

# Multivariate Lagrange Interpolation Defined on Cone

Jinshuang He, Yunchao Jiang, Chang Xie, Jing Tong, Lu Liu, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Email: 924048814@qq.com, 1151682283@qq.com, 1992521275@qq.com, 2458416309@qq.com

Received: Nov. 17<sup>th</sup>, 2018; accepted: Dec. 6<sup>th</sup>, 2018; published: Dec. 13<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

The multivariate Lagrange interpolation problem, which is usually defined on the cone, is often studied in practical scientific research and production. Multivariate Lagrange interpolation is proposed to define the definition of cone, given to determine whether the node group on a cone form judgment theorem and superposition method to construct interpolation regular set of nodes, finally is to implement the method.

## Keywords

Cone, Multivariate Lagrange Interpolation, Regular Set of Nodes, Superposition Interpolation Method

---

# 定义于锥面上的多元Lagrange插值问题

何金霜, 姜云超, 谢 畅, 佟 婧, 刘 璐, 崔利宏

辽宁师范大学, 辽宁 大连

Email: 924048814@qq.com, 1151682283@qq.com, 1992521275@qq.com, 2458416309@qq.com

收稿日期: 2018年11月17日; 录用日期: 2018年12月6日; 发布日期: 2018年12月13日

---

## 摘 要

针对在实际科研生产中经常涉及到的有关定义于锥面上的多元Lagrange插值问题进行了研究。提出了定义于锥面上的多元Lagrange插值定义, 给出了判定锥面上的结点组是否构成插值唯一正解结点组的判定定理以及迭加构造方法, 最后通过算列对所得方法进行了实现。

## 关键词

锥面, 多元Lagrange插值, 唯一可解结点组, 迭加插值法

---



## 1. 引言

多元函数插值长期以来一直是计算数学研究领域的一个主要研究内容，有关多元函数插值基本理论和方法研究中一个基本问题是多元插值函数的唯一存在问题，也就是插值的正则性问题。目前，国内外学者对这一问题的研究主要有两种：一种是给定插值多项式空间构造相应多项式空间的适定结点组；另一种是给定插值结点组构造相应的适定插值多项式空间并要求多项式空间的次数尽可能的低[1]。对于某一类问题，目前有关在整个空间进行插值以及关于定义于空间中一般代数流形插值的研究结果相对系统，而关于有着重要实用价值的具体流形上的插值结果相对较少。

锥面是一类重要的二次代数曲面，其在工程设计中有着重要应用，例如许多机械部件和建筑物的外形采用了锥面；原苏联第二颗人造卫星火箭的防护罩也是采用了锥面外形等。因此锥面上的 Lagrange 插值的研究有着重要的应用价值。

## 2. 基本定义和基本定理

本文主要研究三维欧式空间  $R^3$  中的锥面  $F = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \right\}$  上进行多元 Lagrange 插值问题。

首先引入若干基本概念。

设  $n$  为非负整数，令  $P_n^{(3)}$  表示所有全次数为  $n$  的三元代数多项式构成的集合，即  $\dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}$  定义 1 ( $P_n^{(3)}$  的插值唯一正解结点组)。

设  $m = \binom{n+3}{3}$ ，令  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$  为  $R^3$  中  $m$  个互异点构成的点集，如果对于任意给定的数组

$\{f_i \in R \mid i=1, \dots, m\}$ ，恒存在唯一多项式  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ ，使之满足： $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ ，则称  $A$  为  $P_n^{(3)}$  的一个唯一正解结点组[2]。

定义 2 ( $F$  上的插值唯一正解结点组)

设  $F$  为如上所定义的锥面， $P_n^{(3)}(F)$  为  $P_n^{(3)}$  在  $F$  上的限制， $m = \dim P_n^{(3)}(F)$ ，称  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$  为定义于  $F$  上的一个  $n$  次插值唯一正解结点组，如果对于任意给定的数组  $\{f_i \in R \mid i=1, \dots, m\}$ ，恒存在多项式  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ ，满足  $p(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ ， $\dim P_n^{(3)}(F) = \binom{n+3}{3} - \binom{n+3-2}{3}$ 。

定理 1 (构造  $P_n^{(3)}$  插值唯一正解结点组的添加锥面法)。

设  $m$  为如上所定义， $r = \binom{n+5}{3}$ ，结点组  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \notin F$  关于  $P_n^{(3)}$  的一个唯一正解结点组，而

$B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r$  是定义于锥面  $F$  的一个  $n+2$  次唯一正解结点组，则  $\{Q_i\}_{i=1}^r = A \cup B$  必定构成  $P_{n+2}^{(3)}$  的唯一正解结点组。

证明：设  $Q_i = (x_i, y_i, z_i), i=1, \dots, r$ 。因为  $B$  为定义于  $F$  上的  $n+2$  次唯一正解结点组，由定义 2，对任意给定数组  $\{f_i \mid i=m+1, \dots, r\}$  恒存在多项式  $p_1(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$  使得  $p_1(Q_i) = f_i, i=m+1, \dots, r$ 。

又因为  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \notin F$  关于  $P_n^{(3)}$  的一个唯一正解结点组, 由定义 1 对任意的数组  $\{f_i | i=1, \dots, m\}$  恒存在多项式  $p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  使得  $p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - \frac{z_i^2}{c^2}}, i=1, \dots, m$ , 其中  $(x_i, y_i, z_i)$  为  $Q_i, i=1, \dots, m$  的三维坐标,

构造一个多项式

$$p(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) p_2(x, y, z)$$

显然有  $p(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$  且满足  $p(Q_i) = p_1(Q_i) + \left( \frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - \frac{z_i^2}{c^2} \right) p_2(Q_i) = f_i, i=1, \dots, r$

则由定义 1 知,  $A \cup B$  为  $P_{n+2}^{(3)}$  的唯一正解结点组[3]。

定理 2 (构造  $F$  上插值唯一正解结点组添加圆锥曲线法)。

设  $A = \{Q_i\}_{i=1}^{(n+1)^2}$  为锥面  $F$  上的  $n$  次插值唯一正解结点组, 平面  $p(x, y, z) \cap A = \phi$  与锥面  $F$  横截相交于圆周曲线  $C(x, y, z)$ ,  $B$  是定义于  $C$  上的一个  $n+1$  次唯一正解结点组, 则  $A \cup B$  必定构成定义于锥面  $F$  上的一个  $n+1$  次唯一正解结点组。

定理 3 (判定定理)

$F$  上的  $m = (n+1)^2$  个互异点  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  能够做成定义于锥面  $F$  上的  $n$  次插值唯一正解结点组的充分必要条件是, 若存在  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 满足  $p(Q_i) = 0, i=1, \dots, m$ , 蕴含如此的  $p(x, y, z)$  在锥面  $F$  上恒为零。

证明: 充分性 设  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 满足  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in A \cup B$  由条件可知,  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in F$ 。从而, 对于定义于锥面  $F$  的一个  $n$  次插值唯一正解结点组  $\tilde{A} \subset F$ , 亦有  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A}$ , 即  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A} \cup B$ 。又因为  $\tilde{A} \cup B$  为  $P_n^{(3)}$  的插值唯一正解结点组, 故  $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

必要性 令  $r = \binom{n+3}{3}$ , 取  $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r \notin F$  为关于  $P_{n-2}^{(3)}$  的唯一正解结点组, 可以断言:  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  构成  $P_n^{(3)}$  的唯一正解结点组。事实上, 对任给  $\{f_i\}_{i=1}^r$ , 由于  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$  为定义  $F$  上的  $n$  次唯一正解结点组, 故存在多项式  $p_1(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  满足  $p_1(Q_i) = f_i, i=1, \dots, m$ 。

又因为  $B \notin F$  且为关于的  $P_{n-2}^{(3)}$  的唯一正解结点组, 则存在多项式  $p_2(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$  满足

$$p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2} - \frac{z_i^2}{c^2}}, \quad i = m+1, \dots, r \quad (*)$$

则多项式

$$\tilde{p}(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) p_2(x, y, z)$$

满足  $\tilde{p}(Q_i) = f_i, i=1, \dots, r$ , 由定义知  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  是  $P_n^{(3)}$  的唯一正解结点组, 同时, 在上述过程中取  $f_i = 0, i=1, \dots, m$ , 则(\*)式中的  $p_1(x, y, z) \equiv 0$ , 此时

$$\tilde{p}(x, y, z) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$$

满足定理中的插值条件的多项式, 故由  $P_n^{(3)}$  空间中满足相同插值条件的多项式的唯一存在性有

$$p(x, y, z) = \tilde{p}(x, y, z) = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right) p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$$

即  $p(x, y, z)$  在锥面  $F$  上恒为零值[4]。

**结论的例子** 设被插值函数为  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ，锥面方程为  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ，取锥面外的一点  $Q_0(1, 1, -1)$  并且在锥面上取互异的 9 个点  $Q_1(1, 1, -1.41)$ ， $Q_2(1, 2, -2.24)$ ， $Q_3(1, 0, -1)$ ， $Q_4(-1, 1, -1.41)$ ， $Q_5(-1, -1, -1.41)$ ， $Q_6(-1, 0, -1)$ ， $Q_7(0, 1, -1)$ ， $Q_8(0, -1, -1)$ ， $Q_9(0, 2, -2)$  则由本文定理 1 知：点组  $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_9\}$  构成  $P_2^{(3)}$  的唯一正解结点组，如图 1，设函数在这些点上的二次插值多项式为

$$p(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

将适定结点带入  $p(Q_i) = f(Q_i), i = 0, 1, \dots, 9$  得到方程组为  $A * X = B$  其中

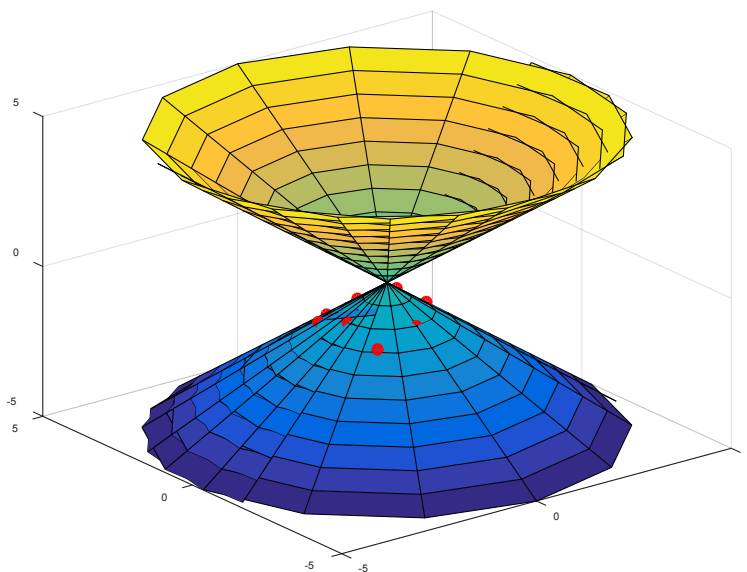
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1.41 & -1.41 & 1 & 1 & -1.41 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & -2.24 & -4.48 & 1 & 2 & -2.24 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1.41 & -1.41 & -1 & 1 & -1.41 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1.41 & 1.41 & -1 & -1 & -1.41 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1.73 \\ 2 \\ 3.16 \\ 1.41 \\ 2 \\ 2 \\ 1.41 \\ 1.41 \\ 1.41 \\ 2.83 \end{bmatrix}$$

解方程组得到

$$\begin{cases} a_1 = 0.3190 \\ a_2 = 0.3185 \\ a_3 = -0.3568 \\ a_4 = 0.0015 \\ a_5 = 0.0025 \\ a_6 = -0.0037 \\ a_7 = 0.0020 \\ a_8 = -0.0037 \\ a_9 = -1.5277 \\ a_{10} = -0.0793 \end{cases}$$

代入得到

$$f(x, y, z) = 0.3190x^2 + 0.3185y^2 - 0.3568z^2 + 0.0015xy + 0.0025xz - 0.0037yz + 0.0020x - 0.0037y - 1.5277z - 0.0793$$



**Figure 1.** The effect picture of hyperboloid point taking  
**图 1.** 锥面取点效果图

我们用插值多项式在  $(1, 1, 0)$ ， $(0, 2, 1)$  的插值结果分别为  $0.5580$ ， $-0.7045$ ，而精确值分别为  $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{5}$ ，那么误差分别为  $t_1 = |\sqrt{2} - 0.5580| \approx 0.8562$ ， $t_2 = |\sqrt{5} - (-0.7045)| \approx 2.9406$  [5]。

## 参考文献

- [1] 张步林. 关于二次锥面的讨论[J]. 成都纺织高等专科学校学报, 2007, 24(2): 33-35, 55.
- [2] 赵兴仁. 利用锥面母线测量锥度的方法研究[J]. 新技术新工艺, 2017(9).
- [3] Higham, N.J. (1988) Fast Solution of Vandermonde-Like Systems Involving Orthogonal Polynomials. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **8**, 473-486. <https://doi.org/10.1093/imanum/8.4.473>
- [4] Bevilaqua, R., Bini, D., Capovani, M. and Menchi, O. (2003) *Appunti di Calcolo Numerico*. 89.
- [5] 戴聚岭. 多项式插值法在工程计算中应用[J]. 福建电脑, 2006(4): 178-179.

### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)