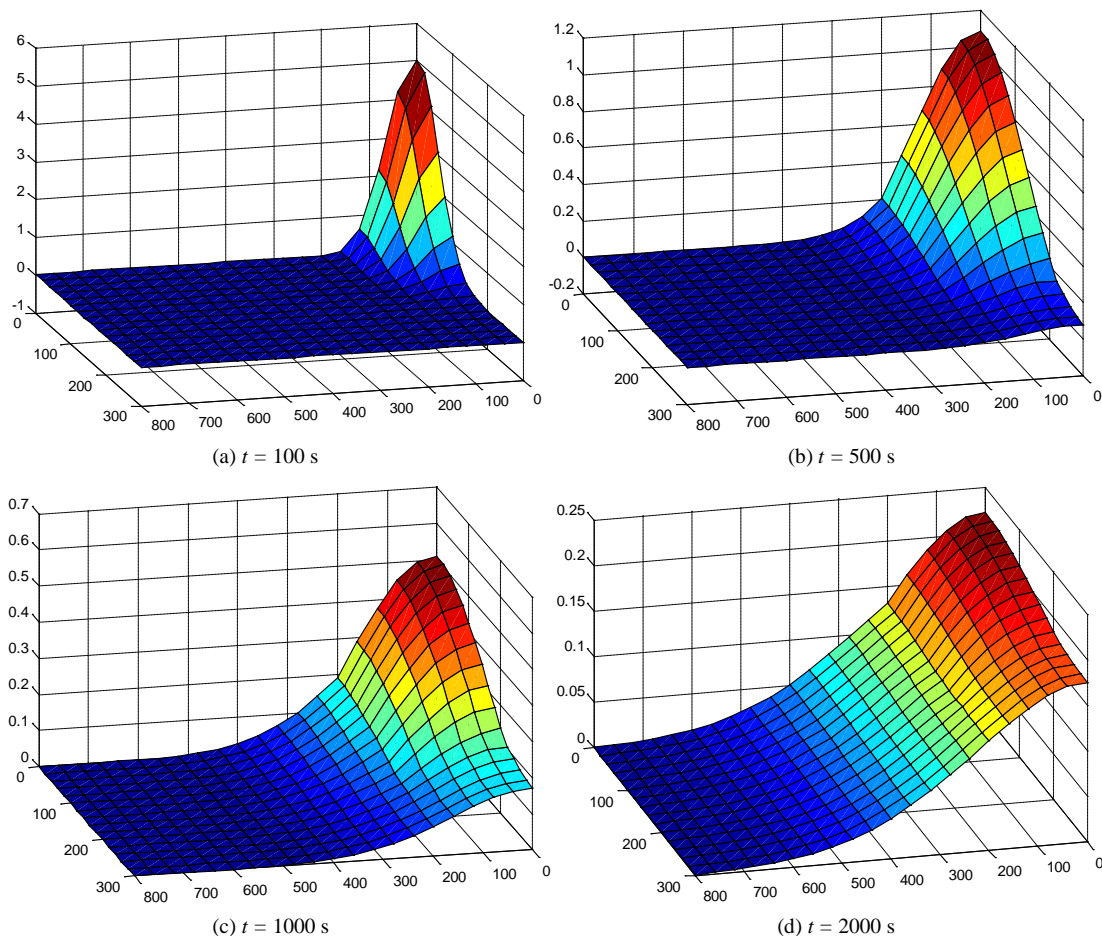


Figure 2. Distribution of the concentration of pollutants in the river with time
图 2. 河中污染物浓度随时间变化的分布情况

取时间步长 $\Delta t = 0.1\text{ s}$ ，用全离散格式(9)进行计算，就可以得到数值解。图 2(a)~图 2(d)给出了当时间 $t = 100\text{ s}$ ； $t = 500\text{ s}$ ； $t = 1000\text{ s}$ ； $t = 2000\text{ s}$ 时河中污染物浓度分布情况，图中的高度表示浓度大小。

4. 结论

本文中推导出了水污染扩散问题的向后 Euler-Galerkin 方法。通过数值模拟的结果看到效果是较好的。

参考文献 (References)

- [1] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. 有限元方法. 第五版. 第三卷, 流体动力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [2] 王焕焕, 冯新龙, 阿布都热西提. 水污染的二维数学模型的数值计算[J]. 吉林大学自然科学学报, 2001(2): 19-24.
- [3] 王焕. 水污染问题特征有限元方法的数值计算及理论分析[J]. 应用数学, 2003, 16(2): 42-49.
- [4] 应隆安, 陈传森. 有限元理论与方法. 第二分册[M]. 北京: 科学出版社, 2009.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org