

Smooth Newton Method Based on a New NCP Function for Solving Variational Inequality Problems

Chunyang Jia, Juhe Sun, Zheng Yang

College of Science, Shenyang University of Aeronautics, Shenyang Liaoning
Email: juhesun@163.com

Received: Dec. 4th, 2017; accepted: Dec. 20th, 2017; published: Dec. 28th, 2017

Abstract

In this paper, we study the solution of the variational inequality KKT systems. A new NCP function is used to convert KKT conditions of variational inequalities into an equivalent smooth equation. And a smoothing Newton method [1] for solving the nonlinear complementarity problem of NCP function is established, and the convergence and local convergence of the algorithm are obtained, and the accuracy of the theoretical analysis is verified by numerical experiments.

Keywords

Variational Inequality Problem, NCP-Function, Nonlinear Complementarity Problem, Smoothing Newton Method, Numerical Experiment

基于一个新的NCP函数的光滑牛顿法求解变分不等式问题

贾春阳, 孙菊贺, 杨 峥

沈阳航空航天大学理学院, 辽宁 沈阳
Email: juhesun@163.com

收稿日期: 2017年12月4日; 录用日期: 2017年12月20日; 发布日期: 2017年12月28日

摘 要

本文研究了变分不等式KKT系统的求解问题, 利用一个新的NCP函数将变分不等式的KKT条件转化为等

价的光滑方程组。并在此建立了求解NCP函数非线性互补问题的一个光滑化牛顿法[1]，获得算法的收敛性和局部收敛性结果，并给出数值实验结果验证理论分析的准确性。

关键词

变分不等式问题，NCP函数，非线性互补问题，光滑牛顿法，数值实验

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言和预备知识

求解变分不等式问题一直是学者们研究的热点课题之一，在文献[2]中作者已经成功的应用最经典的互补函数 $\phi_p(a, b) = (|a|^p + |b|^p)^{1/p} - (a + b)$ 来求解了带约束的变分不等式。文献[3]中，又给我们介绍了四类新的 NCP 函数，并给出了应用这几类 NCP 函数来求解带约束的变分不等式问题的方法。本文将采用其中的一类 NCP 函数 $\phi_1(a, b) = \phi_p(a, b) - \alpha a_+ b_+$ 来求解该问题。

定义 1: 函数 $\phi: R^2 \rightarrow R$ 称为 Fischer-Burmeister (FB)函数，如果满足下面的条件：

$$\phi_{FB}(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \quad (1)$$

其中 $a, b \in R$ ，此函数在(0,0)点是不光滑的，作为一个互补函数，广泛的应用于处理非线性互补问题和锥约束变分不等式问题[4]-[10]，如下函数被称为广义 FB 函数：

$$\phi_p(a, b) = a + b - \sqrt{|a|^p + |b|^p} \quad (2)$$

其中 $a, b \in R$ ， $p \in (1, +\infty)$ ，当 $p = 2$ 时，就是特殊的 FB 函数[11]。很多学者已经研究了基于广义 FB 函数的非线性互补问题的几个 NCP 函数，并应用于互补问题[12] [13]。众所周知函数(1)和(2)在(0,0)点是不可微的。这给我们在数值实验中带来了不便。如下函数是由 FB 函数变形得到的，本文采用该函数求解变分不等式问题：

$$\phi_1(a, b) = \phi_p(a, b) - \alpha a_+ b_+ \quad (3)$$

现在我们给出变分不等式问题的定义。令 R^n 是 n 维欧式空间，其内积定义为：

$$\langle x, y \rangle = x^T y$$

范数为：

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

设 X 为 n 维欧式空间 R^n 中的非空闭凸集，映射 $F: R^n \rightarrow R^n$ ， $h: R^n \rightarrow R^l$ 为线性函数， $g: R^n \rightarrow R^m$ 为二次连续可微凸函数，则变分不等式(VI)问题：

求 $x \in X$ ，使

$$F(x)^T (y - x) \geq 0, \quad \forall y \in X \quad (4)$$

其中可行集为:

$$X = \{x : h(x) = 0, g(x) \leq 0\} \tag{5}$$

变分不等式(VI)问题与其它数学规划有着密切的联系:

1) 如果 X 取为 R^n 中的开集, VI 为广义方程组, 即:

$$F(x) = 0$$

2) 假设 $F(x)$ 的梯度 $\nabla F(x)$ 为对称阵, 此时 VI (4)~(5) 对应于凸规划的 KKT 条件是:

$$\begin{aligned} & \min f(x) \\ & \text{s.t. } Ax = b \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $A \in R^{l \times n}$, $b \in R^l$, $g: R^n \rightarrow R^m$, $f: R^n \rightarrow R$, 当 f 是凸连续二次可微函数, 问题(6)等价于以下 VI 问题:

求 $x \in X$, 使

$$\langle \nabla f(x), y - x \rangle \geq 0, \forall y \in X$$

其中集合 X 可表示为:

$$X = \{x \in R^n : AX - b = 0, -g(x) \geq 0\}$$

自从 VI 问题被提出来以后, 其数值解的研究发展也非常迅速, 学者们已经提出了许多有效的算法来解决经典变分不等式和互补问题, 其中包括投影法、内点法、非光滑方程组法、光滑方程组法和价值函数法等[11] [14] [15]。本文通过利用 ϕ 函数将非线性互补问题转化为一个非线性方程组 $\psi(x) = 0$ 来求解, 采用了基于 NCP 函数的光滑牛顿算法。

2. KKT 条件的方程重构

变分不等式问题(4)~(5)的 KKT 条件是:

$$\begin{aligned} F(x) + Jh(x)^T \mu - Jg(x)^T \lambda &= 0 \\ h(x) &= 0 \\ 0 &\geq g(x) \perp \lambda \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

应用 NCP 函数(3), 从而 VI 等价于下述的 KKT 方程组:

$$0 = \psi_i(\varepsilon, x, \mu, \lambda) = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ L(x, \mu, \lambda) \\ -h(x) \\ \phi_1(\varepsilon, -g_1(x), \lambda_1) \\ \vdots \\ \phi_1(\varepsilon, -g_m(x), \lambda_m) \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中 $\varepsilon > 0$,

$$L(x, \mu, \lambda) \equiv F(x) + Jh(x)^T \mu + Jg(x)^T \lambda$$

是 VI 的拉格朗日函数, 如果 $(\varepsilon, x, \mu, \lambda)$ 是光滑方程组(8)的解, (x, μ, λ) 是变分不等式问题(4)~(5)的 KKT

点。因此，我们的目标是获得平滑方程组(8)的数值解。对于 $\varepsilon > 0$, $a, b \in R$, ϕ 的雅可比矩阵如下[3] [16]:

$$J\phi(\varepsilon, a, b) = \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\varepsilon}, \frac{\partial\phi_1}{\partial a}, \frac{\partial\phi_1}{\partial b} \right) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\varepsilon^{p-1}}{\|(\varepsilon, a, b)\|_p^{p-1}}, \frac{a^{p-1}}{\|(\varepsilon, a, b)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha b_+ \partial a_+, \frac{b^{p-1}}{\|(\varepsilon, a, b)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha a_+ \partial b_+ \right) \\ \left(\frac{\varepsilon^{p-1}}{\|(\varepsilon, a, b)\|_p^{p-1}}, \frac{\text{sgn}(a) \cdot a^{p-1}}{\|(\varepsilon, a, b)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha b_+ \partial a_+, \frac{\text{sgn}(b) \cdot b^{p-1}}{\|(\varepsilon, a, b)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha a_+ \partial b_+ \right) \end{pmatrix} \quad (9)$$

根据(9)，我们可以推出 $J\psi_p(\varepsilon, x, \mu, \lambda)$ 的形式。

定理 1: 令

$$\psi_i : R_+ \times R_n \times R^l \times R^m \rightarrow R^{1+n+l+m}$$

被定义的映射(8)，设 $\varepsilon > 0$, $(x, \mu, \lambda) \in R^n \times R^l \times R^m$ 是任意给定的点，

$$a_i^\varepsilon(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{-(g_i(x))^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_i(x), \lambda_i)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha(\lambda_i)_+ \cdot \partial(-g_i(x)_+) \\ \frac{-\text{sgn}(g_i(x))(g_i(x))^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_i(x), \lambda_i)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha(\lambda_i)_+ \cdot \partial(-g_i(x)_+) \end{cases}$$

$$b_i^\varepsilon(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{-(\lambda_i)^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_i(x), \lambda_i)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha(-g_i(x)_+) \cdot \partial(\lambda_i)_+ \\ \frac{-\text{sgn}(\lambda_i)(\lambda_i)^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_i(x), \lambda_i)\|_p^{p-1}} - 1 - \alpha(\lambda_i)_+ \cdot \partial(-g_i(x)_+) \end{cases}$$

$$D_g^\varepsilon = \text{diag}(a_1^\varepsilon(x, \lambda), \dots, a_m^\varepsilon(x, \lambda))$$

$$D_\lambda^\varepsilon = \text{diag}(b_1^\varepsilon(x, \lambda), \dots, b_m^\varepsilon(x, \lambda))$$

我们计算出 $\psi_i(\varepsilon, x, \mu, \lambda)$ 的 Jacobian 矩阵如下:

$$J\psi_i(\varepsilon, x, \mu, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_x L(x, \mu, \lambda) & Jh(x)^\top & Jg(x)^\top \\ 0 & -Jh(x) & 0 & 0 \\ E_1 & E_2 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

其中

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_1(x), \lambda_1)\|_p^{p-1}} e \\ \frac{\varepsilon^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_2(x), \lambda_2)\|_p^{p-1}} e \\ \vdots \\ \frac{\varepsilon^{p-1}}{\|(\varepsilon, g_m(x), \lambda_m)\|_p^{p-1}} e \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$E_2 = -D_g^\varepsilon J_g$$

$$E_3 = D_\lambda^\varepsilon$$

现在我们研究 Jacobian 矩阵 $J\psi_i$ 在点 $(\varepsilon, x, \mu, \lambda)$ 处的非奇异性。

定理 2: 设 $(\varepsilon, x, \mu, \lambda) \in R^{1+n+l+m}$ 为任意给定的点, 且 $\varepsilon > 0$ 如果

- (a) 梯度 $\{\nabla h_j(x) : j = 1, \dots, l\} \cup \{\nabla g_i(x) : i \in I_0\}$ 是线性无关的。
- (b) $J_x L(x, \mu, \lambda)$ 在梯度 $\{\nabla h_j(x) : j = 1, \dots, l\}$ 的零空间内是正定的。

$$I_0 = \{i : g_i(x) = 0 \leq \lambda_i, i = 1, 2, \dots, m\}$$

那么, Jacobian 矩阵 $J\psi_i(\varepsilon, x, \mu, \lambda)$ 是非奇异的。

证明: 由定理 1, $J\psi_i$ 是非奇异的当且仅当下面的矩阵是非奇异的, 即

$$J_0 = \begin{bmatrix} J_x L(x, \mu, \lambda) & Jh(x)^T & Jg(x)^T \\ -Jh(x) & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$$

是奇异的, 因此, 我们只要证明出 J_0^T 是非奇异的。设 $(u, v, t) \in R^n \times R^l \times R^m$ 是 J_0 的零空间内的任意一个向量。

$$J_0^T(u, v, t) = 0 \tag{11}$$

我们只要证明 $u = 0$, $v = 0$ 和 $t = 0$ 即可, 由(11), 我们可以得到如下三个式子:

$$(J_x L^T)u - (Jh^T)v - (Jg^T)E_2 t = 0 \tag{12}$$

$$(Jh)u = 0 \tag{13}$$

$$(Jg)u + E_3 t = 0 \tag{14}$$

由公式(13), 可以推出

$$u^T (Jh^T) = 0$$

$u^T \times$ (12), 可以得到

$$u^T (J_x L^T)u = u^T (Jg^T)E_2 t \tag{15}$$

$t^T \times$ (14), 可以得到

$$t^T (Jg)u = -t^T E_3 t \tag{16}$$

由定理 1 中 E_3 定义可知, E_3 是半负定的, 我们可以得到:

$$\sum_{j=1}^m \left(t_j \sum_{i=1}^n \right) = t^T (Jg)u \geq 0$$

由于 $a_i \leq 0$, 我们计算式子(15)的右半部分

$$u^T (Jg^T)E_2 t = \sum_{j=1}^m \left(a_j t_j \sum_{i=1}^n \right) \leq 0$$

之后, 我们可以得到:

$$u^T (J_x L^T) u \leq 0$$

由假设条件(b)可得:

$$u = 0 \tag{17}$$

因此, (12)和(14)分别成为:

$$(Jh^T)v + (Jg^T)E_2 t = 0 \tag{18}$$

和

$$(D_\lambda)t = 0 \tag{19}$$

对于任意的 $i \notin I_0$, 通过(19)式不难得到 $b_i \neq 0$ 和 $t_i = 0$ 。令 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, (18)式等价于下面的式子:

$$(Jh^T)v + (Jg^T)E_2 \bar{t} = 0$$

其中

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} t_{I_0} \\ t_{I-I_0} \end{bmatrix} \tag{20}$$

根据假设条件(a)和(18), 不难得到:

$$v = 0, t = 0$$

证明完毕。

3. 光滑牛顿算法

下面我们来研究一种光滑算法, 用于求解方程组(18), 并标明该算法定义明确。令 N 表示所有非负正数的合集。对于任意点 $(\varepsilon, x, \mu, \lambda)$, $(\varepsilon_k, x^k, \mu^k, \lambda^k) \in R_+ \times R^n \times R^l \times R^m$, 除非另有说明, 否则我们总是在本文中使用时以下符号:

$$z := (\varepsilon, Y) = (\varepsilon, x, \mu, \lambda)$$

$$z^k := (\varepsilon_k, Y^k) = (\varepsilon_k, x^k, \mu^k, \lambda^k)$$

算法 1

Step1: 任意选取常数 $\delta, \sigma, \gamma \in (0, 1)$, 与 $Y^0 \in R^n \times R^l \times R^m$ 。取 $\varepsilon_0 \in R_{++}$, 故 $\gamma\varepsilon_0 < 1$ 。

令 $z^0 := (\varepsilon_0, Y^0)$, $\bar{\varepsilon} := \varepsilon_0$, $h := (\bar{\varepsilon}, 0) \in R_{++} \times R^n \times R^l \times R^m$ 与 $k := 0$ 。

Step2: 如果 $\|\psi_i(z^k)\| = 0$, 则终止计算, 否则, 令 $\beta(z^k) := \gamma \min\{1, \|\psi_i(z^k)\|\}$ 。

Step3: 求解下述方程组得到 $\Delta z^k := (\Delta\varepsilon_k, \Delta Y^k) \in R \times R^n \times R^l \times R^m$

$$J\psi_i(z^k)\Delta z^k = -\psi_i(z^k) + \beta(z^k)\bar{h} \tag{21}$$

其中 $J\psi_i(z^k)$ 表示在点 z^k 处的函数 ψ_i 的雅可比矩阵。

Step4: 设 α_k 是满足下述不等式的最小的非负整数

$$\|\psi_i(z^k + \alpha_k \Delta z^k)\| \leq [1 - 2\sigma(1 - \gamma\bar{\varepsilon})\alpha_k] \|\psi_i(z^k)\| \tag{22}$$

计算 $z^{k+1} = z^k + \alpha_k \Delta z^k$ 。

Step5: 置 $k := k + 1$, 转到步 1。

接下来我们考虑算法 1 的适定性及收敛性。

备注 1

根据定理 2, 我们知道 $J\psi_i(\varepsilon, Y)$ 对于任意的 $(\varepsilon, Y) \in R_{++} \times R^n \times R^l \times R^m$ 是非奇异的, 故方程(21)的解存在且唯一, 从而算法 1 的步 2 是适定的。

备注 2

下面证明步 3 的适定性, 即有限终止。

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k + \alpha_k \Delta \varepsilon_k = (1 - \alpha_k) \varepsilon_k + \alpha_k \bar{\varepsilon} \beta(z^k) \tag{23}$$

上式表明对于所有的 $k \in N$, $\varepsilon_k > 0$, 通过备注 1, 我们知道当 $\varepsilon_k > 0$ 时, $J\psi_i(z^k)$ 是非奇异的, 因此, (21)对于所有 $k \in N$ 是可解的。另一方面, 令

$$R(z^k) = \psi_i(z^k + \alpha \Delta z^k) - \psi_i(z^k) + \alpha J\psi_i(z^k) \Delta z^k \tag{24}$$

由 $J\psi_i(z^k)$ 的一致连续性知, 对于 $z \in R_{++} \times R^n$, 有 $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\|R^k(\alpha)\|}{\alpha} = 0$, 故对所有的 $\alpha \in (0, 1)$ 及 $z \in R_{++} \times R^n$, 有

$$\begin{aligned} & \|\psi_i(z^k + \alpha_k \Delta z^k)\| \\ &= \|R(z^k) + \psi_i(z^k) + \alpha J\psi_i(z^k) \Delta z^k\| \\ &= \|R(z^k) + (1 - \alpha) \psi_i(z^k) + \alpha \beta(z^k) \bar{h}\| \\ &\leq \|R(z^k)\| + (1 - \alpha) \|\psi_i(z^k)\| + \alpha \bar{\mu} \beta(z^k) \\ &\leq \|R(z^k)\| + [1 - \alpha(1 - \lambda \bar{\mu})] \|\psi_i(z^k)\| \end{aligned} \tag{25}$$

由(24)式知能找到 $\bar{\alpha} \in (0, 1)$, 使得对所有 $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ 及 $z \in R_{++} \times R^n$, 有

$$\|\psi_i(z^k + \alpha_k \Delta z^k)\| \leq [1 - \sigma(1 - \gamma \bar{\varepsilon}) \alpha_k] \|\psi_i(z^k)\| \tag{26}$$

成立, 这就证明了步 3 的有限终止性, 证明完毕。

(a) 由(23)式不难看出序列 $\{\|\psi_i(z^k)\|\}$ 是单调递减的, 这也暗示着序列 $\{\|\beta(z^k)\|\}$ 是单调递减的。

(b) 设 $J(r) := \{(\varepsilon, Y) \in R_+ \times R^n \times R^l \times R^m : \bar{\varepsilon} \beta(\varepsilon, Y) \leq \varepsilon\}$ 与 $z^0 \in J(r)$ 。实际上, 对于所有的 $k \in N$, $z^k \in J(r)$, 由于

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{k+1} - \bar{\varepsilon} \beta(z^{k+1}) \\ &= (1 - \tau_k) \varepsilon_k + \tau_k \bar{\varepsilon} \beta(z^k) - \beta(z^{k+1}) \\ &\geq \bar{\varepsilon} (\beta(z^k) - \beta(z^{k+1})) \geq 0 \end{aligned}$$

(c) 结合式(23)与备注 2 的(4), 可以得到

$$\varepsilon_{k+1} = (1 - \tau_k) \varepsilon_k + \tau_k \bar{\varepsilon} \beta(z^k) \leq (1 - \tau_k) \varepsilon_k + \tau_k \varepsilon_k = \varepsilon_k$$

因此, 序列 $\{\varepsilon_k\}$ 是单调递减的。

4. 数值实验

本节给出一个数值例子来验证算法 1 的有效性。我们的数值实验是应用 Matlab 软件进行计算。

算例 1: 我们考虑下面的变分不等式问题: 找到 x 满足

$$\left\langle \frac{1}{2}Dx, y-x \right\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C$$

其中

$$C = \{x \in R^n : Ax - a = 0, Bx - b \leq 0\}$$

是 $n \times n$ 正定矩阵, A 和 B 分别是 $l \times n$ 和 $m \times n$ 维矩阵。 d 是一个 $n \times 1$ 维向量, a 和 b 分别是 $l \times 1$ 和 $m \times 1$ 维向量, 并且 $l+m \leq n$ 。

我们确定常数如下: a, b 和 A, B 的元素是从间隔 $[1, 2]$ 中随机选择的, D 的主对角线元素取 $[1, 2]$, 其他元素取 $[0, 1]$ 。为了满足定理 2 的条件, 我们设 A, B 是满秩的, 并且 $\text{rank}([A^T B^T]) = l+m$ 。每个问题实例由算法 1 使用初始点求解, 其中元素从间隔 $[0, 1]$ 中随机生成。在实现中, 我们在方法中使用以下参数:

$$\delta = 0.5, \sigma = 1.0e-1, \gamma = 0.1, \varepsilon_0 = 0.2$$

数值结果总结在表 1 中, 其中 n, l, Iter 和 Time 分别表示变量的数量, A 的行向量的数量, 迭代次数和 CPU 运行时间。

Table 1. System resulting data of example 1

表 1. 例 1 的数据结果

n	l	Iter	Time	Error
4	2	3	0.001893	1.00e-5
8	4	4	0.000841	2.00e-6
16	5	5	0.003516	2.00e-6
32	5	8	0.006565	3.00e-6
64	30	10	0.024259	4.00e-5
128	50	22	0.117793	4.90e-5
256	150	30	0.632780	5.00e-6

上述实验计算的是 $p = 2$ 时的结果, 和文献[2]中应用 $\phi_p(a, b)$ 函数求解的同一个变分不等式的结果相比较, 显然, 本文应用 $\phi_1(a, b)$ 的算法迭代次数更少, 收敛速度更快一些。

5. 总结

本文中, 我们使用了一种新的 NCP 函数求解了变分不等式问题, 在此函数的帮助下, 我们将变分不等式问题的 KKT 条件转化为一个方程组问题, 并且在严格互补的条件下证明了映射 ψ_i 的 Jacobian 矩阵的非奇异性, 在此建立了求解 NCP 函数非线性互补问题的一个光滑化牛顿法, 获得算法的收敛性和局部收敛性结果, 并给出数值实验结果验证理论分析的准确性。

基金项目

国家自然科学基金(11301348); 航空基金(2014ZE54023)。

参考文献 (References)

- [1] Huang, Z.H. and Ni, T. (2010) Smoothing Algorithms for Complementarity Problems over Symmetric Cones. *Computational Optimization and Applications*, **45**, 557-579. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9180-y>
- [2] Sun, J.H. and Wang, L. (2013) A Smoothing Newton Method Based on the Generalized Fischer-Burmeister Function

- for Variational Inequality Problem. *School of Science*, **10**, 151-160.
- [3] Chen, J.S. (2007) On Some NCP-Function Based on the Generalized Fischer-Burmeister Function. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, **24**, 401-420. <https://doi.org/10.1142/S0217595907001292>
 - [4] Chen, X.D., Sun, D. and Sun, J. (2003) Complementarity Functions and Numerical Experiments on Some Smoothing Newton Methods for Second-Order-Cone Complementarity Problems. *Computational Optimization and Applications*, **25**, 39-56. <https://doi.org/10.1023/A:1022996819381>
 - [5] Fukushima, M., Luo, Z.Q. and Tseng, P. (2002) Smoothing Functions for Second-Order-Cone Complementarity Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **12**, 436-460. <https://doi.org/10.1137/S1052623400380365>
 - [6] Qi, L., Sun, D. and Zhou, G. (2000) A New Look at Smoothing Newton Method for Nonlinear Complementarity Problems and Box Constrained Variational Inequalities. *Mathematical Programming*, **87**, 1-35. <https://doi.org/10.1007/s101079900127>
 - [7] Sun, D. and Sun, J. (2005) Strong Semismoothness of the Fischer-Burmeister SDC and SOC Complementarity Functions. *Mathematical Programming*, **103**, 575-581. <https://doi.org/10.1007/s10107-005-0577-4>
 - [8] Sun, J.H., Chen, J.S. and Ko, C.H. (2012) Neural Networks for Solving Second-Order Cone Constrained Variational Inequality Problem. *Computational Optimization and Applications*, **51**, 623-648. <https://doi.org/10.1007/s10589-010-9359-x>
 - [9] Sun, J.H. and Zhang, L.W. (2009) A Globally Convergent Method Based on Fischer-Burmeister Operators for Solving Second-Order-Cone Constrained Variational Inequality Problems. *Computers and Mathematics with Applications*, **58**, 1936-1946. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.07.084>
 - [10] Tseng, P. (1998) Merit Functions for Semidefinite Complementarity Problems. *Mathematical Programming*, **83**, 159-185. <https://doi.org/10.1007/BF02680556>
 - [11] Aghassi, M., Bertsimas, D. and Perakis, G. (2006) Solving Asymmetric Variational Inequalities via Convex Optimization. *Operations Research Letters*, **34**, 481-490. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2005.09.006>
 - [12] Chen, J.S., Ko, C.H. and Pan, S.H. (2010) A Neural Network Based on the Generalized Fischer-Burmeister Function for Nonlinear Complementarity Problems. *Information Sciences*, **180**, 697-711. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2009.11.014>
 - [13] Hu, S.L., Huang, Z.H. and Chen, J.S. (2009) Properties of a Family of Generalized NCP-Functions and a Derivative Free Algorithm for Complementarity Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **230**, 69-82. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.10.056>
 - [14] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Volume 2, Springer-Verlag, New York.
 - [15] Fukushima, M. (1992) Equivalent Differentiable Optimization Problems and Descent Methods for Asymmetric Variational Inequality Problems. *Mathematical Programming*, **53**, 99-110. <https://doi.org/10.1007/BF01585696>
 - [16] Pan, S. and Chen, J. (2010) A Semismooth Newton Method for the SOCCP Based on a One-Parametric Class of SOC Complementarity Functions. *Computational Optimization and Applications*, **45**, 59-88. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9166-9>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org