Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(4), 348-355**
Published Online April 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.74043

A New Numerical Method for a Nonlinear Integral Equation of Hammerstein Type

Lihua Zhang, Shanli Liao, Yuanbo Wu

School of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning Guangxi
Email: 1731332788@qq.com, 1278422069@qq.com, 277546979@qq.com

Received: Apr. 7th, 2018; accepted: Apr. 19th, 2018; published: Apr. 26th, 2018

Abstract

This paper presents a new numerical method for a nonlinear integral equation of Hammerstein type. Based on the thought of Taylor series expansion and piecewise approximation, a discretization format for the nonlinear integral equation of Hammerstein type is made, and the convergence and error estimate of the approximation solution are given. The feasibility and validity of this method are verified by numerical simulation. It has good research and reference value.

Keywords

Hammerstein-Type Integral Equation, Taylor-Series Expansion, Piecewise Approximation, Convergence and Error Estimate

Hammerstein型非线性积分方程的一种数值新方法

张利花，廖珊莉，吴远波

广西大学数学与信息科学学院，广西 南宁
Email: 1731332788@qq.com, 1278422069@qq.com, 277546979@qq.com

收稿日期：2018年4月7日；录用日期：2018年4月19日；发布日期：2018年4月26日

摘 要

本文提出了一种新的Hammerstein型非线性积分方程的数值方法，主要基于泰勒级数展开和分段逼近的思想，给出了Hammerstein型非线性积分方程的离散化方案，分析了逼近解的收敛性和误差估计，并通过数值模拟验证了该方法的可行性和有效性，具有很好的研究与参考价值。

文章引用: 张利花, 廖珊莉, 吴远波. Hammerstein 型非线性积分方程的一种数值新方法[J]. 应用数学进展, 2018, 7(4): 348-355. DOI: 10.12677/aam.2018.74043

关键词

Hammerstein式积分方程，Taylor级数展开，分段近似，收敛性与误差估计

1. 引言

积分方程在数学物理的许多分支中出现，如弹性、湿热弹性、流体力学和断裂力学等。因此，解决线性或非线性积分方程的数学理论和数值解是很重要的。本文考虑 Hammerstein 型的非线性积分方程

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\Omega(\varphi(y))\mathrm{d}y=f(x),\quad x\in[a,b], \tag{1}$$

$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的已知函数，$\varphi(x)$ 是在给定内核 $K(x,y)\in[a,b;a,b]$ 上需要被解的未知函数，$\Omega(\varphi(y))$ 是非线性形式 $\varphi(y)\in R$ 的已知函数，非线性积分算子 k_0 被定义为

$$(k_0\varphi)(x)=\int_a^b K(x,y)\Omega(\varphi(y))\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b], \tag{2}$$

之后等式(1)可以被写成算子的形式

$$(I-k_0)\varphi(x)=f(x),\quad x\in[a,b], \tag{3}$$

这里 I 表示单位算子，由文献[1] [2] [3] [4] [5]可知函数 $K(x,y),\Omega(\varphi(y))$ 和 $f(x)$ 在不同的假设条件下 Hammerstein 型积分方程解的存在性和唯一性引起了很多关注。文献[6]将 Petrov-Galerkin 方法推广到求解非线性的 Hammerstein 型积分方程。文献[7]采用 Toeplitz 矩阵方法对 Hammerstein 型的非线性积分方程进行了数值求解。

本文的目的是为 Hammerstein 式的非线性积分方程(1)提供一种新的数值方法。基于泰勒级数展开和分段逼近的思想，给出了 Hammerstein 型非线性积分方程的离散化方案，进一步分析了逼近解的收敛性和误差估计。数值结果表明了该方法的有效性。

2. 一种新的数值方法

在假设条件 $K(x,y)\in C^{n+1}[a,b;a,b]$ 和 $f(x),\varphi(x)\in C^n[a,b]$ 下，在等式(1)的两边对 x 积分 n 次，得到

$$\varphi^{(i)}(x)-\int_a^b K_x^{(i)}(x,y)\Omega(\varphi(y))\mathrm{d}y=f^{(i)}(x),\quad x\in[a,b], \tag{4}$$

这里 $i=0,1,2,\cdots,n$ 在给出一种新的数值方法之前，我们需要考虑(4)式中一系列的 Hammerstein 式积分方程解的存在性和唯一性。我们有下面的定理：

定理 1：假设 $H[a,b]$ 是一个 Hilbert 空间且 $f^{(i)}(x)\in H[a,b]$ 和 $\varphi^{(i)}(x)\in H[a,b]$，$i=0,1,2,\cdots,n$ 算子 $k_i\,(i=0,1,2,\cdots,n)$ 被定义为

$$k_i:H[a,b]\to H[a,b]$$

和

$$(k_i\varphi)(x)=\int_a^b K_x^{(i)}(x,y)\Omega(\varphi(y))\mathrm{d}y$$

假设算子 k_i 满足 Lipschitz 条件如下

$$\|k_i\varphi_1 - k_i\varphi\| \le M_i \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

常量 $0 < M_i < 1$，之后等式(4)在 Hilbert 空间 $H[a,b]$ 有唯一解。

证明：假设

$$T_i\varphi = f^{(i)} + k_i\varphi$$

然后等式(4)被改写为

$$\varphi^{(i)} = T_i\varphi$$

对于 $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H[a,b]$，我们有

$$\|T_i\varphi_1 - T_i\varphi_2\| = \|k_i\varphi_1 - k_i\varphi\| \le M_i \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

这里算子 $T_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 是收缩算子。基于 Banach 不动点定理，方程 $\varphi = T_0\varphi$ 在 $H[a,b]$ 上有唯一解 $\bar{\varphi}(x)$，并且 $\bar{\varphi}(x)$ 满足 $\varphi^{(i)} = T_i\varphi$，$i = 1,2,\cdots,n$。

为了求解(1)的数值解，选择一系列正交点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$ 且 $m \ge 1$。积分算子 k_0 能进一步被一系列积分算子的和表示，即

$$(k_0\varphi)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} K(x,y)\Omega(\varphi(y))\mathrm{d}y, \tag{5}$$

此外，为了方便我们采取等距正交分点，即

$$x_k = a + kh,\quad k = 0,1,\cdots,m,\quad h = (b-a)/m, \tag{6}$$

通过引进变量 ξ 和 $y = x_k + h\xi$，等式(5)能进一步表达为

$$(k_0\varphi)(x) = h\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 K(x, x_k + h\xi)\Omega(\varphi(x_k + h\xi))\mathrm{d}\xi, \tag{7}$$

现在假设 $\Omega(\varphi(x_k + h\xi))$ 能被表达为以下的 Taylor 级数展式

$$\Omega(\varphi(x_k + h\xi)) = \Omega(\varphi(x_k)) + (h\xi)\Omega'_\varphi(\varphi(x_k))\varphi'(x_k) + \cdots + \frac{(h\xi)^n}{n!}\frac{\mathrm{d}^n\Omega}{\mathrm{d}y^n}\bigg|_{y=x_k} + R_n(\theta_k, h, \xi), \tag{8}$$

$R_n(\theta_k, h, \xi)$ 是 Lagrange 余项且

$$R_n(\theta_k, h, \xi) = \frac{(h\xi)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}\Omega}{\mathrm{d}y^{n+1}}\bigg|_{y=\theta_k},\quad x_k \le \theta_k \le x_k + h\xi, \tag{9}$$

因此算子 $(k_0\varphi)(x)$ 近似为

$$(k_0^n\varphi)(x) = h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n} \frac{h^j}{j!}\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{y=x_k} \int_0^1 K(x, x_k + h\xi)\xi^j\mathrm{d}\xi, \tag{10}$$

类似的，我们有

$$(k_i\varphi)(x) = h\sum_{k=0}^{m-1} \int_0^1 K_x^{(i)}(x, x_k + h\xi)\Omega(\varphi(x_k + h\xi))\mathrm{d}\xi, \tag{11}$$

$i = 1,2,\cdots,n$，等式(11)进一步近似表达为

$$(k_i^n\varphi)(x) = h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n} \frac{h^j}{j!}\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{y=x_k} \int_0^1 K_x^{(i)}(x, x_k + h\xi)\xi^j\mathrm{d}\xi, \tag{12}$$

从方程(10)和(12)可以构造 Hammerstein 型非线性积分方程的离散化格式为

$$\varphi_l^{(i)} - h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{h^j}{j!}\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{\left(x_k,\varphi_k^j\right)}\int_0^1 K_x^{(i)}\left(x_l, x_k + h\xi\right)\xi^j \mathrm{d}\xi = f^{(i)}\left(x_l\right), \tag{13}$$

$i = 0,1,\cdots,n$ 和 $l = 0,1,\cdots,(m-1)$。此后 $\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{\left(x_k,\varphi_k^{(j)}\right)}$ 意味着变量 $y = x_k$ 和近似值 $\varphi_k^{(j)}$ 替代精确值 $\varphi^{(j)}\left(x_k\right)$。一般可以用迭代法求解非线性系统(13)，一旦 $m(n+1)$ 的非线性系统被解决，我们就可以获得 $\varphi^{(j)}\left(x_k\right)$ 的数值解 $\varphi_k^{(j)}$ 其中 $j = 0,1,\cdots,n$ 和 $k = 0,1,\cdots,m-1$。$\varphi(x)$ 的近似解可以进一步给出

$$\varphi_{m,n}(x) = f(x) + h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{h^j}{j!}\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{\left(x_k,\varphi_k^{(j)}\right)}\int_0^1 K\left(x, x_k + h\xi\right)\xi^j \mathrm{d}\xi, \tag{14}$$

其中 $a \le x \le b$。

采用分段逼近和 Taylor 级数的思想来展示(14)的近似解。显然，当 n 较大时，非线性系统(13)将是复杂的，一般情况下，我们可以选择 $n = 0,1$ 或 2 和一个较大的 m 去获得精确解的一个比较好的近似解。

3. 收敛性和误差估计

这一部分，近似解 $\varphi_{m,n}(x)$ 的收敛性和误差估计是重点。首先，我们给出一个引理如下：

引理 1：如果有以下条件

$$\left\|K_x^{(i)}(x,y)\right\|_\infty = \max_{a\le x,y\le b}\left|K_x^{(i)}(x,y)\right| = P_i < +\infty$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^{n+1}\Omega}{\mathrm{d}y^{n+1}}\right\|_\infty = \max_{a\le y\le b}\left|\frac{\mathrm{d}^{n+1}\Omega}{\mathrm{d}y^{n+1}}\right| = N_0 < +\infty,$$

满足 $0 < h < 1$，

$$\left\|\left(k_i^n\varphi\right)(x) - \left(k_i\varphi\right)(x)\right\|_\infty \le \frac{P_i N_0 (b-a)}{(n+2)!}h^{n+1} \to 0,\quad n \to +\infty \tag{15}$$

对于一个固定的 n，

$$\left\|\left(k_i^n\varphi\right)(x) - \left(k_i\varphi\right)(x)\right\|_\infty \le \frac{P_i N_0 (b-a)}{(n+2)!}h^{n+1} \to 0,\quad h \to 0, \tag{16}$$

其中 $i = 0,1,2,\cdots,n$。

证明：运用等式(7) (10) (11) (12)得到

$$\begin{aligned}
&\left\|\left(k_i^n\varphi\right)(x) - \left(k_i\varphi\right)(x)\right\|\infty \\
&= h\left\|\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1 K_x^i\left(x, x_k + h\xi\right)\frac{(h\xi)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{\mathrm{d}^{n+1}\Omega}{\mathrm{d}y^{n+1}}\bigg|_{y=x_k}\mathrm{d}\xi\right\|_\infty \\
&\le hmP_iN_0\int_0^1\frac{(h\xi)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}\xi = \frac{mP_iN_0}{(n+2)!}h^{n+2} \\
&= \frac{P_iN_0(b-a)}{(n+2)!}h^{n+1}
\end{aligned} \tag{17}$$

在考虑 $0<h<1$ 的情况下，当 $n\to+\infty$ 时我们有 $\left\|(k_n\varphi)(x)-(k\varphi)(x)\right\|_\infty\to 0$，对于一个固定的 n，当 $h\to 0$ 时有 $\left\|(k_n\varphi)(x)-(k\varphi)(x)\right\|_\infty\to 0$。因此引理得证。

另一方面，算子 k_0^{-n} 的一个序列数值积分被定义为

$$\left(k_0^{-n}\varphi\right)(x)=h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{h^j}{j!}\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{\left(x_k,\varphi_k^{(j)}\right)}\int_0^1 K\left(x,x_k+h\xi\right)\xi^j\mathrm{d}\xi\,, \tag{18}$$

基于引理 1，可以很容易得到

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(x)-\varphi_{m,n}(x)\right\|_\infty&=\left\|(k_0\varphi)(x)-\left(k_0^{-n}\varphi\right)(x)\right\|_\infty\\&=\left\|(k_0\varphi)(x)-\left(k_0^{n}\varphi\right)(x)+\left(k_0^{n}\varphi\right)(x)-\left(k_0^{-n}\varphi\right)(x)\right\|_\infty\\&\le\left\|(k_0\varphi)(x)-\left(k_0^{n}\varphi\right)(x)\right\|_\infty+\left\|\left(k_0^{n}\varphi\right)(x)-\left(k_0^{-n}\varphi\right)(x)\right\|_\infty\\&\le\frac{P_0N_0(b-a)h^{n+1}}{(n+2)!}+\left\|\left(k_0^{n}\varphi\right)(x)-\left(k_0^{-n}\varphi\right)(x)\right\|_\infty\end{aligned} \tag{19}$$

另外，我们重写等式(13)为

$$\tilde{\Phi}=W\left(\tilde{\Phi}\right)+F\,, \tag{20}$$

这里

$$W\left(\tilde{\Phi}\right)=\left[\omega_l^{(i)}\left(\tilde{\Phi}\right)\right]_{m(n+1)\times 1},$$

$$F=\left[f^{(i)}(x_l)\right]_{m(n+1)\times 1}=\left[f^{(0)}(x_0),f^{(0)}(x_1),\cdots,f^{(n)}(x_{m-1})\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\tilde{\Phi}=\left[\varphi_k^{(j)}\right]_{m(n+1)\times 1}=\left[\varphi_0^{(0)},\varphi_1^{(0)},\cdots,\varphi_{m-1}^{(n)}\right]^{\mathrm{T}},$$

和

$$\omega_l^{(i)}\left(\tilde{\Phi}\right)=h\sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{n}\frac{h^j}{j!}\frac{\mathrm{d}^j\Omega}{\mathrm{d}y^j}\bigg|_{\left(x_k,\varphi_k^{(j)}\right)}\int_0^1 K_x^{(i)}\left(x_l,x_k+h\xi\right)\xi^j\mathrm{d}\xi\,,$$

其中 $i=0,1,\cdots,n$ 和 $l=0,1,\cdots,(m-1)$。

并且，从等式(4)和(8)，可得到

$$\Phi=W(\Phi)+F+R\,, \tag{21}$$

这里

$$\Phi=\left[\varphi^j(x_k)\right]_{m(n+1)\times 1}=\left[\varphi^{(0)}(x_0),\varphi^{(0)}(x_1),\cdots,\varphi^{(n)}(x_{m-1})\right]^{\mathrm{T}},$$

$$R=\left[r_s\right]_{m(n+1)\times 1},$$

和

$$r_0=h\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1 K\left(x_0,x_k+h\xi\right)R_n\left(\theta_k,h,\xi\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

$$r_1=h\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1 K\left(x_1,x_k+h\xi\right)R_n\left(\theta_k,h,\xi\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

$$\cdots$$

$$r_{m(n+1)-1} = h\sum_{k=0}^{m-1}\int_0^1 K_x^{(n)}\left(x_{m-1}, x_k + h\xi\right) R_n\left(\theta_k, h, \xi\right)\mathrm{d}\xi ,$$

现在假定非线性系统(13)有唯一解，可以使用迭代法[8]并满足以下收缩条件

$$\left\|W(\Phi) - W(\tilde{\Phi})\right\|_\infty \le \alpha\left\|\Phi - \tilde{\Phi}\right\|_\infty , \tag{22}$$

其中 $0 < \alpha < 1$。之后应用等式(20)和(24)得

$$\left\|\Phi - \tilde{\Phi}\right\|_\infty \le \left\|W(\Phi) - W(\tilde{\Phi})\right\|_\infty + \left\|R\right\|_\infty , \tag{23}$$

进一步得

$$\left\|\Phi - \tilde{\Phi}\right\|_\infty \le \frac{1}{1-\alpha}\left\|R\right\|_\infty = \frac{1}{1-\alpha}\max_{0\le s\le m(n+1)}\left|r_s\right| \le \frac{1}{1-\alpha}\frac{PN_0(b-a)}{(n+2)!}h^{n+1}, \tag{24}$$

这里 $P = \max_{i=0,1,\cdots,n} p_i$。

把式(24)代入式(19)得

$$\begin{aligned} &\left\|\varphi(x) - \varphi_{m,n}(x)\right\|_\infty \\ &\le \frac{P_0 N_0(b-a)}{(n+2)!}h^{n+1} + \frac{1}{1-\alpha}\frac{PN_0(b-a)}{(n+2)!}h^{n+1} , \\ &= \frac{N_0(b-a)h^{n+1}}{(n+2)!}\left(P_0 + \frac{P}{1-\alpha}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

从式(25)可知当 $n \to +\infty$，$0 < h < 1$ 或对于固定的一个 n 当 $m \to +\infty\left(i.e.\, h \to 0\right)$ 时，总有 $\left\|\varphi(x) - \varphi_{m,n}(x)\right\|_\infty \to +\infty$。最后，基于以上分析，我们有下面定理：

定理 2： 如果有以下条件

$$\left\|K_x^{(i)}(x,y)\right\|_\infty = \max_{a\le x,y\le b}\left|K_x^{(i)}(x,y)\right| = P_i < +\infty$$

$$\left\|\frac{\mathrm{d}^{n+1}\Omega}{\mathrm{d}y^{n+1}}\right\|_\infty = \max_{a\le y\le b}\left|\frac{\mathrm{d}^{n+1}\Omega}{\mathrm{d}y^{n+1}}\right| = N_0 < +\infty ,$$

$$\left\|W(\Phi) - W(\tilde{\Phi})\right\|_\infty \le \alpha\left\|\Phi - \tilde{\Phi}\right\|_\infty ,$$

$i = 0,1,2,\cdots,n$，式(14)的近似解 $\varphi_{m,n}(x)$ 收敛到精确解 $\varphi(x)$。即得

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\varphi_{m,n}(x) - \varphi(x)\right\|_\infty = 0,\quad 0 < h < 1 ,$$

对一个固定的 n 有

$$\lim_{h\to 0}\left\|\varphi_{m,n}(x) - \varphi(x)\right\|_\infty = 0 ,$$

此外，还可以得到以下误差估计

$$\left\|\varphi(x) - \varphi_{m,n}(x)\right\|_\infty \le \frac{N_0(b-a)h^{n+1}}{(n+2)!}\left(P_0 + \frac{P}{1-\alpha}\right),$$

其中 $P = \max_{i=0,1,\cdots,n} p_i$。

定理 2 表明，可以选择 $m\left(i.e\, h\right)$ 和 n 的两个可行值来得到精确解的近似解。

4. 数值结果

在此基础上，通过数值算例，验证了所提方法的有效性，并与已有的结果进行了比较。

例：[9] [10]给出 Hammerstein 式的非线性积分方程

$$\varphi(x)=x\exp(1)+1-\int_0^1(x+y)e^{\varphi(y)}dy, \tag{26}$$

其中 $0\le x\le 1$ 精确解为 $\varphi(x)=x$。我们选择 $(m,n)=(8,0)$ 和 $(m,n)=(8,1)$，可得

$$\varphi_{8,0}(x)=x\exp(1)+1-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}\exp\left(\varphi_k^{(0)}\right)\left(x+x_k+\frac{1}{16}\right), \tag{27}$$

和

$$\varphi_{8,1}(x)=x\exp(1)+1-\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7}\exp\left(\varphi_k^{(0)}\right)\left[\left(x+x_k+\frac{1}{16}\right)+\frac{\varphi_k^{(1)}}{8}\left(\frac{x+x_k}{2}+\frac{1}{24}\right)\right], \tag{28}$$

而且，我们可以计算

$$\varphi'(x)=\exp(1)+1-\int_0^1 e^{\varphi(y)}dy=c, \tag{29}$$

其中 c 是常数。因此，在实际计算中，假设 $\varphi_k^{(1)}=c$ 是可行的。为了比较，我们进一步选择 $(m,n)=(16,0)$ 和 $(m,n)=(16,1)$ 进行数值计算。

从表 1 可以看出，随着 m 和 n 的增加，近似解和精确解的误差在减小。

Table 1. The error of the approximation and exact solutions $\left|\varphi(x)-\varphi_{m,n}(x)\right|$

表 1. 近似解和精确解 $\left|\varphi(x)-\varphi_{m,n}(x)\right|$ 的误差

	$\left\|\varphi(x)-\varphi_{m,n}(x)\right\|$			
x	(8, 0)	(16, 0)	(8, 1)	(16, 1)
0.00	1.9824e−002	6.8735e−003	8.2399e−004	1.9335e−004
0.10	2.3733e−002	1.0312e−002	9.7868e−004	2.3289e−004
0.20	2.7642e−002	1.3786e−002	1.1334e−003	2.7243e−004
0.30	3.1551e−002	1.7261e−002	1.2881e−003	3.1196e−004
0.40	3.5460e−002	2.0735e−002	1.4428e−003	3.5150e−004
0.50	3.9369e−002	2.4210e−002	1.5974e−003	3.9104e−004
0.60	4.3278e−002	2.7684e−002	1.7521e−003	4.3058e−004
0.70	4.7178e−002	3.1158e−002	1.9068e−003	4.7011e−004
0.80	5.1096e−002	3.4633e−002	2.0615e−003	5.0965e−004
0.90	5.5005e−002	3.8107e−002	2.2162e−003	5.4919e−004
1.00	5.8914e−002	4.1582e−002	2.3709e−003	5.8872e−004

基金项目

广西自然科学基金(2016GXNSFAA380261)，广西研究生教育创新计划项目(No. YCSW2017048)。

参考文献

[1] Brezis, H. and Browder, F.E. (1974) Some New Results about Hammerstein Equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **80**, 567-572. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1974-13500-7

[2] Brezis, H. and Browder, F.E. (1975) Existence Theorems for Nonlinear Integral Equations of Hammerstein Type. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **81**, 73-78. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1975-13641-X

[3] Bugajewski, D. and Szufla, S. (1991) On the Existence of $L^{P1,P2}$-Solutions of the Hammerstein Integral Equations in Banach Spaces. *Mathematische Nachrichten*, **151**, 295-301. https://doi.org/10.1002/mana.19911510118

[4] Latrach, K. and Taoudi, M.A. (2007) Existence Results for a Generalized Nonlinear Hammerstein Equation on L_1 Spaces. Nonlinear Anal., **66**, 2325-2333. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.03.022

[5] Liu, X.L. (2009) On a Nonlinear Hammerstein Integral Equation with a Parameter. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **70**, 3887-3893. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.07.038

[6] Kaneko, H., Noren, R.D. and Novaprateep, B. (2003) Wavelet Applications to the Petrov-Galerkin Method for Hammerstein Equations. *Applied Numerical Mathematics*, **45**, 255-273. https://doi.org/10.1016/S0168-9274(02)00173-3

[7] Abdou, M.A., EL-Borai, M.M. and EL-Kojok, M.M. (2009) Toeplitz Matrix Method and Nonlinear Integral Equation of Hammerstein Type. J. Comput. Appl. Math., **223**, 765-776. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.02.012

[8] Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C. (1970) Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. SIAM, New York.

[9] Borzabadi, A.H. and Fard, O.S. (2009) A Numerical Scheme for a Class of Nonlinear Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **232**, 449-454. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.06.038

[10] Borzabadi, A.H., Kamyad, A.V. and Mehne, H.H. (2006) A Different Approach for Solving the Nonlinear Fredholm integral Equations of the Second Kind. *Applied Mathematics and Computation*, **173**, 724-735. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.04.008