

Non Oscillation Conservative Characteristic Difference Method for Solving Convection Diffusion Equations

Qianqian Wang, Lin Li, Yuqing Zhao, Zhongguo Zhou*

School of Information Science and Engineering, Shandong Agricultural University, Tai'an Shandong
Email: 1805675763@qq.com, linli_1987@163.com, 1844988922@qq.com, zhg_zhou@sda.u.edu.cn

Received: Oct. 28th, 2018; accepted: Nov. 19th, 2018; published: Nov. 26th, 2018

Abstract

The characteristic difference method based on quadratic Lagrange interpolation is used to solve the convection dominated diffusion problem, but there will be a larger numerical oscillation and not conservative. Combining the operator splitting, non-oscillatory and mass correction methods, the non-oscillation conservative characteristic difference methods are proposed to solve the convection diffusion equations. Firstly, the partial differential equations in two dimensions are splitting into two one-dimensional partial differential equations along the x -direction and the y -direction, respectively. Secondly, the second-order essentially non-oscillation and MMOCAA schemes are presented to compute the equations. By the numerical results, it shows that the scheme not only meets non-oscillatory and mass conservation, but also effectively solves the convection-dominant diffusion problems.

Keywords

Convection Diffusion Equations, Operator Splitting, Characteristic Difference Method, Essentially Non Oscillatory Interpolation, MMOCAA Scheme

对流扩散方程的非振荡守恒特征差分法

王钱钱, 李琳, 赵玉庆, 周忠国*

山东农业大学信息科学与工程学院应用数学系, 山东 泰安
Email: 1805675763@qq.com, linli_1987@163.com, 1844988922@qq.com, zhg_zhou@sda.u.edu.cn

收稿日期: 2018年10月28日; 录用日期: 2018年11月19日; 发布日期: 2018年11月26日

*通讯作者。

文章引用: 王钱钱, 李琳, 赵玉庆, 周忠国. 对流扩散方程的非振荡守恒特征差分法[J]. 应用数学进展, 2018, 7(11): 1446-1457. DOI: 10.12677/aam.2018.711169

摘要

当求解对流占优扩散问题时,采用传统的二次拉格朗日插值的特征差分法,会出现数值振荡,且不满足质量守恒。结合算子分裂,本质非振荡和MMOCAA质量校正,提出了求解对流扩散方程的非振荡的守恒特征差分法。首先采用局部一维(LOD)法把一个二维偏微分方程分裂成 x 方向和 y 方向的两个一维的偏微分方程组;其次在每个方向上利用二阶本质非振荡和MMOCAA格式进行数值计算。数值实验验证格式满足非振荡和质量守恒,能够有效地解决大型对流占优扩散问题。

关键词

对流扩散方程, 算子分裂, 特征差分法, 本质非振荡插值, MMOCAA格式

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对流扩散方程[1] [2] [3]是一种常见的用来描述海洋、大气等环境和化学中传热、质量运输的等运动现象。众所周知,对流占优导致对流扩散方程呈双曲特性,采用标准有限差分法会导致数值振荡和数值弥散。为有效抑制数值振荡和数值弥散现象,国内外学者提出了求解对流扩散方程的迎风[4] [5] [6]和特征格式。Douglas [2]利用二次 Lagrange 线性插值和差分法,提出了二阶修正特征线法(MMOC)法,并给出了收敛性分析。为改进二次 Lagrange 插值带来的数值振荡,陆金甫[7]、由同顺[8]和张鲁明[9]等人分别对特征差分法进行了修正和改进。由于 MMOC 特征差分不守恒, Douglas [10]提出了修正对流的质量守恒的 MMOCAA 差分格式,芮红兴[11]提出了质量守恒的特征有限元格式,梁栋[12]提出了守恒的高精度质量守恒的特征差分法。

考虑到实际研究问题的规模大,计算时间长和计算存储量大的问题,算子分裂和区域分解算法[13] [14]被广泛应用到求解抛物型问题中。算子分裂把一个高维问题分解成多个一维问题,进而可以把一个十分复杂且包含多个变量的方程转化为包含一个或者较少的自变量的多个方程组。柳忠伟[15]结合 LOD 算子分裂、特征差分法和二阶本质非振荡法求解对流方程,但此算法不满足质量守恒。

结合算子分裂,二阶本质非振荡和质量校正法,本文提出了求解对流扩散方程的守恒特征法。在每个时间步,算法分三步,第一步,利用 LOD 算子分裂将方程分解成沿 x 方向和 y 方向的两个一维的偏微分方程组。第二步,在每个方向上,结合二阶本质非振荡和特征差分法,构造特征差分法。第三步,引入保守的 MMOCAA 格式,提出本质非振荡守恒特征差分格式。最后,通过数值实验验证格式质量守恒。

2. 模型

2.1. 对流扩散方程

对于伴有物质运输、气溶胶运动和分子扩散的物理过程以及粘性流体的流动等流体运动现象,都可用如下的数学模型表述。

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}c - D\nabla c) = f, & (x, y) \in \Omega, t \in [0, T], \\ c(x, y, t) = 0, & (x, y) \in \partial\Omega, t \in [0, T], \\ c_0(x, y) = c_0, & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中有限区域 $c = c(x, y, t)$ 是流体的浓度, $\partial\Omega$ 为区域的边界, 其中 D , \mathbf{u} 分别表示扩散系数和速度场, 不失一般性, 假设它们均是常数, 即 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $D = (D_1, D_2)$ 。

2.2. LOD 算子分裂

局部一维格式

利用 LOD 算子分裂, 将对流扩散方程分别沿 x 方向和 y 方向进行分解, 得到如下的方程组:

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_1 c - D_1 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = f \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u_2 c - D_2 \frac{\partial c}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

分裂后的两个一维偏微分方程, 若利用时间一阶格式和空间二阶修正迎风格式离散, 截断误差可以达到 $O(h^2 + \Delta t)$, 且每个方向的方程可用追赶法求解。考虑到二阶修正迎风格式尽管可避免数值震荡, 但在一定程度上带来了数值弥散, 尤其在高大对流占优扩散问题时, 弥散现象变得更加明显。接下来, 将结合特征差分和二阶本质非震荡法, 解决对流扩散问题。

3. 算法

为了有效解决对流占优问题, 第一步, 分别对每个方向的方程采用特征线法处理, 构造本质非振荡特征差分格式; 第二步, 加入质量校正项, 引入保守的 MMOCOA 格式, 得到校正后的本质非振荡守恒特征差分格式, 并表示为矩阵形式; 第三步, 对于方程右端的未知项用本质非振荡插值求解, 使其转化为已知项; 第四步, 利用追赶法[16]求解对角占优的三对角矩阵。

3.1. 特征线法

Step 1: 沿 x 方向

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u_1 c - D_1 \frac{\partial c}{\partial x} \right) = f, \quad (3.1)$$

采用特征线法

$$\frac{\partial c}{\partial \tau_1} = \frac{\partial c}{\partial t} \cos \alpha + \frac{\partial c}{\partial x} \cos \beta. \quad (3.2)$$

τ_1 为 x 方向特征线, β 和 α 分别为特征线与 x 和 t 方向的夹角, 则

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}} \\ \cos \beta = \frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}} \end{cases}$$

代入(3.2)得

$$\frac{\partial c}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{1+u_1^2}} + \frac{\partial c}{\partial x} \frac{u_1}{\sqrt{1+u_1^2}} = \frac{\partial c}{\partial \tau_1}.$$

方程两边同乘 $\sqrt{1+u_1^2}$ ，代入(3.2)式，得

$$\frac{\partial c}{\partial \tau_1} \sqrt{1+u_1^2} - D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = f,$$

离散上式，得

$$\frac{C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} - \bar{C}_{ij}^{n-1}}{\Delta t} - D_1 \frac{C_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} - 2C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + C_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}}{h^2} = f_{ij}. \quad (3.3)$$

$\{C_{ij}\}$ 表示 $\{c_{ij}\}$ 的数值解， $\{\bar{C}_{ij}\}$ 将在后面给出。

Step 2: 沿 y 方向

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(u_2 c - D_2 \frac{\partial c}{\partial y} \right) = 0,$$

令

$$\frac{\partial c}{\partial \tau_2} = \frac{\partial c}{\partial t} \cos \phi + \frac{\partial c}{\partial y} \sin \phi,$$

其中 τ_2 是 y 方向的特征线， ϕ ， ϕ 分别为特征线与 y ， t 方向夹角，离散化，得

$$\frac{C_{ij}^n - \bar{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_2 \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{ij}^n + C_{i,j-1}^n}{h^2} = 0,$$

其中， $\{C_{ij}\}$ 表示 $\{c_{ij}\}$ 的数值解， $\{\bar{C}_{ij}^{n-1}\}$ 将在后面给出。而此时数值格式质量不守恒。

为解决格式质量不守恒问题，结合 MMOCOA 格式，现提出守恒的特征差分格式。

(1-a) 沿 x 方向，令

$$\bar{C}_{ij}^{n-1} = I_1 C_{ij}^{n-1}(\bar{x}_i), \lambda_1 = -\frac{u_1 \Delta t}{h}, \bar{x}_i = x_i - u_1 \Delta t.$$

不失一般性，我们假定 $\Delta t = O(h^2)$ ，即点 \bar{x}_i 落在 x_{i-1} 和 x_{i+1} 之间。

(1-b) 引入三个质量通量： $t = t^{n-1}$ 时的初始质量通量

$$R^{n-1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^{n-1} h^2.$$

中间质量通量

$$\bar{R}^{n-1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{C}_{ij}^{n-1} h^2.$$

改进的质量通量

$$\tilde{R}^{n-1} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{C}_{ij}^{n-1} h^2.$$

其中，

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \begin{cases} \max \left(I_1 C_{ij}^{n-1}(\tilde{x}_i^+), I_1 C_{ij}^{n-1}(\tilde{x}_i^-) \right), & R^{n-1} > \bar{R}^{n-1}, \\ \min \left(I_1 C_{ij}^{n-1}(\tilde{x}_i^+), I_1 C_{ij}^{n-1}(\tilde{x}_i^-) \right), & R^{n-1} \leq \bar{R}^{n-1}, \end{cases}$$

$$\tilde{x}_i^+ = \bar{x}_i + \delta_1, \quad \tilde{x}_i^- = \bar{x}_i - \delta_1, \quad \delta_1 = r_1 u_1 (\Delta t)^2, \quad r_1 = \frac{D_1 \Delta t}{h^2} \text{ 且 } 0 < r_1 < 2.$$

(1-c) 质量扰动参数 θ_1 的确定

如果 $\bar{R}^{n-1} = \tilde{R}^{n-1} \neq R^{n-1}$, 在这个时间步长内, 误差是允许接收的。当 $\bar{R}^{n-1} \neq \tilde{R}^{n-1}$ 时, θ_1 被确定为

$$R^{n-1} = \theta_1 \bar{R}^{n-1} + (1 - \theta_1) \tilde{R}^{n-1}.$$

(1-d) 定义 $\{\hat{C}_{ij}^{n-1}\}$

$$\hat{C}_{ij}^{n-1} = \theta_1 \bar{C}_{ij}^{n-1} + (1 - \theta_1) \tilde{C}_{ij}^{n-1}.$$

它是容易验证格式沿 x 方向满足质量守恒

(1-e) 计算 $\left\{C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}\right\}$ 。

加入质量校正后, (3.3)式变成

$$\frac{C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} - \hat{C}_{ij}^{n-1}}{\Delta t} - D_1 \frac{C_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} - 2C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + C_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}}}{h^2} = f_{ij}. \quad (3.4)$$

两边同乘 Δt , 令 $r_1 = \frac{D_1 \Delta t}{h^2}$ 则

$$C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} - \hat{C}_{ij}^{n-1} - r_1 \left(C_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} - 2C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + C_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}} \right) = f_{ij} \Delta t.$$

化简得

$$-r_1 C_{i+1,j}^{n-\frac{1}{2}} + (2r_1 + 1) C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} - r_1 C_{i-1,j}^{n-\frac{1}{2}} = f_{ij} \Delta t + \hat{C}_{ij}^{n-1}. \quad (3.5)$$

$$\begin{pmatrix} 2r_1 + 1 & -r_1 & & & & \\ -r_1 & 2r_1 + 1 & -r_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -r_1 \\ & & & & -r_1 & 2r_1 + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{N-1} \\ F_N \end{pmatrix}$$

记为

$$AC = F$$

其中系数矩

$$A = \begin{pmatrix} 2r_1 + 1 & -r_1 & & & & \\ -r_1 & 2r_1 + 1 & -r_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -r_1 \\ & & & & -r_1 & 2r_1 + 1 \end{pmatrix}$$

因为 $2r_1 + 1 > |r_1| + |r_1|$, 所以系数矩阵 A 是一个严格对角占优的三对角矩阵。

(2-a) 沿 y 方向,

$$\bar{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} = I_2 C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}(\bar{y}_j), \quad \lambda_2 = -\frac{u_2 \Delta t}{h},$$

假定 $\Delta t = O(h^2)$, $\bar{y}_j \in [y_{j-1}, y_{j+1}]$ 。

(2-b) 质量通量。 $t = t^{n-\frac{1}{2}}$ 时的质量通量

$$R^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij}^{n-\frac{1}{2}} h^2.$$

中间质量通量

$$\bar{R}^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \bar{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} h^2.$$

改进的质量通量

$$\tilde{R}^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \tilde{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} h^2.$$

其中,

$$\tilde{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \max \left(I_2 C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}(\tilde{y}_j^+), I_2 C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}(\tilde{y}_j^-) \right), & R^{n-\frac{1}{2}} > \bar{R}^{n-\frac{1}{2}}, \\ \min \left(I_2 C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}(\tilde{y}_j^+), I_2 C_{ij}^{n-\frac{1}{2}}(\tilde{y}_j^-) \right), & R^{n-\frac{1}{2}} \leq \bar{R}^{n-\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

$\tilde{y}_j^+ = \bar{y}_j + \eta_2$, $\tilde{y}_j^- = \bar{y}_j - \eta_2$ 其中, $\eta_2 = r_2 u_2 (\Delta t)^2$ 。

(2-c) θ_2 的确定

如果 $\bar{R}^{n-\frac{1}{2}} = \tilde{R}^{n-\frac{1}{2}} \neq R^{n-\frac{1}{2}}$, 误差可以接收。

当 $\bar{R}^{n-\frac{1}{2}} \neq \tilde{R}^{n-\frac{1}{2}}$ 时, θ_2 被确定为

$$R^{n-\frac{1}{2}} = \theta_2 \bar{R}^{n-\frac{1}{2}} + (1-\theta_2) \tilde{R}^{n-\frac{1}{2}}.$$

(2-d) 计算 $\{C_{ij}^n\}$ 。定义 $\{\hat{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}\}$ 满足

$$\hat{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} = \theta_2 \bar{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}} + (1-\theta_2) \tilde{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}.$$

(3.4)式加入质量校正后, 得

$$\frac{C_{ij}^n - \hat{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} - D_2 \frac{C_{i,j+1}^n - 2C_{ij}^n + C_{i,j-1}^n}{h^2} = 0, \quad (3.6)$$

令 $r_2 = \frac{D_2 \Delta t}{h^2}$, 得

$$-r_2 C_{ij}^n + (2r_2 + 1) C_{ij}^n - r_2 C_{i,j-1}^n = \hat{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

表示成矩阵形式, 即

$$BC = F$$

由于 A, B 均为严格对角占优三对角矩阵, 故采用追赶法求解。

3.2. 本质非振荡插值

本部分给出 $\{\bar{C}_{ij}^{n-1}, \tilde{C}_{ij}^{n-1}, \bar{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}, \tilde{C}_{ij}^{n-\frac{1}{2}}\}$ 的计算方法。为了避免数值震荡, 欲通过比较两个二阶差商的绝

对值，选择绝对值相对较小的方法给出(文献[8])。

1) 当 u_1 为正数时，

(1-1) 当 $|C_{i-2,j}^{n-1} - 2C_{i-1,j}^{n-1} + C_{ij}^{n-1}| > |C_{i+1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i-1,j}^{n-1}|$ 时，利用牛顿插值得

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}^{n-1} &= C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i-1,j}^{n-1}}{h}(\bar{x}_i - x_i) + \frac{C_{i+1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i-1,j}^{n-1}}{2h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i) \\ &= \frac{1}{2h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i)C_{i+1,j}^{n-1} + \left[1 + \frac{1}{h}(\bar{x}_i - x_i) - \frac{1}{h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i)\right]C_{ij}^{n-1} \\ &\quad + \left[-\frac{1}{h}(\bar{x}_i - x_i) + \frac{1}{2h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i)\right]C_{i-1,j}^{n-1} \\ &= \frac{(h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{2h^2}C_{i+1,j}^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{h}u_1\Delta t - \frac{1}{h^2}(h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)\right)C_{ij}^{n-1} \\ &\quad + \left(\frac{1}{h}u_1\Delta t + \frac{(h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{2h^2}\right)C_{i-1,j}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

同理

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1} = C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i-1,j}^{n-1}}{h}(\tilde{x}_i - x_i) + \frac{C_{i+1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i-1,j}^{n-1}}{2h^2}(\tilde{x}_i - x_{i-1})(\tilde{x}_i - x_i).$$

令

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{h^2}(h - u_1\Delta t + \delta_1)(-u_1\Delta t + \delta_1), \quad k_2 = \frac{1}{h}(-u_1\Delta t + \delta_1), \\ k_3 &= \frac{1}{h^2}(h - u_1\Delta t - \delta_1)(-u_1\Delta t - \delta_1), \quad k_4 = \frac{1}{h}(-u_1\Delta t - \delta_1). \end{aligned}$$

由上式计算可得，当 $\tilde{x}_i^+ = \bar{x}_i + \delta_1$ 时，

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,+} = \frac{k_1}{2}C_{i+1,j}^{n-1} + (1 + k_2 - k_1)C_{ij}^{n-1} + \left(-k_2 + \frac{k_1}{2}\right)C_{i-1,j}^{n-1}.$$

当 $\tilde{x}_i^- = \bar{x}_i - \delta_1$ 时，

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,-} = \frac{k_3}{2}C_{i+1,j}^{n-1} + (1 + k_4 - k_3)C_{ij}^{n-1} + \left(-k_4 + \frac{k_3}{2}\right)C_{i-1,j}^{n-1}.$$

当 $R^{n-1} > \bar{R}^{n-1}$ 时， $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \max\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$ ， $R^{n-1} \leq \bar{R}^{n-1}$ 时， $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \min\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$ 。

(1-2) 当 $|C_{i-2,j}^{n-1} - 2C_{i-1,j}^{n-1} + C_{ij}^{n-1}| \leq |C_{i+1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i-1,j}^{n-1}|$ 时，得

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}^{n-1} &= C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i-1,j}^{n-1}}{h}(\bar{x}_i - x_i) + \frac{C_{ij}^{n-1} - 2C_{i-1,j}^{n-1} + C_{i-2,j}^{n-1}}{2h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i) \\ &= \left[1 + \frac{1}{h}(\bar{x}_i - x_i) + \frac{1}{2h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i)\right]C_{ij}^{n-1} + \frac{1}{2h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i)C_{i-2,j}^{n-1} \\ &\quad - \left[\frac{1}{h}(\bar{x}_i - x_i) + \frac{1}{h^2}(\bar{x}_i - x_{i-1})(\bar{x}_i - x_i)\right]C_{i-1,j}^{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{h}u_1\Delta t + \frac{1}{2h^2}(h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)\right)C_{ij}^{n-1} + \frac{(h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{2h^2}C_{i-2,j}^{n-1} \\ &\quad - \left(-\frac{1}{h}u_1\Delta t + \frac{(h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{h^2}\right)C_{i-1,j}^{n-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1} = C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i-1,j}^{n-1}}{h} (\tilde{x}_i - x_i) + \frac{C_{ij}^{n-1} - 2C_{i-1,j}^{n-1} + C_{i-2,j}^{n-1}}{2h^2} (\tilde{x}_i - x_{i-1})(\tilde{x}_i - x_i)$$

由上式计算可得, 当 $\tilde{x}_i^+ = \bar{x}_i + \delta_1$ 时,

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,+} = \left(1 + k_2 + \frac{k_1}{2}\right) C_{ij}^{n-1} + \frac{k_1}{2} C_{i-2,j}^{n-1} - (k_1 + k_2) C_{i-1,j}^{n-1}.$$

当 $\tilde{x}_i^- = \bar{x}_i - \delta_1$ 时,

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,-} = \left(1 + k_4 + \frac{k_3}{2}\right) C_{ij}^{n-1} + \frac{k_3}{2} C_{i-2,j}^{n-1} - (k_3 + k_4) C_{i-1,j}^{n-1}.$$

当 $R^{n-1} > \bar{R}^{n-1}$ 时, $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \max\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$

当 $R^{n-1} \leq \bar{R}^{n-1}$ 时, $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \min\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$

2) 当 u_1 为负数时, 利用牛顿插值, $p_1 = \frac{1}{h^2}(-h - u_1\Delta t + \delta_1)(-u_1\Delta t + \delta_1)$,

$$p_2 = \frac{1}{h}(-u_1\Delta t + \delta_1), \quad p_3 = \frac{1}{h^2}(-h - u_1\Delta t - \delta_1)(-u_1\Delta t - \delta_1), \quad p_4 = \frac{1}{h}(-u_1\Delta t - \delta_1)$$

(2-1) $|C_{i-1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i+1,j}^{n-1}| > |C_{ij}^{n-1} - 2C_{i+1,j}^{n-1} + C_{i+2,j}^{n-1}|$ 时, 得

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}^{n-1} &= C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i+1,j}^{n-1}}{-h} (\bar{x}_i - x_i) + \frac{C_{ij}^{n-1} - 2C_{i+1,j}^{n-1} + C_{i+2,j}^{n-1}}{2h^2} (\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_i - x_{i+1}) \\ &= \frac{(-h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{2h^2} C_{i+2,j}^{n-1} + \left(1 + \frac{1}{h}u_1\Delta t + \frac{1}{2h^2}(-h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)\right) C_{ij}^{n-1} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{h}u_1\Delta t - \frac{(-h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{h^2}\right) C_{i+1,j}^{n-1} \\ \bar{C}_{ij}^{n-1} &= C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i+1,j}^{n-1}}{-h} (\tilde{x}_i - x_i) + \frac{C_{ij}^{n-1} - 2C_{i+1,j}^{n-1} + C_{i+2,j}^{n-1}}{2h^2} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1})C_{i+2,j}^{n-1} + \left[1 - \frac{1}{h}(\tilde{x}_i - x_i) + \frac{1}{2h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1})\right] C_{ij}^{n-1} \\ &\quad + \left[\frac{1}{h}(\tilde{x}_i - x_i) - \frac{1}{h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1})\right] C_{i+1,j}^{n-1} \end{aligned}$$

由上式计算可得, 当 $\tilde{x}_i^+ = \bar{x}_i + \delta_1$ 时,

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,+} = \left(1 + p_2 + \frac{p_1}{2}\right) C_{ij}^{n-1} + \frac{p_1}{2} C_{i+2,j}^{n-1} + (p_2 - p_1) C_{i+1,j}^{n-1}.$$

当 $\tilde{x}_i^- = \bar{x}_i - \delta_1$ 时,

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,-} = \left(1 + p_4 + \frac{p_3}{2}\right) C_{ij}^{n-1} + \frac{p_3}{2} C_{i+2,j}^{n-1} + (p_4 - p_3) C_{i+1,j}^{n-1}.$$

当 $R^{n-1} > \bar{R}^{n-1}$ 时, $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \max\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$, 当 $R^{n-1} \leq \bar{R}^{n-1}$ 时, $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \min\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$

(2-2) $|C_{i-1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i+1,j}^{n-1}| \leq |C_{ij}^{n-1} - 2C_{i+1,j}^{n-1} + C_{i+2,j}^{n-1}|$ 时, 得

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}^{n-1} &= C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i+1,j}^{n-1}}{-h} (\bar{x}_i - x_i) + \frac{C_{i-1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i+1,j}^{n-1}}{2h^2} (\bar{x}_i - x_i)(\bar{x}_i - x_{i+1}) \\ &= \left(1 + \frac{1}{h}u_1\Delta t + \frac{1}{h^2}(-h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)\right) C_{ij}^{n-1} + \frac{(-h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{2h^2} C_{i-1,j}^{n-1} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{h}u_1\Delta t + \frac{(-h - u_1\Delta t)(-u_1\Delta t)}{2h^2}\right) C_{i+1,j}^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ij}^{n-1} &= C_{ij}^{n-1} + \frac{C_{ij}^{n-1} - C_{i+1,j}^{n-1}}{-h}(\tilde{x}_i - x_i) + \frac{C_{i-1,j}^{n-1} - 2C_{ij}^{n-1} + C_{i+1,j}^{n-1}}{2h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1}) \\ &= \left[1 - \frac{1}{h}(\tilde{x}_i - x_i) + \frac{1}{h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1}) \right] C_{ij}^{n-1} + \frac{1}{2h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1}) C_{i-1,j}^{n-1} \\ &\quad + \left[\frac{1}{h}(\tilde{x}_i - x_i) + \frac{1}{2h^2}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_i - x_{i+1}) \right] C_{i+1,j}^{n-1} \end{aligned}$$

计算可得，当 $\tilde{x}_i^+ = \bar{x}_i + \delta_1$ 时，

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,+} = (1 - p_2 + p_1)C_{ij}^{n-1} + \frac{p_1}{2}C_{i-1,j}^{n-1} + \left(p_2 + \frac{p_1}{2} \right) C_{i+1,j}^{n-1}.$$

当 $\tilde{x}_i^- = \bar{x}_i - \delta_1$ 时，

$$\tilde{C}_{ij}^{n-1,-} = (1 - p_4 + p_3)C_{ij}^{n-1} + \frac{p_3}{2}C_{i-1,j}^{n-1} + \left(p_4 + \frac{p_3}{2} \right) C_{i+1,j}^{n-1}.$$

当 $R^{n-1} > \bar{R}^{n-1}$ 时， $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \max\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$ ， $R^{n-1} \leq \bar{R}^{n-1}$ 时， $\tilde{C}_{ij}^{n-1} = \min\{\tilde{C}_{ij}^{n-1,+}, \tilde{C}_{ij}^{n-1,-}\}$ 。

同理，可得沿 y 方向。

4. 数值实验

方程(1)中的速度场系数 $u_1 = u_2 = 0.5$ ，扩散系数 $d_1 = d_2 = 0.02$ ，有限区域 $\Omega = [0,5] \times [0,5]$ ，时间剖分 $\Delta t = \frac{1}{100}$ 和空间剖分 $h = \frac{1}{10}$ 。假定有初始时刻浓度只在 $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ ， $\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right)$ ， $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$ 位置为 1，其他位置浓度值为 0。假定右端项 $f = 0$ 。

图 1~图 6 展示了浓度在不同时刻的表面图和等值线图，由于对流项的存在，浓度会随着时间，沿着对角线方向行进，同时，由于扩散项的存在，浓度会不断的减小，这与物理现象相吻合。因此，我们的格式可很好地描述对流扩散问题，而且我们空间步长比较大时 ($h = 0.1$)，没有出现数值震荡问题。

验证格式的质量误差，令时间剖分 $\Delta t = 0.01$ 和空间步长分别取 $h = 0.1, 0.05, 0.02, 0.01$ 。并与文献[15]进行比较。

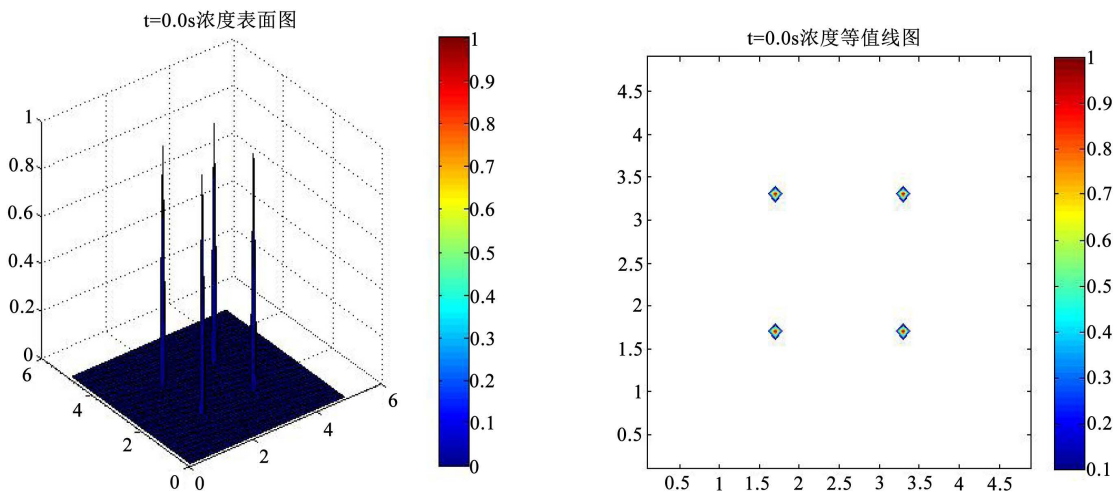


Figure 1. T = 0.0 s time concentration surface map and contour map
图 1. T = 0.0 s 时刻浓度表面图和等值线图

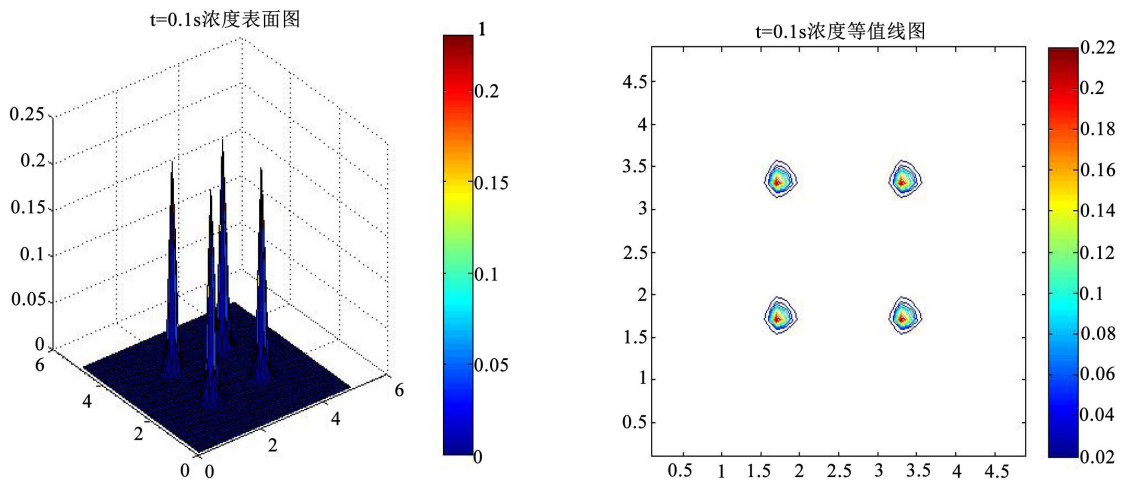


Figure 2. $T = 0.1$ s time concentration surface map and contour map
图 2. $T = 0.1$ s 时刻浓度表面图和等值线图

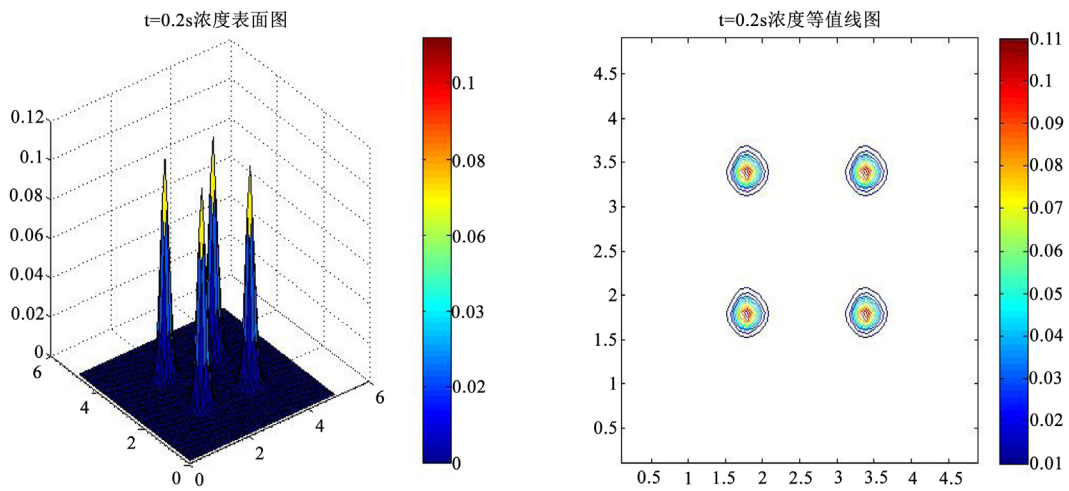


Figure 3. $T = 0.2$ s time concentration surface map and contour map
图 3. $T = 0.2$ s 时刻浓度表面图和等值线图

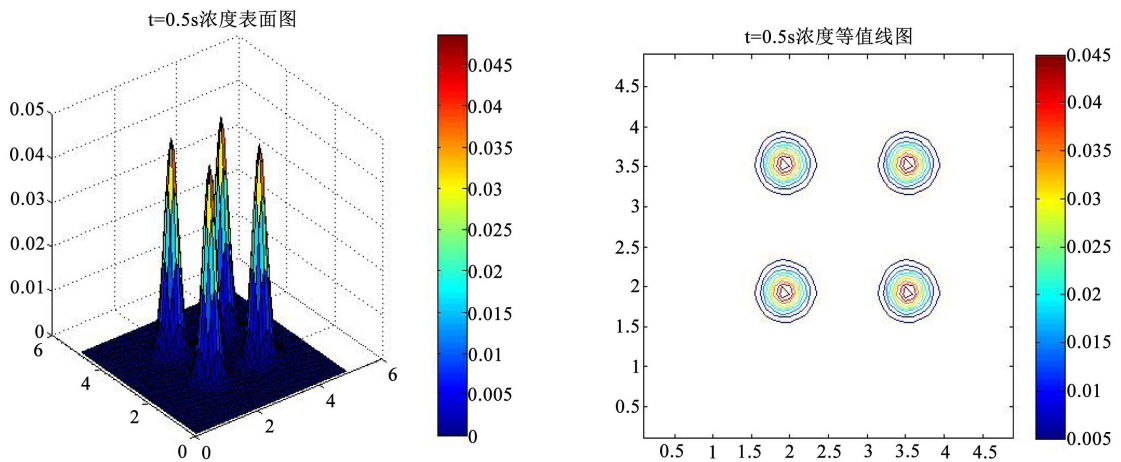


Figure 4. $T = 0.5$ s time concentration surface map and contour map
图 4. $T = 0.5$ s 时刻浓度表面图和等值线图

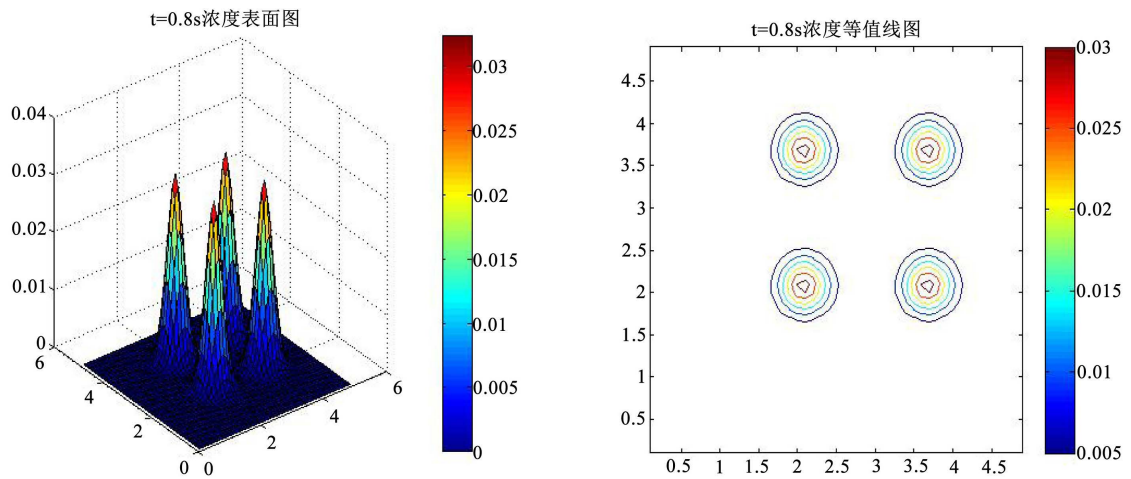


Figure 5. T = 0.8 s time concentration surface map and contour map
 图 5. T = 0.8 s 时刻浓度表面图和等值线图

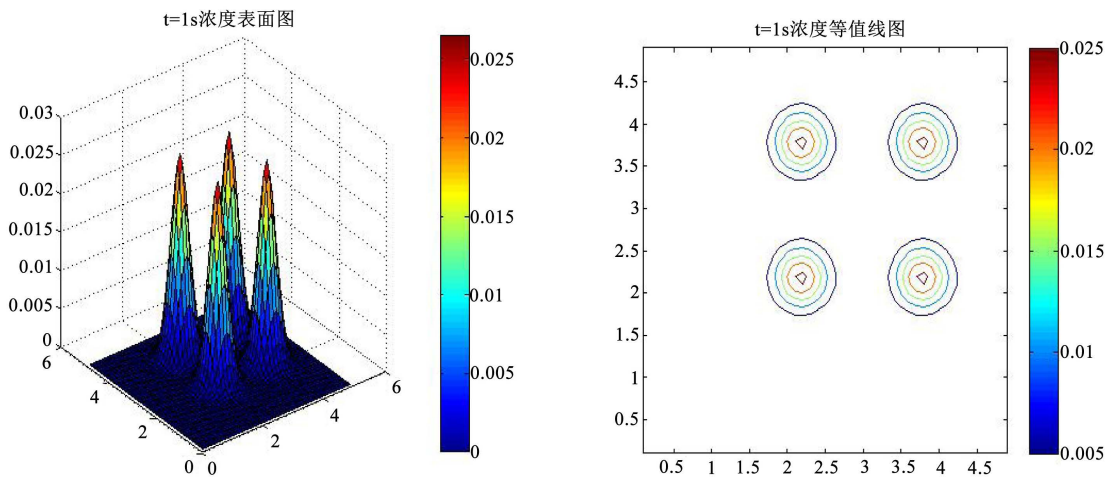


Figure 6. T = 1.0 s time concentration surface map and contour map
 图 6. T = 1.0 s 时刻浓度表面图和等值线图

Table 1. Mass errors at the different time
 表 1. 不同时刻的质量误差

$t \backslash h$		0.1	0.05	0.02	0.01
		$t = 0.1$	文献[15] 0.0183	0.0046	7.1782E-04
	本文	2.9116E-14	1.5318E-15	1.9516E-17	1.8865E-17
$t = 0.2$	文献[15]	0.024	0.0046	7.1997E-04	1.8516E-04
	本文	5.9057E-14	1.6098E-15	7.1557E-17	3.8272E-17
$t = 0.5$	文献[15]	0.0204	0.0047	7.2160E-04	1.8523E-04
	本文	1.5028E-11	1.8180E-15	2.5370E-17	2.9545E-17
$t = 1$	文献[15]	0.0206	0.0047	7.2228E-04	1.8523E-04
	本文	2.1037E-07	1.4909E-09	2.8009E-11	5.2204E-12

由表 1 中数据, 可知在加入质量校正前, 格式质量之差数值比较大, 当加入质量校正后, 格式质量之差可以达到 10^{-11} , 可以认为是质量守恒的。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61703250, 61503227), 山东自然科学基金资助项目(ZR2017BA029, ZR2017BF002)。

参考文献

- [1] 童小红, 王兴, 苏李君, 等. 对流扩散方程的特征线 EFG 算法[J]. 工程数学学报, 2018, 35(2): 179-192.
- [2] Douglas, J. and Thomas, F. (1982) Numerical Methods for Convection Dominated Diffusion Problems Based on Combining the Method of Characteristics with Finite Element or Finite Difference Procedures. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **10**, 871-885.
- [3] Gabriel, R., Burman, E. and Karakatsani, F. (2017) Blending Low-Order Stabilised Finite Element Methods: A Positivity Preserving Local Projection Method for the Convection-Diffusion Equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 23-26.
- [4] 梁栋. 对流扩散方程的一类迎风格式[J]. 计算数学, 1991(2): 133-141.
- [5] 袁益让, 梁栋, 芮洪兴, 海水入侵及防治工程的数值模拟[J]. 计算物理, 2001, 18(6): 556-562.
- [6] Zhou, Z. and Liang, D. (2017) The Mass-Preserving and Modified-Upwind Splitting DDM Scheme for Time Dependent Convection Diffusion Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **317**, 247-273. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.10.031>
- [7] 陆金普, 刘晓遇, 杜正平. 对流占优扩散问题的一种特征差分方法[J]. 清华大学学报, 2002, 42(8): 111-113.
- [8] 由同顺. 对流扩散方程的本质非振荡特征差分方法[J]. 应用数学, 2000, 21(4): 89-94.
- [9] 黄素珍, 张鲁明. 对流扩散方程的一种高精度特征差分格式[J]. 南京师大学报, 2005, 28(2): 38-41.
- [10] Douglas, J., Huang, C. and Pereira, F. (1999) The Modified Method of Characteristics with Adjust Advection. *Numerische Mathematik*, **83**, 353-369. <https://doi.org/10.1007/s002110050453>
- [11] Rui, H. and Tabata, M. (2010) A Mass-Conservative Characteristic Finite Element Scheme for Convection-Diffusion Problem. *Journal of Scientific Computing*, **43**, 416-432. <https://doi.org/10.1007/s10915-009-9283-3>
- [12] Fu, K. and Liang, D. (2016) The Conservative Characteristic FD Methods for Atmospheric Aerosol Transport Problems. *Journal of Computational Physics*, **305**, 494-520. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.10.049>
- [13] Zhou, Z. and Liang, D. (2016) The Mass-Preserving S-DDM Scheme for Two-Dimensional Parabolic Equations. *Communications in Computational Physics*, **19**, 411-441. <https://doi.org/10.4208/cicp.070814.190615a>
- [14] Zhou, Z., Liang, D. and Wong, Y. (2018) The New Mass-Conserving S-DDM Scheme for Two-Dimensional Parabolic Equations with Variable Coefficients. *Applied Mathematics and Computation*, **338**, 882-902. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.06.021>
- [15] 柳忠伟. 求解高维对流扩散方程的高效本质非振荡特征差分方法[D]: [学士学位论文]. 泰安: 山东农业大学, 2017.
- [16] 李清扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第5版. 北京: 清华大学出版社, 2008.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org