

# Stability and Hopf Bifurcation Analysis of eHR Neuron Model with Time-Delay

Zhengyu Lu, Huanhuan Yu, Wenjing Wang

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu  
Email: 18293132546@163.com

Received: Nov. 24<sup>th</sup>, 2018; accepted: Dec. 20<sup>th</sup>, 2018; published: Dec. 27<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

In order to study the complex dynamic behavior of time-delayed neuron system, the time-delay term is introduced on the basis of eHR neuron system. By analyzing the characteristic equation of the linearized eHR model system at the unique equilibrium point, a critical value is obtained, so that Hopf bifurcation occurs when the value exceeds it, and the system is asymptotically stable when the value is less than it. In addition, the stability and bifurcation direction of the bifurcation periodic solution are given by the central manifold theorem and other theories. Finally, some numerical simulations are given to verify the conclusions.

## Keywords

Hindmarsh-Rose Neuron, Hopf Bifurcation, Time-Delay

---

# 具有时滞的eHR神经元模型稳定性及Hopf分岔分析

路正玉, 于欢欢, 王文静

兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州  
Email: 18293132546@163.com

收稿日期: 2018年11月24日; 录用日期: 2018年12月20日; 发布日期: 2018年12月27日

---

## 摘要

为研究时滞神经元系统复杂的动力学行为, 本文在eHR神经元系统的基础上引入时滞项, 通过分析线性化eHR模型系统在唯一平衡点的特征方程, 得出某一临界值, 使得超过其值时发生Hopf分岔, 小于其值

时,系统是渐进稳定的。此外,通过中心流形定理等理论给出了分岔周期解的稳定性和分岔方向。最后,为验证结论给出了部分数值模拟。

## 关键词

Hindmarsh-Rose神经元模型, Hopf分岔, 时滞

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近年来,由于非线性科学技术的快速发展,神经元系统的复杂动力学行为备受关注。神经元是神经系统的基本组成单位,此外神经元也是大脑处理信息的基本单位。它由细胞体、树突、轴突组成,而信息的处理和传递主要发生在突触的附近,从而就存在时间延迟。在神经系统中,时滞在信息传递过程中都是不可避免和不可忽视的。目前,时滞系统的研究在部分领域已经取得了成就,例如, Wang [1]等通过在 HR 模型的膜电势中加入时滞反馈项进而用泛函微分方程理论研究了含有时滞反馈的 HR 神经模型的混沌控制行为; Cheng [2]等人进行了具有时滞的神经网络的分岔分析。为了揭示神经元复杂的动力学行为,人们建立了许多不同的神经元数学模型,如 Hodgkin-Huxley (H-H)系统、FitzHugh-Nagumo (FHN)系统、Hindmarsh-Rose (HR)神经元系统等。其中,HR 神经元具有简单的数学表达式,学多人对其耦合系统已经进行了研究。例如,曹淑红[3]等人研究了时滞对耦合神经元同步后放电模式的影响,结果表明时滞使得神经元的放电模式发生改变,同时时滞的增加能够诱导簇中的峰逐渐地减少或消失。

四变量 Hodgkin-Huxley (HH)神经元模型[4]可以再现枪乌贼轴突的电活动特性,并可以估计离子通道嵌入膜中的随机效应。为了进行有效的动力学分析,通过简化原始 HH 神经元模型,建立了三变量 Hindmarsh-Rose (HR)神经元模型[5]。HR 神经元模型的动力学方程描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} \\ \dot{y} = c - dx^2 - y \\ \dot{z} = r[s(x - x_0) - z] \end{cases} \quad (1)$$

其中变量  $x, y, z$  分别表示膜电位、恢复变量的慢电流和自适应电流。该模型通过改变外加刺激电流可以产生静止态、尖峰放电、簇放电甚至混沌状态。此外,峰峰间隔(ISI)分岔分析使我们更好的理解了神经元的电活动[6] [7] [8]以及电活动模式之间的转换,甚至也同样有效于分数阶动力学系统[9]。大量研究证实分数阶 Morris-Lecar 神经元模型通过分岔分析可以呈现出丰富的簇放电模式和动力学行为[10]。对于 HR 模型中的分岔分析,可以参考文献[11]。进一步的,提出了一个具有四个变量和 13 个参数的改进的 HR 神经元模型(eHR 神经元模型),以产生更复杂的动力学行为,其微分方程表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} \\ \dot{y} = c - dx^2 - y - ew \\ \dot{z} = r[s(x - x_0) - z] \\ \dot{w} = h[f(y + g) - pw] \end{cases} \quad (2)$$

其中  $a, b, c, d, s, r, h, f, g, p, e, x_0$  是系统的参数, 变量  $x, y, z, w$  分别表示膜电位、恢复变量的慢电流、自适应电流和一个缓慢的动态过程量。在本文中, 选取此神经元模型作为研究目标, 引入一个时滞作用于慢变量上, 考虑时滞对快慢系统的动力学行为的影响。

### 2. 模型介绍

引入时滞的 eHR 神经元模型具体形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = y(t-\tau) - ax^3 + bx^2 - z + I_{ext} \\ \dot{y} = c - dx^2 - y(t-\tau) - ew \\ \dot{z} = r[s(x-x_0) - z] \\ \dot{w} = h[f(y(t-\tau) + g) - pw] \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\tau$  表示时滞, 其他参数与模型(2)参数意义相同。且带时滞的系统也可以看做自反馈系统。

### 3. 平衡点分析和 Hopf 分岔存在性稳定性分析

假设系统的非平凡平衡点为  $E^* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$ , 通过代换  $\bar{x}(t) = x(t) - x^*$ ,  $\bar{y}(t) = y(t) - y^*$ ,  $\bar{z}(t) = z(t) - z^*$ ,  $\bar{w}(t) = w(t) - w^*$ , 将系统平衡点移至原点, 并将  $\bar{x}(t)$ ,  $\bar{y}(t)$ ,  $\bar{z}(t)$ ,  $\bar{w}(t)$  记为  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ ,  $w(t)$ , 则系统(3)可重新改写为如下系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = y(t-\tau) - ax^3 + (b - 3cx^*)x^2 + (2bx^* - 3cx^{*2})x - z \\ \dot{y} = -dx^2 - 2dx^*x - y(t-\tau) - ew \\ \dot{z} = rsx - rz \\ \dot{w} = hfy(t-\tau) - hpw \end{cases} \quad (4)$$

系统(4)在原点的线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = y(t-\tau) + (2bx^* - 3ax^{*2})x - z \\ \dot{y} = -2dx^*x - y(t-\tau) - ew \\ \dot{z} = rsx(t-\tau_1) - rz \\ \dot{w} = hfy(t-\tau_2) - hpw \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)对应的雅克比矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 2bx^* - 3ax^{*2} & e^{-\lambda\tau} & -1 & 0 \\ -2dx^* & -e^{-\lambda\tau} & 0 & -e \\ rs & 0 & -r & 0 \\ 0 & hfe^{-\lambda\tau} & 0 & -hp \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为:

$$\lambda^4 + k_3\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_1\lambda + (\lambda^3 + n_2\lambda^2 + n_1\lambda + n_0)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} k_3 &= 3ax^2 - 2bx + hp + r, \quad k_2 = 3(ahp + ar)x^2 - 2(bhpx + br)x + hpr + rs, \\ k_1 &= 3ahprx^2 - 2bhprx + hprs, \quad n_2 = 3ax^2 + 2(d-b)x + hfe + hp + r, \\ n_1 &= 3(aefh + ahp + ar)x^2 - 2(befh + bhp - dhp + br - dr)x + efhr + hpr + rs, \\ n_0 &= 3(aefhr + ahpr)x^2 - 2(befhr - dhpr)x - 2bhpr + efhrs + hprs \end{aligned}$$

根据系统中时滞  $\tau$  的值, 分以下几种情形讨论:

**情形 1:** 时滞  $\tau=0$  时, 特征方程(6)变为

$$\lambda^4 + q_{13}\lambda^3 + q_{12}\lambda^2 + q_{11}\lambda + q_{10} = 0 \quad (7)$$

其中

$$q_{13} = k_3 + 1, q_{12} = k_2 + n_2, q_{11} = k_1 + n_1, q_{10} = n_0.$$

根据 Routh-Hurwitz 准则, 得到如下结论:

当特征方程所对应的系数值满足如下条件

$$(H1) \quad q_{13} > 0, q_{12}q_{13} > q_{11}, q_{11}q_{12}q_{13} > q_{10}q_{13}^2 + q_{11}^2.$$

则方程(7)的全部根满足具有负实部的条件, 那么, 系统(4)在平衡点处是渐进稳定的, 即系统(3)在平衡点处是渐进稳定的。

**情形 1:** 时滞  $\tau \neq 0$  时, 考虑特征方程(6)

令  $\lambda = i\omega$  是方程(6)的根, 则有

$$\omega^4 - ik_3\omega^3 - k_2\omega^2 + ik_1\omega + (-i\omega^3 - n_2\omega^2 + in_1\omega + n_0)[\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)] = 0 \quad (8)$$

分离方程(8)的实部和虚部可得:

$$\begin{cases} (n_0 - n_2\omega^2)\cos(\omega\tau) + (n_1\omega - \omega^3)\sin(\omega\tau) = k_2\omega^2 - \omega^4 \\ (n_1\omega - \omega^3)\cos(\omega\tau) + (n_2\omega^2 - n_0)\sin(\omega\tau) = k_3\omega^3 - k_1\omega \end{cases}$$

那么

$$\begin{cases} \sin(\omega\tau_1) = \frac{\omega^7 + A_2\omega^5 + A_1\omega^3 + A_0\omega}{\omega^6 + B_2\omega^4 + B_1\omega^2 + B_0} \\ \cos(\omega\tau_1) = \frac{A_5\omega^6 + A_4\omega^4 + A_3\omega^2}{\omega^6 + B_2\omega^4 + B_1\omega^2 + B_0} \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0 &= n_0k_1, A_1 = n_1k_2 - n_0k_3 - n_2k_1, A_2 = n_2k_3 - n_1 - k_2, \\ A_3 &= n_0k_2 - n_1k_2, A_4 = n_1k_3 - n_2k_2 + k_1 - n_0, A_5 = n_2 - k_3, \\ B_0 &= n_0^2, B_1 = n_1^2 - 2n_0n_2, B_2 = n_2^2 - 2n_1 \end{aligned}$$

把上述方程各式平方可得:

$$\omega^8 + b_3\omega^6 + b_2\omega^4 + b_1\omega^2 + b_0 = 0 \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} b_3 &= k_3^2 - 2k_2 - 1, b_2 = k_2^2 - 2k_1k_3 - n_2^2 + 2n_1, \\ b_1 &= k_1^2 + 2n_0n_2 - n_1^2, b_0 = -n_0^2 \end{aligned}$$

令  $\eta = \omega^2$ , 则方程(10)变为:

$$\eta^4 + b_3\eta^3 + b_2\eta^2 + b_1\eta + b_0 = 0 \quad (11)$$

令

$$f(\eta) = \eta^4 + b_3\eta^3 + b_2\eta^2 + b_1\eta + b_0$$

不失一般性, 假设方程(11)有四个正根, 分别记为  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 。因此, 方程(10)有四个正根

$\omega_i = \sqrt{\eta_i} (i=1,2,3,4)$ 。  
由方程(9), 记

$$\tau_{2k}^{(i)} = \frac{1}{\omega_k} \left\{ \arccos \left( \frac{A_{25}\omega^6 + A_{24}\omega^4 + A_{23}\omega^2}{\omega^6 + B_{22}\omega^4 + B_{21}\omega^2 + B_{20}} \right) + 2i\pi \right\}, k=1,2,3,4; i=0,1,2,\dots$$

令  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$  是特征方程(6)在时滞  $\tau = \tau_{20}$  附近满足  $\alpha(\tau_{20}) = 0, \omega(\tau_{20}) = \omega_{20}$  的根, 可以得到如下横截性条件。

设  $\eta_k = \omega_k^2$  且  $h'(z_k) \neq 0$ , 则  $\left( \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_{2k}^{(i)}} \neq 0$  且  $\left( \frac{d(\operatorname{Re} \lambda)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_{2k}^{(i)}}$  与  $f'(\eta_k)$  有相同的符号。

则可得如下结论:

引理 1: i) 当  $\tau \in [0, \tau_{20})$ , 方程(6)的所有根具有负实部, 系统(1)的平衡点  $E^* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  是渐进稳定的; 当  $\tau_2 > \tau_{20}$ , 平衡点  $E^* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  是不稳定的。

ii) 若  $f'(\eta_k) \neq 0$ , 在临界值  $\tau_2 = \tau_{2k}^{(i)}$  时, 系统(3)在平衡点  $E^* = (x^*, y^*, z^*, w^*)$  处发生 Hopf 分岔, 即一组非常数周期解会从平衡点分岔出来。

#### 4. Hopf 分岔的方向及稳定性

通过分析可得对于每个  $\tau = \tau_k^{(i)} (i=0,1,2,\dots, k=1,2,\dots)$  系统(3)会发生 Hopf 分岔。本节利用中心流形定理和稳定性理论, 判定了分岔周期解的稳定性和分岔方向。

假设  $\tau_{2^*} < \tau_0, \tau_{2^*} \in (0, \tau_{20})$ 。令  $u(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T \in R^4, \tau_1 = \tau_0 + \mu (\mu \in R)$ , 并将系统(3)在定义域  $C = C([-1, 0], R^4)$  上转化为微分方程。

$$\dot{x}(t) = L_\mu(x_t) + F(\mu, x_t)$$

定义线性算子  $L_\mu : C \rightarrow R^4$  和非线性算子  $F : R \times C \rightarrow R^4$ , 其中

$$L_\mu(\phi) = (\tau_0 + \mu) B \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_3(0) \\ \phi_4(0) \end{pmatrix} + (\tau_0 + \mu) C \begin{pmatrix} \phi_1 \left( -\frac{\tau_{2^*}}{\tau_0} \right) \\ \phi_2 \left( -\frac{\tau_{2^*}}{\tau_0} \right) \\ \phi_3 \left( -\frac{\tau_{2^*}}{\tau_0} \right) \\ \phi_4 \left( -\frac{\tau_{2^*}}{\tau_0} \right) \end{pmatrix} + (\tau_0 + \mu) D \begin{pmatrix} \phi_1(-1) \\ \phi_2(-1) \\ \phi_3(-1) \\ \phi_4(-1) \end{pmatrix},$$

$$F(\mu, \phi) = (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} (b - 3ax^*)\phi_1^2(0) - a\phi_1^3(0) \\ -d\phi_1^2(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

其中  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)^T \in C$ , 式中

$$B = \begin{pmatrix} 2bx - 3ax^2 & 0 & -d & 0 \\ -2dx & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -hp \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ rs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & hf & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由 Riesz 表示定理, 对于  $\theta \in [-1, 0]$ , 存在一  $4 \times 4$  的有界变量的矩阵函数  $\eta(\theta, \mu)$ , 使得

$$L_\mu \phi = \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu) \phi(\theta), \phi \in C([-1, 0], R^4)$$

实际上, 可取

$$\eta(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 2bx - 3ax^2 & 0 & -d & 0 \\ -2dx & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -hp \end{pmatrix} \delta(\theta) - (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ rs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & hf & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + 1)$$

对于  $\phi \in C([-1, 0], R^4)$ , 定义

$$A(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\phi(\theta)}{d\theta}, & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\eta(\theta, \mu)\phi(\theta), & \theta = 0 \end{cases}$$

和

$$R(\mu)\phi(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \in [-1, 0) \\ F(\mu, \phi), & \theta = 0 \end{cases}.$$

则系统(3)等价于

$$\dot{x}_t = A(\mu)x_t + R(\mu)x_t$$

对于  $\psi \in C([0, 1], (R^4)^*)$  定义

$$A^*(\mu)\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi(s)}{ds}, & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 d\eta(t, 0)\psi(-t), & s = 0 \end{cases}$$

和一双线性内积

$$\langle \psi(s), \phi(\theta) \rangle = \bar{\psi}(0)\phi(0) - \int_{-1}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta) d\eta(\theta)\phi(\xi) d\xi$$

假设  $A(0)$  对应特征值为  $\pm i\omega_0\tau_0$ , 则  $\pm i\omega_0\tau_0$  也是  $A^*(0)$  的特征值。令  $q(\theta)$  是  $A(0)$  对应特征值  $\pm i\omega_0\tau_0$  的特征向量,  $q^*(\theta)$  是  $A^*(0)$  对应特征值  $\pm i\omega_0\tau_0$  的特征向量, 则有  $A(0)q(\theta) = i\omega_0\tau_0 q(\theta)$ ,

$A^*(0)q^*(\theta) = i\omega_0\tau_0 q^*(\theta)$ 。这就保证了  $\langle q^*(s), q(\theta) \rangle = 1$ ,  $\langle q^*(s), \bar{q}(\theta) \rangle = 1$ 。

下一步, 使用 Hassard 等人的判断记号, 计算中心流形  $C_0$  在  $\mu = 0$  处的坐标。

$$g_{20} = g_{11} = g_{02} = 2\bar{P}\tau_{20} (b - 3ax^* - d\bar{v}_1^*) \\ g_{21} = 2\bar{P}\tau_{20} \left[ (b - 3ax^*) (W_{20}^{(1)} + 2W_{11}^{(1)}) - 3a - f (W_{20}^{(1)} + 2W_{11}^{(1)}) \bar{v}_1^* \right]$$

其中

$$W_{20}(\theta) = \frac{i\bar{g}_{20}}{\omega_0\tau_0} q(0) e^{i\omega_0\tau_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0\tau_0} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\tau_0\theta} + E_1 e^{2i\omega_0\tau_0\theta} \\ W_{11}(\theta) = -\frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0\tau_0} q(0) e^{i\omega_0\tau_0\theta} + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0\tau_0} \bar{q}(0) e^{-i\omega_0\tau_0\theta} + E_2$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 2i\omega_0\tau_{20} - (2bx^* - 3ax^{*2}) & -e^{-2i\omega_0\tau_2^*} & d & 0 \\ 2dx^* & 2i\omega_0\tau_{20} + e^{-2i\omega_0\tau_2^*} & 0 & e \\ -rse^{-2i\omega_0\tau_{20}} & 0 & 2i\omega_0\tau_{20} + r & 0 \\ 0 & -hfe^{-2i\omega_0\tau_2^*} & 0 & 2i\omega_0\tau_{20} + hp \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2(b - 3ax^*) \\ -2d\bar{v}_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = - \begin{pmatrix} 2bx^* - 3ax^{*2} & a & -d & 0 \\ -2dx^* & -1 & 0 & -e \\ rs & 0 & -r & 0 \\ 0 & hp & 0 & -hp \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2(b - 3ax^*) \\ -2d\bar{v}_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此可以计算下面数值：

$$\begin{cases} c_1(0) = \frac{i}{\omega_0\tau_0} \left( g_{11}g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2} \\ \mu_2 = -\frac{\text{Re}(c_1(0))}{\text{Re}(\lambda_0'(\tau_0))} \\ \beta_2 = 2\text{Re}(c_1(0)) \\ T_2 = -\frac{\text{Im}(c_1(0)) + \mu_2\text{Im}(\lambda_0'(\tau_0))}{\omega_0\tau_0} \end{cases}$$

综上，可得下面有关 Hopf 分岔方向及周期解稳定性的结论：

当  $\tau > \tau_{2_0}$  ( $\tau < \tau_{2_0}$ ) 时，分岔周期解存在(不存在)；若  $T_2 > 0$  ( $T_2 < 0$ )，周期解的周期增加(减小)； $\beta_2 > 0$  ( $\beta_2 < 0$ )，在此中心流形上，周期解是渐进稳定的(不稳定的)。

### 5. 数值模拟

在本节我们给出部分数值模拟来验证以上结论，其中参数的值为  $a=1, b=3, c=1.01, f=3, d=5.0128, e=0.0278, r=0.126, s=3.966, x_0=1.605, g=1.619, p=0.9573, h=0.009, I=2.978$ 。此时，系统变为

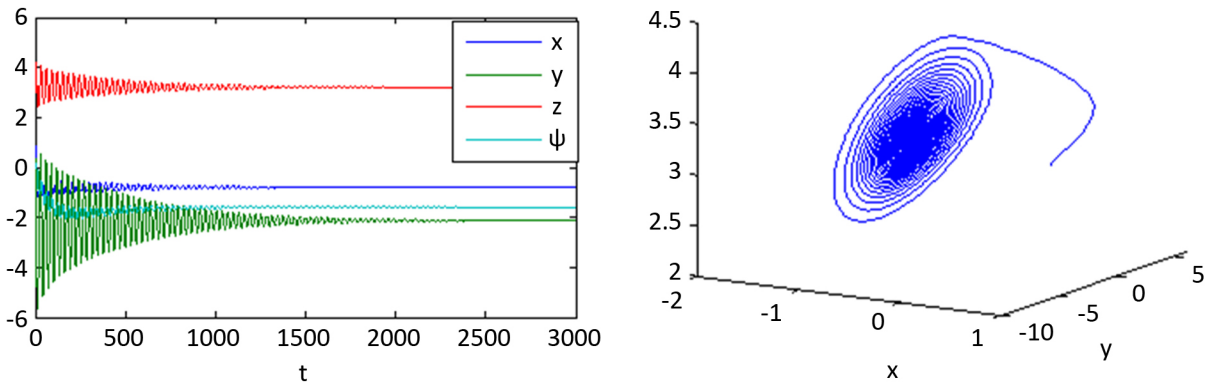
$$\begin{cases} \dot{x} = y(t-\tau) - x^3 + 3x^2 - z + 2.924976 \\ \dot{y} = 1.01 - 5.0128x^2 - y(t-\tau) - 0.0278w \\ \dot{z} = 0.12[3.966(x-1.605) - z] \\ \dot{w} = 0.009[3(y(t-\tau) + 1.619) - 0.9573w] \end{cases} \quad (2)$$

通过计算可得系统的唯一平衡点为  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$ ，由此可得

$$q_{13} = 1.949051 > 0, q_{12}q_{13} = 13.211406 > q_{11} = 1.231740, \\ q_{11}q_{12}q_{13} = 16.273022 > q_{10}q_{13}^2 + q_{11}^2 = 1.553386$$

显然满足条件(H1)，在初值(0.3, 0.3, 3.0, 0.05)处平衡点  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$ 是渐进稳定的，如图 1 所示。

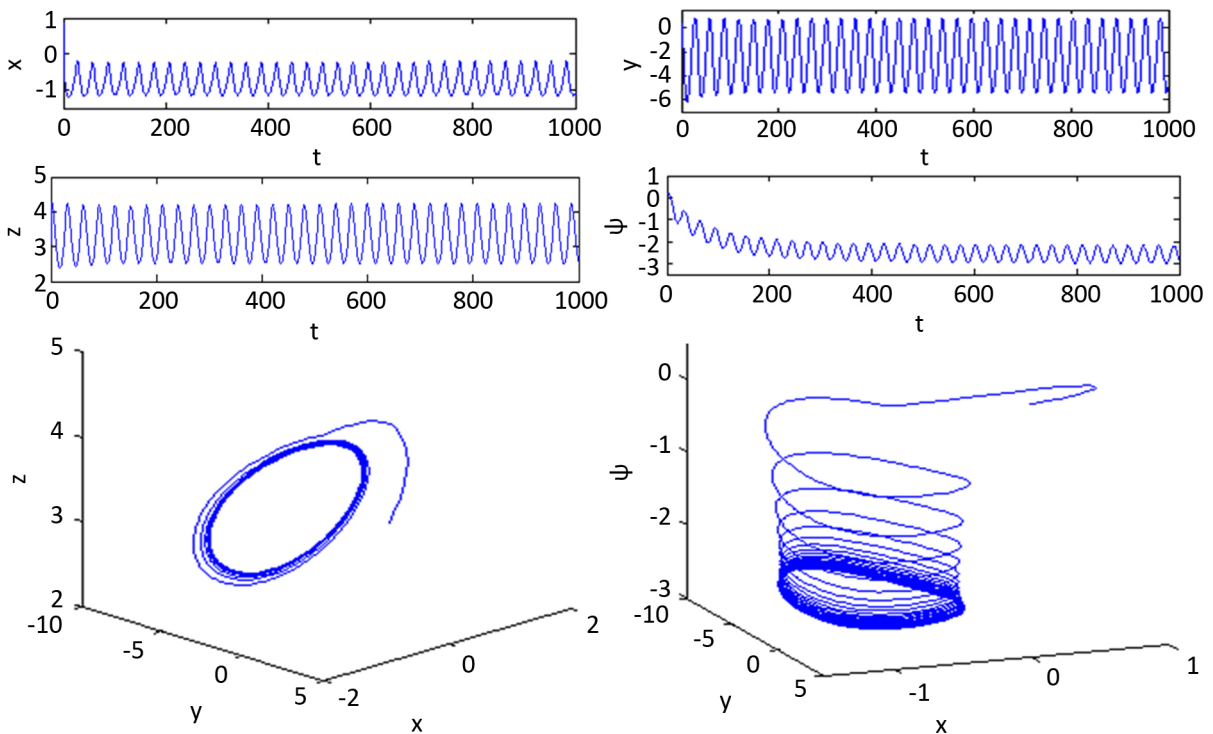
当  $\tau \neq 0$  时，由情况 2 的理论方法计算得  $\tau_{2_0} = 0.140347$ ，由引理 1 可得满足横截性条件。当  $\tau = 0.18 > \tau_{2_0}$  时，系统是不稳定的，当  $\tau$  穿过每一个临界值  $\tau_{2_j}$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) 是，系统(3)的一个稳定周期



**Figure 1.**  $\tau = 0$ , The time series and phase diagrams of  $x(t), y(t), z(t), w(t)$  at the initial values  $(0.3, 0.3, 3.0, 0.05)$  show that the equilibrium point  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  are asymptotically stable

**图 1.**  $\tau = 0$  时, 在初值  $(0.3, 0.3, 3.0, 0.05)$  处  $x(t), y(t), z(t), w(t)$  的时间响应图和相图, 平衡点  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  是渐进稳定的

解从  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  分岔出来, 产生 Hopf 分岔。如图 2 所示; 当  $\tau = 0.007 < \tau_{2_0}$  时, 系统(3)在平衡点  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  处是渐进稳定的, 如图 3 所示。



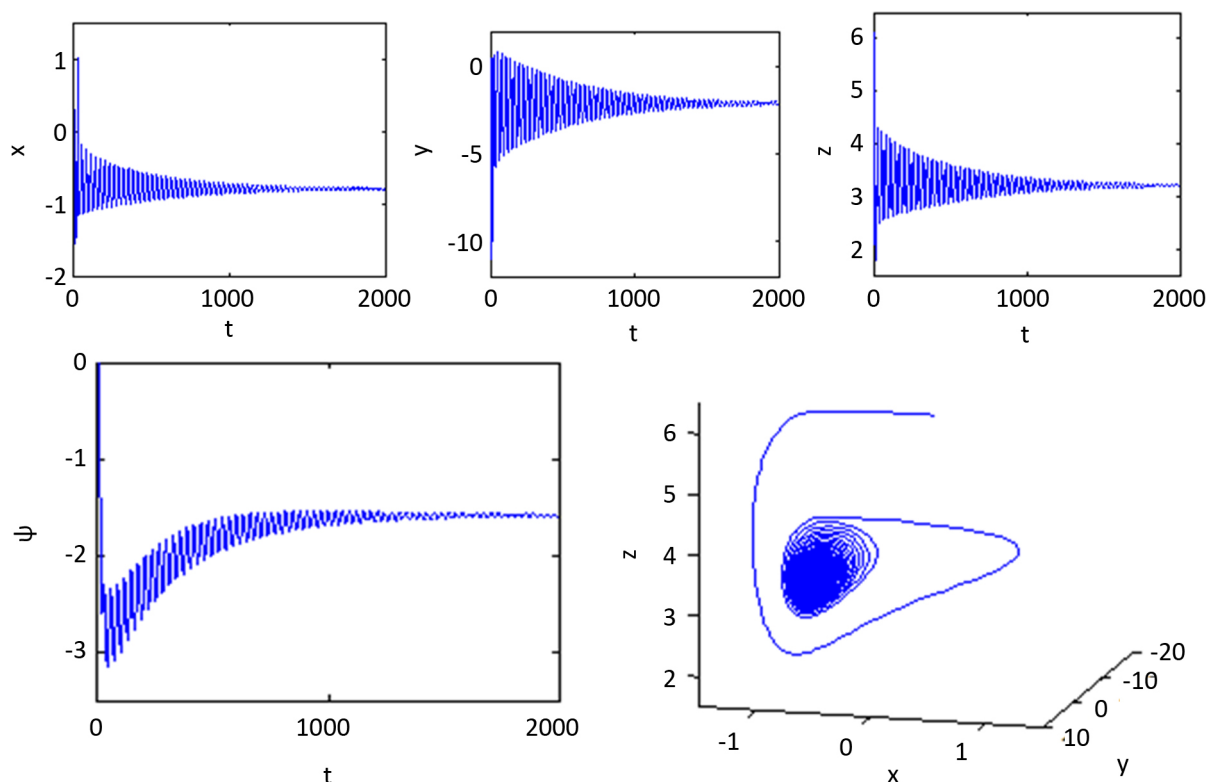
**Figure 2.**  $\tau = 0.18 > \tau_{2_0}$ , The time series and phase diagrams of  $x(t), y(t), z(t), w(t)$  at the initial values  $(0.3, 0.3, 3.1, 0.1)$  show that The unique equilibrium point  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  is unstable and a stable periodic solution bifurcates from  $P$

**图 2.**  $\tau = 0.18 > \tau_{2_0}$  时, 在初值  $(0.3, 0.3, 3.1, 0.1)$  处  $x(t), y(t), z(t), w(t)$  的时间响应图和相图, 唯一平衡点  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  是不稳定的且一个稳定的周期解从  $P$  分岔出来

## 6. 结束语

目前, 大多人研究了具有时滞的耦合神经元系统, 对单个神经元引入时滞项的研究较少。而时间延





**Figure 3.**  $\tau = 0.007 < \tau_{20}$ , The time series and phase diagrams of  $x(t), y(t), z(t), w(t)$  at the initial values (0.3, 0.3, 6.1, 0.1) show that the equilibrium point  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  are asymptotically stable

**图 3.**  $\tau = 0.007 < \tau_{20}$  时, 在初值(0.3, 0.3, 6.1, 0.1)处  $x(t), y(t), z(t), w(t)$  的时间响应图和相图, 平衡点  $P(0.881210, 2.781651, 2.870551, 3.643691)$  是渐进稳定的

迟真实的存在于信号的传播过程中, 且时滞的出现使得神经元系统发生更为复杂的动力学行为, 因此对时滞神经元系统的研究具有重要的实际意义。本文通过对 eHR 神经元模型引入时滞项, 给出了平衡点的稳定性和发生 Hopf 的条件, 推导出了时滞  $\tau$  发生 Hopf 分岔的临界值  $\tau_{20}$ 。另一方面, 为验证所得结论进行了数值模拟, 通过时间响应图和相图更好的验证了 Hopf 分岔方向及分岔周期解的稳定性。

## 参考文献

- [1] Wang, H.X., Wang, Q.Y. and Zhang, Y.H. (2014) Bifurcation Analysis for Hindmarsh-Rose Neuronal Model with Time-Delayed Feedback Control and Application to Chaos Control. *Technological Sciences*, **5**, 872-878.
- [2] Cheng, Z.S., Xie, K.H., et al. (2018) Stability and Hopf Bifurcation of Three-Triangle Neural Networks with Delays. *Neurocomputing*, **322**, 206-215. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.09.063>
- [3] 曹淑红, 段利霞, 唐旭晖, 赵勇. 具有时滞的耦合 Hindmarsh-Rose 神经元系统的放电模式[J]. 力学与控制学报, 2012, 10(1): 88-91.
- [4] Hodgkin, A.L. and Huxley, A.F. (1952) A Quantitative Description of Membrane Current and Its Application to Conduction and Excitation in Nerve. *The Journal of Physiology*, **117**, 500-544. <https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764>
- [5] Hindmarsh, J.L. and Rose, R.M. (1984) A Model of Neuronal Bursting Using Three Coupled First-Order Differential Equations. *Proceedings of the Royal Society of London*, **221**, 87-102. <https://doi.org/10.1098/rspb.1984.0024>
- [6] Song, X.L., Wang, C.N., Ma, J., et al. (2015) Transition of Electric Activity of Neurons Induced by Chemical and Electric Autapses. *Science China Technological Sciences*, **58**, 1007-1014. <https://doi.org/10.1007/s11431-015-5826-z>
- [7] Yang, Z.Q. and Hao, L.J. (2014) Dynamics of Different Compound Bursting in Two Phantom Bursting Mechanism Models. *Science China Technological Sciences*, **57**, 885-892. <https://doi.org/10.1007/s11431-014-5543-z>

- 
- [8] Lv, M., Wang, C., Ren, G., *et al.* (2016) Model of Electrical Activity in a Neuron under Magnetic Flow Effect. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 1479-1490. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2773-6>
- [9] Xie, Y., Kang, Y.M., Liu, Y., *et al.* (2014) Firing Properties and Synchronization Rate in Fractional-Order Hindmarsh-Rose Model Neurons. *Science China Technological Sciences*, **57**, 914-922.
- [10] Shi, M. and Wang, Z.H. (2014) Abundant Bursting Patterns of a Fractional-Order Morris-Lecar Neuron Model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **19**, 1956-1969. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2013.10.032>
- [11] 邬开俊. Hindmarsh-Rose 神经元模型的双参数分岔特性及耦合同步研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2017.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2324-7991, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [aam@hanspub.org](mailto:aam@hanspub.org)