Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(1), 39-46
Published Online January 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.71006

Hans汉斯

Solving the Fractional Bagley-Torvik Equations with Uncertainty

Xueling Liu, Shanli Liao, Yuanbo Wu, Xianci Zhong

School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 1271392727@qq.com, zhongxianci@163.com, 1278422069@qq.com

Received: Dec. 19th, 2017; accepted: Jan. 17th, 2018; published: Jan. 24th, 2018

Abstract

This paper investigates the problem of the fractional Bagley-Torvik equation with uncertainty boundary-value conditions. Under the Caputo's H-differentiability, the fuzzy Laplace transform is introduced. The uncertainty boundary-value conditions are assumed to be fuzzy numbers. The series solution of fractional Bagley-Torvik equation is given. Numerical results are shown to illustrate the obtained solution.

Keywords

Fractional Bagley-Torvik Equation, Uncertainty, Fuzzy Laplace Transform, Fuzzy Number, Caputo's H-Differentiability

不确定分数阶Bagley-Torvik方程的解

刘雪铃，廖珊莉，吴远波，钟献词

广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁
Email: 1271392727@qq.com, zhongxianci@163.com, 1278422069@qq.com

收稿日期：2017年12月19日；录用日期：2018年1月17日；发布日期：2018年1月24日

摘 要

本文研究分数阶Bagley-Torvik方程不确定边值条件下的解。基于Caputo分数阶导数定义和广义的Hukuhara可微性，引进模糊Laplace变换，不确定边界条件为模糊数，给出了问题的级数解。数值结果分析了解的性态。

文章引用：刘雪铃，廖珊莉，吴远波，钟献词. 不确定分数阶 Bagley-Torvik 方程的解[J]. 应用数学进展，2018，7(1): 39-46. DOI: 10.12677/aam.2018.71006

关键词

分数阶Bagley-Torvik方程，不确定性，模糊Laplace变换，模糊数，Caputo分数阶微积分

1. 引言

模糊微分方程的理论近年来引起了人们广泛的关注，这一理论为模拟实际物理、力学、工程中的不确定性问题提供了新的方法，吸引了众多学者研究和探索[1] [2] [3] [4]。如模糊 Laplace 变换[5] [6]，改进 Euler 方法[7]，模糊 Fourier 变换[8] [9]。此外，许多学者也给了丰富的理论基础，如文献[10]中给出了模糊数和三角模糊数下的方程的基本定理，文献[11]中介绍了模糊情形下的 Laplace 变换，为解决模糊分数阶微分方程奠定了坚实的基础。文献[8]中介绍了一些关于某些类型微分之间关系的新结果，文献[12]中给出了在模糊的 Laplace 变换下方程解的存在性定理。

其次，分数阶微积分是整数阶微积分理论的一般化，其理论与应用研究也吸引了众多学者的兴趣，比如著名的分数阶 Bagley-Torvik 方程[13]。近年来，分数阶微分方程的不确定性边值问题成为了新的研究热点[4] [5] [7] [9]。在本文中，我们考虑 Caputo 分数阶定义下 Bagley-Torvik 方程的模糊边值问题：

$$A\varphi''(x)+BD^{\beta}\varphi(x)+C\varphi(x)=f(x),\ 0<\beta<1, x\in[0,b] \tag{1}$$

$$\varphi(0)=\alpha_0,\ \varphi(b)=\gamma_0$$

这里 A,B,C 是常数，$\varphi(x)$ 是未知的，α_0，γ_0 是模糊数，分数阶导数定义如下：

$${}_C D_x^{\beta}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int_a^x \frac{\varphi^n(s)}{(x-s)^{\beta-n+1}}\mathrm{d}s,\ n-1<\beta<n$$

$$\Gamma(v)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{v-1}\mathrm{d}x,\ v>0$$

其中 $\Gamma(v)$ 是 Γ 函数。将采用模糊 Laplace 变换方法给出问题的级数解，并通过数值实例分析解的性态。

2. 预备知识

下面介绍一些模糊数学和分数阶模糊微积分的一些概念。

定义 1：[14] [15]记 $E^n=\{u\,|\,u:R^n\to[0,1]\}$ 满足以下性质：

1) u 是正规的模糊集，既存在 $x_0\in R^n$ 使得 $u(x_0)=1$；

2) u 是凸函数集，即

$$u(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)>\min\{u(x_1),u(x_2)\},\forall x_1,x_2\in R,\ \forall\lambda\in[0,1];$$

3) u 是上半连续函数；

4) $[u]^0=cl\{x\in R^n\,|\,u(x)>0\}$ 是紧集；

此外，如果 $u\in E$ 且 $0\le\alpha\le1$，则 u 的 α 阶截集被定义为：

$$[u]^{\alpha}=\begin{cases} r\in R \mid u(r)\ge \alpha, 0<\alpha\le 1 \\ cl(supp\, u),\ \alpha=0 \end{cases}$$

很容易发现 u 的 α 截集是闭集和有界的，为此我们用区间 $[\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha)]$ 来表示，$\underline{u}(\alpha)$ 即 $[u]^{\alpha}$ 的左端点，$\overline{u}(\alpha)$ 是 $[\alpha]^{\alpha}$ 右端点。

定义 2：[15] [16] [17]对 $u\in E^1, u=(\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha))$，则 $\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha)$ 均为 $[0,1]$ 上的函数且满足：

$\underline{u}(\alpha)$ 单调非降左连续；

$\overline{u}(\alpha)$ 单调非增连续；

$$\underline{u}(\alpha)\le\overline{u}(\alpha);$$

$\underline{u}(\alpha),\overline{u}(\alpha)$ 在 $r=0$ 处连续；

记 $[u]^{\alpha}=cl\{x\in R \mid u(x)\ge\alpha\}(0<\alpha\le 1)$，

$$\underline{u}(\alpha)=\min[u]^{\alpha}, \overline{u}(\alpha)=\max[u]^{\alpha},\ \alpha\in[0,1],$$

则 $\underline{u}(\alpha)$ 和 $\overline{u}(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上连续。

基于 Zadeh 扩张原理的和、差及乘运算将分别记为$\oplus$，$\ominus$，$\otimes$。则有：

$$u\oplus v=(\underline{u}+\underline{v},\overline{u}+\overline{v})$$

$$u\ominus v=(\underline{u}-\overline{v},\overline{u}-\underline{v})$$

$$k\otimes u=\begin{cases}(k\underline{u},k\overline{u}),k\ge 0\\(k\overline{u},k\underline{u}),k<0\end{cases}$$

定义 3：[2]若 $f:(a,b)\to E$，存在 $x_0\in(a,b)$，且 $f'(x_0)\in E$，那么可以称 f 在 x_0 是广义的强可微，且对 $\forall h\to 0,h>0,\exists f(x_0+h)\ominus f(x_0)$ 和 $\exists f(x_0)\ominus f(x_0-h)$，满足：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\ominus f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{h}=f'(x_0) \tag{2}$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)\ominus f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{-h}=f'(x_0) \tag{3}$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\ominus f(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)\ominus f(x_0)}{-h}=f'(x_0) \tag{4}$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\ominus f(x_0+h)}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\ominus f(x_0-h)}{h}=f'(x_0) \tag{5}$$

定理 1：[18]若 $f(x)=(\underline{f}(x,\alpha),\overline{f}(x,\alpha))$ 是定义在 $[a,\infty)$ 上的模糊函数，对 $\forall\alpha\in[0,1],\forall b\ge a,\underline{f}(x,\alpha),\overline{f}(x,a)$ 都是在 $[a,b]$ 是可积的。如果 $\underline{M}(\alpha),\overline{M}(\alpha)$ 是正函数，$\int_a^b\left|\underline{f}(x,\alpha)\right|\mathrm{d}x\le\underline{M}(\alpha)$，$\int_a^b\left|\overline{f}(x,\alpha)\right|\mathrm{d}x\le\overline{M}(\alpha)$，那么称 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上是模糊可积的，此外：

$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x=\left(\int_a^\infty \underline{f}(x,\alpha)\mathrm{d}x,\int_a^\infty \overline{f}(x,\alpha)\mathrm{d}x\right) \tag{6}$$

注释：如果 $f(t)=\left(\underline{f}(t,\alpha),\overline{f}(t,\alpha)\right)$，$\underline{f}(t,\alpha)$ 和 $\overline{f}(t,\alpha)$ 都可微，则有:

$$f'(t)=\left(\underline{f}(t,\alpha),\overline{f}(t,\alpha)\right),$$

$$f'(t)=\left(\overline{f}(t,\alpha),\underline{f}(t,\alpha)\right),$$

分别称为情况(i)和情况(ii)。

定理 2: (模糊卷积定理)假设函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的分段连续函数，并且带有模糊边值，则

$$L\{f(t)*g(t)\}=L\{g(t)*f(t)\}=L\{f(t)\}\cdot L\{g(t)\} \tag{7}$$

注意到函数的经典模糊 Laplace 变换表示为:

$$\hat{F}(P;\alpha)=L\{f(t;\alpha)\}=\left[L\left(\underline{f}(t;\alpha)\right),L\left(\overline{f}(t;\alpha)\right)\right] \tag{8}$$

$$L\left\{\underline{f}(t;\alpha)\right\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\odot\underline{f}(t;\alpha)\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\odot\underline{f}(t;\alpha)\mathrm{d}t\,; \tag{9}$$

$$L\left\{\overline{f}(t;\alpha)\right\}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\odot\overline{f}(t;\alpha)\mathrm{d}t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\odot\overline{f}(t;\alpha)\mathrm{d}t\,; \tag{10}$$

定理 3：[19]如果 $0<\beta<1$，$J=(a,b]$，$f(x,\alpha)=\left(\underline{f}(x;\alpha),\overline{f}(x;\alpha)\right)\in C(J,E)$，则对任意 $0\le\alpha\le1$，Caputo 分数阶导数有:

当 f 是第(i)种的情况时有:

$$\left({}_cD_{a^+}^{\beta}f\right)(x;\alpha)=\left[{}_cD_{a^+}^{\beta}\underline{f}(x;\alpha),{}_cD_{a^+}^{\beta}\overline{f}(x;\alpha)\right];$$

当 f 是第(ii)种的情况时有:

$$\left({}_cD_{a^+}^{\beta}f\right)(x;\alpha)=\left[{}_cD_{a^+}^{\beta}\overline{f}(x;\alpha),{}_cD_{a^+}^{\beta}\underline{f}(x;\alpha)\right];$$

这里有:

$${}_cD_{a^+}^{\beta}\underline{f}(t;\alpha)=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_0^x\frac{\underline{f}^m(\tau)}{(x-\tau)^{\beta+1-m}}\mathrm{d}\tau,m-1<\alpha<m,m\in N\,,$$

$${}_cD_{a^+}^{\beta}\overline{f}(t;\alpha)=\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int_0^x\frac{\overline{f}^m(\tau)}{(x-\tau)^{\beta+1-m}}\mathrm{d}\tau,m-1<\alpha<m,m\in N\,,$$

定理 4：[20]如果 f 和 f' 在 $[0,\infty)$ 上连续并且带有模糊的初值，f'' 是在 $[0,\infty)$ 上的分段连续函数并带有模糊的初值，则有:

当 f 和 f' 都是第(i)种情况:

$$L\left[f''(x)\right]=s^2L\left[f(x)\right]\ominus sf(0)\ominus f'(0)\,, \tag{11}$$

当 f 是第(i)种情况，f' 是第(ii)种情况:

$$L\left[f''(x)\right]=-f'(0)\ominus\left(-s^2\right)L\left[f(x)\right]-sf(0)\,, \tag{12}$$

当 f 和 f' 都是第(ii)种情况:

$$L\left[f''(x)\right]=s^2L\left[f(x)\right]\ominus sf(0)-f'(0),\tag{13}$$

当 f 是第(ii)种情况，f' 是第(i)种情况：

$$L\left[f''(x)\right]=-sf(0)\ominus\left(-s^2\right)L\left[f(x)\right]\ominus f'(0)\tag{14}$$

3. 问题的求解

这里我们假设 $\varphi(x)\in C[0,b]$，$f(x)\in C[0,b]$，A,B,C 均为常数，α_0,γ_0 均为模糊数。由 Laplace 变换作用(1)式等价为

$$A\left\{s^2L\left[\varphi(x)\right]-s\varphi(0)-\varphi'(0)\right\}+B\left\{s^\beta L\left[\varphi(x)\right]-s^{\beta-1}\varphi(0)\right\}+CL\left[\varphi(x)\right]=L\left[f(x)\right]\tag{15}$$

根据(15)式可以得到

$$\underline{\varphi}(x)=L^{-1}\left[\frac{L\left[f(x)\right]+As\underline{\varphi}(0)+A\underline{\varphi}'(0)+Bs^{\beta-1}\underline{\varphi}(0)}{As^2+Bs^\beta+C}\right]$$

$$\overline{\varphi}(x)=L^{-1}\left[\frac{L\left[f(x)\right]+As\overline{\varphi}(0)+A\overline{\varphi}'(0)+Bs^{\beta-1}\overline{\varphi}(0)}{As^2+Bs^\beta+C}\right]$$

根据模糊的 Laplace 变换的卷积定理，上式可以得到

$$\begin{aligned}\underline{\varphi}(x)=&\left(f(x)+A\underline{\varphi}'(0)\right)\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)-1}E^k_{2-\beta,2+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}\\&+\underline{\varphi}(0)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2k}E^k_{2-\beta,1+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}\\&+B\underline{\varphi}(0)\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{(2-2\beta k)+2+\beta}E^k_{2-\beta,3-\beta(k-1)}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}\end{aligned}\tag{16}$$

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(x)=&\left(f(x)+A\overline{\varphi}'(0)\right)\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)-1}E^k_{2-\beta,2+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}\\&+\overline{\varphi}(0)\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2k}E^k_{2-\beta,1+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}\\&+B\overline{\varphi}(0)\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{(2-2\beta k)+2+\beta}E^k_{2-\beta,3-\beta(k-1)}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}\end{aligned}\tag{17}$$

根据(1)式中的边值条件和方程(16)，(17)我们可以得到未知的 $\underline{\varphi}'(0),\overline{\varphi}'(0)$ 表示为:

$$\underline{\varphi}'(0)=\frac{\underline{\gamma}_0-f(b)\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)-1}E^k_{2-\beta,2+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)-1}E^k_{2-\beta,2+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)}-\frac{\underline{\alpha}_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k\left\{t^{2k}E^k_{2-\beta,1+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)+Bt^{(2-2\beta k)+2+\beta}E^k_{2-\beta,3-\beta(k-1)}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)}E^k_{2-\beta,2+\beta k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)}$$

$$\overline{\varphi}'(0)=\frac{\overline{\gamma_0}-f(b)\left\{\frac{1}{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)-1}E_{2-\beta,2+\beta k}^{k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)-1}E_{2-\beta,2+\beta k}^{k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)}-\frac{\overline{\alpha}_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k\left\{t^{2k}E_{2-\beta,1+\beta k}^{k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)+Bt^{(2-2\beta k)+2+\beta}E_{2-\beta,3-\beta(k-1)}^{k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)\right\}}{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2(k+1)}E_{2-\beta,2+\beta k}^{k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\beta}\right)}$$

这里有

$$E_{\lambda,\mu}^{k}(y)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}E_{\lambda,\mu}(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!\,y^j}{j!\,\Gamma(\lambda j+\lambda k+\mu)},\ (k=0,1,2,\cdots)$$

$$\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

从而得到了 Bagley-Torvik 方程模糊边值问题的级数解。

4. 数值实例

例 1：考虑以下 Bagley-Torvik 方程的两点模糊边值问题：

$$\begin{cases}\varphi''(x)+3D^{\frac{1}{2}}\varphi(x)+2\varphi(x)=0,\ x\in[0,1]\\ \varphi(0)=(\alpha-1,1-\alpha),\ \varphi(1)=(\alpha-0.5,1-\alpha)\end{cases}$$

根据公式(16)，(17)我们可以得到以下数值解。选择部分参数值进行计算，如当 $k=j=m=8$，并 φ,φ' 均为第(i)种情况，我们得到表 1。当 $k=j=m=8$，并且 φ 为第(i)种情况，φ' 为第(ii)种情况我们得到表 2。

通过表 1 和表 2 的数值结果进行分析，可以发现表 1 中的数值结果稳定，符合实际情形。而当 φ 为第(i)种情况，φ' 为第(ii)种情况时，所得表 2 中的数值结果不收敛，故此种情况不成立。同样的，当 φ 和 φ' 都是第(ii)种情况时，所得结果和表 1 中的数值结果的区间左右端点刚好互换；当 φ 为第(ii)种情况，φ'

Table 1. Numerical solution of the fuzzy boundary value problem of Bagley-Torvik equation
表 1. Bagley-Torvik 模糊边值问题的数值解

t	$\alpha=0$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.8$
0.10	[−1.1897, 1.3876]	[−0.7138, 0.8326]	[−0.2381, 0.2775]
020	[−1.2985, 1.6703]	[−0.7791, 1.0022]	[−0.2597, 0.3341]
0.30	[−1.3376, 1.8493]	[−0.8026, 1.1096]	[−0.2675, 0.3699]
0.40	[−1.3152, 1.9283]	[−0.7892, 1.1570]	[−0.2630, 0.3857]
0.50	[−1.2415, 1.9160]	[−0.7449, 1.1496]	[−0.2483, 0.3832]
0.60	[−1.1277, 1.8253]	[−0.6766, 1.0952]	[−0.2255, 0.3651]
0.70	[−0.9854, 1.6715]	[−0.5913, 1.0029]	[−0.1971, 0.3343]
0.80	[−0.8264, 1.4714]	[−0.4959, 0.8828]	[−0.1651, 0.2943]
0.90	[−0.6614, 1.2422]	[−0.3969, 0.7453]	[−0.1323, 0.2484]

Table 2. Numerical solution of the fuzzy boundary value problem of Bagley-Torvik equation
表 2. Bagley-Torvik 模糊边值问题的数值解

t	$\alpha = 0$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.8$
0.10	[−1.7573, −0.2621]	[−1.0544,−0.157]	[−0.3515, −0.0524]
020	[−2.6417, 0.5487]	[−1.5850, 0.3292]	[−−0.5283, 0.1097]
0.30	[−3.7601, 1.5004]	[−2.2561, 0.9002]	[−0.7520, 0.3001]
0.40	[−5.2951, 2.7006]	[−3.1771, 1.6204]	[−1.0590, 0.5401]
0.50	[−7.6015, 4.3482]	[−4.5609, 2.6089]	[−1.5203, 0.8696]
0.60	[−11.4461, 6.8437]	[−6.8676, 4.1062]	[−2.2892, 1.3687]
0.70	[−18.7242,11.0797]	[−11.234, 6.6474]	[−3.7451, 2.2158]
0.80	[−34.9804,19.3231]	[−20.988, 11.5947]	[−6.9963, 3.8653]
0.90	[−80.3696,38.3823]	[−48.2213,23.0291]	[−16.074, 7.6764]

为第(i)种情况时，所得结果和表 2 的数值结果的区间左右端点刚好互换。故其他另外两种情况也得出结果不符合逻辑。因此，只有第一种情形是问题的解。

5. 结论

本文采用模糊 Laplace 变换求解了分数阶 Bagley-Torvik 方程模糊边值条件下的解。结果表明，相同的问题可能给出不同的结果，而这些结果需要根据实际情形从理论上进行研究和分析。

基金项目

广西自然科学基金(2016GXNSFAA380261)，广西研究生教育创新计划项目(No. YCSW2017048)。

参考文献 (References)

[1] Salahshour, S., Allahviranloo, T., Abbasbandy, S. and Baleanu, D. (2012) Existence and Uniqueness Results for Fractional Differential Equations with Uncertainty. *Advances in Difference Equations*, **2012**, 1-12. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2012-112

[2] Chalco-Cano, Y. and Román-Flores, H. (2008) On New Solutions of Fuzzy Differential Equations. *Chaos Solitons & Fractals*, **38**, 112-119. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.10.043

[3] Wu, H.C. (1998) The Fuzzy Riemann Integral and Its Numerical Integration. *Information Sciences*, **111**, 109-137. https://doi.org/10.1016/S0020-0255(98)00016-4

[4] Agarwal, R.P., Lakshmikantham, V. and Nieto, J.J. (2010) On the Concept of Solution for Fractional Differential Equations with Uncertainty. *Nonlinear Analysis Theory Methods & Applications*, **72**, 2859-2862. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.11.029

[5] Salahshour, S., Allahviranloo, T. and Abbasbandy, S. (2012) Solving Fuzzy Fractional Differential Equations by Fuzzy Laplace Transforms. *Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **17**, 1372-1381. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.07.005

[6] Salahshour, S. and Haghi, E. (2010) Solving Fuzzy Heat Equation by Fuzzy Laplace Transforms. *Communications in Computer Information Science*, **81**, 512-521. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14058-7_53

[7] Mazandarani, M. and Kamyad, A.V. (2013) Modified Fractional Euler Method for Solving Fuzzy Fractional Initial Value Problem. *Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation*, **18**, 12-21. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.06.008

[8] Allahviranloo, T. and Ahmadi, M.B. (2010) Fuzzy Laplace Transforms. *Soft Computing*, **14**, 235-243. https://doi.org/10.1007/s00500-008-0397-6

[9] Khodadadi, E. and Karabacak, M. (2015) Solving Fuzzy Fractional Partial Differential Equations by Fuzzy Lap-

lace-Fourier Transforms. *Journal of Computational Analysis & Applications*, **19**, 260-271.

[10] Buckley, J.J., Eslami, E. and Feuring, T. (2002) Solving Fuzzy Equations. *Fuzzy Sets & Systems*, **50**, 1-14. https://doi.org/10.1016/0165-0114(92)90199-E

[11] Bede, B., Rudas, I.J. and Bencsik, A.L. (2007) First Order Linear Fuzzy Differential Equations under Generalized Differentiability. *Information Sciences*, **177**, 1648-1662. https://doi.org/10.1016/j.ins.2006.08.021

[12] Allahviranloo, T. and Ahmadi, M.B. (2010) Fuzzy Laplace Transforms. *Soft Computing*, **14**, 235-243. https://doi.org/10.1007/s00500-008-0397-6

[13] Torvik, P.J. and Bagley, R.L. (1984) On the Appearance of the Fractional Derivative in the Behavior of Real Materials. *Journal of Applied Mechanics*, **51**, 294-298. https://doi.org/10.1115/1.3167615

[14] Salahshour, S., Ahmadian, A. and Chan, C.S. (2016) A Novel Technique for Solving Fuzzy Differential Equations of Fractional Order Using Laplace and Integral Transforms. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, **2016**, 1473-1477.

[15] Goetschel, R. and Voxman, W. (1986) Elementary Fuzzy Calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, **18**, 31-43.

[16] Goetschel, R. and Voxman, W. (1985) Eigen Fuzzy Number Sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **16**, 75-85. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(85)80007-5

[17] Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A. (1972) On Fuzzy Mapping and Control. *IEEE Transactions on Systems Man & Cybernetics*, **2**, 30-34. https://doi.org/10.1109/TSMC.1972.5408553

[18] Kaleva, O. (1987) Fuzzy Differential Equations. *Fuzzy Sets & Systems*, **24**, 301-317. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90029-7

[19] Seikkala, S. (1987) On the Fuzzy Initial Value Problem. *Fuzzy Sets & Systems*, **24**, 319-330. https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90030-3

[20] Salahshour, S. and Allahviranloo, T. (2013) Applications of Fuzzy Laplace Transforms. *Soft Computing*, **17**, 145-158. https://doi.org/10.1007/s00500-012-0907-4