Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2018, 7(12), 1565-1573**
Published Online December 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.712183

Hans汉斯

Inverse Sturm-Liouville Problems with Distribution Potentials of Atkinson Type

Liang Zhang, Jijun Ao*

College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: 1286366047@qq.com, *george_ao@sina.com

Received: Nov. 21st, 2018; accepted: Dec. 13th, 2018; published: Dec. 20th, 2018

Abstract

In this paper, the inverse Sturm-Liouville problems with distribution potentials of Atkinson type are studied. We use the conclusions of the inverse eigenvalue problems of Jacobi matrix and cyclic Jacobi matrix to obtain the corresponding inverse Sturm-Liouville problems with distribution potentials which have a finite spectrum.

Keywords

Inverse Spectral Problems, Sturm-Liouville Problems, Distribution Potentials, Inverse Eigenvalue Problems

Atkinson类型的具有分布势函数的Sturm-Liouville问题的逆谱问题

张　亮，敖继军*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古　呼和浩特
Email: 1286366047@qq.com, *george_ao@sina.com

收稿日期：2018年11月21日；录用日期：2018年12月13日；发布日期：2018年12月20日

摘　要

本文研究了Atkinson类型的具有分布势函数的Sturm-Liouville问题的逆谱问题，利用Jacobi矩阵和循环Jacobi矩阵的逆特征值问题的结论得到重构此类Sturm-Liouville问题的结论。

*通讯作者。

文章引用: 张亮, 敖继军. Atkinson 类型的具有分布势函数的 Sturm-Liouville 问题的逆谱问题[J]. 应用数学进展, 2018, 7(12): 1565-1573. DOI: 10.12677/aam.2018.712183

关键词

逆谱问题，Sturm-Liouville问题，分布势函数，矩阵逆特征值问题

1. 引言

逆问题是Sturm-Liouville (S-L)理论体系中的一个重要组成部分，而其中一类很重要的研究内容就是S-L算子的逆谱问题。由于特征值是最易测取的物理量(在力学与振动问题中，它对应着物理模型中的固有频率)，尤其在量子力学中，特征值(或称为本征值，点谱)是唯一可以观测到的物理量，它描述的是量子体系中的粒子处于某个状态时的能量，所以由怎样的纯特征值信息确定并重构S-L系统就显得尤为重要。

对于经典的S-L理论下的逆谱问题，是利用无穷多个谱点的信息来重构S-L系统。1964年，Atkinson提出了二阶的S-L问题在某些条件下可能存在有限谱[1]。2001年，Kong，Wu和Zettl证实了Atkinson论断的合理性[2]，由此展开了有限谱问题(也称为Atkinson类型问题)的研究。2007年，Volkmer和Zettl考虑了Dirichlet边界条件下具有Atkinson类型的S-L问题的逆谱问题[3]，虽然研究的边界条件极为特殊，但这一研究成果为后续逆谱问题的研究迈出了重要的一步。2009年，Kong，Volkmer和Zettl得到了自共轭边界条件下具有有限谱的S-L问题的矩阵表示[4]。2012年，Kong和Zettl得到了这类具有有限谱的S-L逆谱问题的结论[5]，他们利用[6]中矩阵逆特征值问题的结论并将其推广，给出Atkinson类型的S-L问题的逆谱问题。

2015年，闫军在其博士论文中详细介绍了具有分布势函数的S-L问题的有限谱理论[7]，给出了具有分布势函数的S-L问题的矩阵表示。2016年，唐松林在其硕士论文中也对具有分布势函数的S-L问题的多种带有转移条件的情况进行研究[8]。近年来，具有分布势函数的S-L问题引起了一大批数学工作者的关注与讨论，相关成果可参见[9] [10] [11] [12]。

2. 预备知识

本文主要利用具有分布势函数的Atkinson类型的Sturm-Liouville (S-L)问题与矩阵特征值问题

$$VX = \lambda WX, \tag{1}$$

之间的等价关系。通过讨论矩阵的逆特征值问题，进而得到Atkinson类型的具有分布势函数的S-L问题的逆谱问题的结论。

考虑如下的S-L方程

$$-\left(p\left[y'+sy\right]\right)'+sp\left[y'+sy\right]+qy=\lambda wy,\ \ I=(a,b),\ -\infty<a<b<+\infty, \tag{2}$$

其中，系数 p,q,w,s 满足

$$r=\frac{1}{p},q,w,s\in L(I,\mathbb{R}), \tag{3}$$

这里，$L(I,\mathbb{R})$ 表示区间 I 上Lebesgue可积的实值函数的集合。

引入拟微分 $y^{[1]}=p\left[y'+sy\right]$ 将(2)写成

$$-\left(y^{[1]}\right)' + sy^{[1]} + qy = \lambda wy,\ I = (a,b),\ -\infty < a < b < +\infty,$$

并考虑带有边界条件形如

$$AY(a) + BY(b) = 0,\ Y = \left[y, y^{[1]}\right]^{\mathrm{T}},\ A, B \in M_2(\mathbb{R}), \tag{4}$$

其中，$M_2(\mathbb{R})$ 表示 2×2 阶实值矩阵的集合。

众所周知，当满足下述条件

$$rank(A,B) = 2,\ AEA^* = BEB^*,\ E = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

时边界条件(4)是自伴的。在本文的条件下，自伴边界条件可以化为两类：分离型和实耦合型。分离型自伴边界条件的标准形式为

$$\begin{aligned} &\cos\alpha\, y(a) - \sin\alpha\, y^{[1]}(a) = 0,\ 0 \le \alpha < \pi, \\ &\cos\beta\, y(b) - \sin\beta\, y^{[1]}(b) = 0,\ 0 < \beta \le \pi; \end{aligned} \tag{5}$$

而实耦合型自伴边界条件的标准形式为

$$Y(b) = kY(a),\ K = (k_{ij}) \in SL_2(\mathbb{R}), \tag{6}$$

其中，$SL_2(\mathbb{R})$ 表示满足 $k_{ij} \in \mathbb{R}$，$1 \le i, j \le 2$，$\det(K) = 1$ 的 2×2 阶实值矩阵的集合。

定义 2.1：若对于正奇数 $n = 2m+1$，$m \in \mathbb{N}$，在区间 $I = (a,b)$ 上存在一组划分

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b, \tag{7}$$

使得

$$\begin{aligned} &\text{在}\left[a_{2i}, a_{2i+1}\right]\text{上},\ r = s = 0,\ i = 0,1,\cdots,m, \\ &\int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}} \mathrm{e}^{2\int_{a_{2i+1}}^{t} s(u)\mathrm{d}u} r(t)\mathrm{d}t > 0,\ \int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}} s(t)\mathrm{d}t \ne 0,\ i = 0,1,\cdots,m-1; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{在}\left[a_{2i+1}, a_{2i+2}\right]\text{上},\ q = 0,\ i = 0,1,\cdots,m-1; \tag{9}$$

并且

$$\begin{aligned} &\text{在}\left[a_{2i+1}, a_{2i+2}\right]\text{上},\ w = 0,\ i = 1,2,\cdots,m-1, \\ &\int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} w(t)\mathrm{d}t > 0,\ i = 0,1,\cdots,m. \end{aligned} \tag{10}$$

则称定义在 $I = (a,b)$ 上的 S-L 方程(2)是 Atkinson 类型的。

若 S-L 方程(2)是 Atkinson 类型的，则称具有分布势的 S-L 问题(2)，(4)是 Atkinson 类型的。

我们假定 $k \in \mathbb{N}^+$ 且 $k > 2$。设 $\mathbb{M}_k$ 表示实值 $k\times k$ 矩阵的全体。对于任意矩阵 $C \in \mathbb{M}_k$，我们定义 $\sigma(C)$ 为矩阵 C 的特征值集合。此外，矩阵 C_1 表示矩阵 C 去掉第一行与第一列元素得到的低阶主子矩阵，矩阵 C^1 表示矩阵 C 去掉第 k 行与第 k 列元素得到的低阶主子矩阵。

对于任意矩阵 $C, D \in \mathbb{M}_k$，若存在一个非平凡向量 $u \in \mathbb{R}^k$ 使得 $(C - \lambda^* D)u = 0$，则 λ^* 称为矩阵对 (C,D) 的一个特征值。令 $\sigma(C,D)$ 表示矩阵对 (C,D) 的特征值集合。容易看出，$\lambda^* \in \sigma(C)$ 当且仅当 $\lambda^* \in \sigma(C, I_k)$，其中 I_k 表示 $\mathbb{M}_k$ 中的 k 阶单位矩阵。

3. 具有分布势函数的 Sturm-Liouville 问题的矩阵表示

为了得到所研究问题的矩阵表示，需要引入下面的引理来确保每个 Atkinson 类型的 S-L 问题等价于一个具有分段常值系数函数的 S-L 问题。

引理 3.1 [7]：设 $r,q,w,s \in L(I,\mathbb{R})$ 满足(8)~(10)。令

$$r_{2i+1}=\int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}} \mathrm{e}^{2\int_{a_{2i+1}}^{t} s(u)\mathrm{d}u} r(t)\mathrm{d}t>0,\ s_{2i+1}=\int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}} s(t)\mathrm{d}t \neq 0,\ i=0,1,\cdots,m-1,$$
$$q_{2i}=\int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} q(t)\mathrm{d}t,\ w_{2i}=\int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} w(t)\mathrm{d}t,\ i=0,1,\cdots,m. \tag{11}$$

定义在区间 I 上的分段常值系数函数 $\overline{p},\overline{s},\overline{q}$ 和 $\overline{w}$ 为

$$\overline{p}(t)=\begin{cases}\dfrac{a_{2i+2}-a_{2i+1}}{r_{2i+1}s_{2i+1}},\ t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}],\ i=0,1,\cdots,m-1;\\ \infty,\ t\in[a_{2i},a_{2i+1}],\ i=0,1,\cdots,m,\end{cases}\quad (s_{2i+1}\neq 0),$$

$$\overline{p}(t)=\begin{cases}\dfrac{a_{2i+2}-a_{2i+1}}{r_{2i+1}},\ t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}],\ i=0,1,\cdots,m-1;\\ \infty,\ t\in[a_{2i},a_{2i+1}],\ i=0,1,\cdots,m,\end{cases}\quad (s_{2i+1}=0),$$

$$\overline{s}(t)=\begin{cases}\dfrac{s_{2i+1}}{a_{2i+2}-a_{2i+1}},\ t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}],\ i=0,1,\cdots,m-1;\\ 0,\ t\in[a_{2i},a_{2i+1}],\ i=0,1,\cdots,m,\end{cases}$$

$$\overline{q}(t)=\begin{cases}\dfrac{q_{2i}}{a_{2i+1}-a_{2i}},\ t\in[a_{2i},a_{2i+1}],\ i=0,1,\cdots,m;\\ 0,\ t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}],\ i=0,1,\cdots,m-1,\end{cases}$$

$$\overline{w}(t)=\begin{cases}\dfrac{w_{2i}}{a_{2i+1}-a_{2i}},\ t\in[a_{2i},a_{2i+1}],\ i=0,1,\cdots,m;\\ 0,\ t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}],\ i=0,1,\cdots,m-1.\end{cases}$$

其中 $\overline{p}(t)=\infty,t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}]$ 等价于 $r(t)=0,t\in[a_{2i+1},a_{2i+2}],i=1,2,\cdots,m-1$。则具有分布势函数的 S-L 问题(2)，(4)与下述具有分段常值函数的方程

$$-\left(\overline{p}\left[y'+\overline{s}y\right]\right)'+\overline{sp}\left[y'+\overline{s}y\right]+\overline{q}y=\lambda\overline{w}y,\ I=(a,b), \tag{12}$$

以及同一边界条件(4)所构成的 S-L 问题(12)，(4)具有相同的特征值。

根据引理 3.1，我们可知当给定边界条件(4)和区间 I 上的一个划分，存在一类 Atkinson 类型的 S-L 问题与具有分布势函数的 S-L 问题(12)，(4)具有相同的特征值。这样的一类问题我们称之为具有分布势函数的 S-L 问题(12)，(4)的一个等价类，它们具有相同的参数 r_{2i+1},s_{2i+1},q_{2i} 和 w_{2i}。

对具有分离型边界条件的 S-L 问题(2)和(5)与矩阵特征值问题之间的等价关系，我们给出下述引理。

引理 3.2 [7]：若分离型边界条件(5)中 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$。定义 $(m+1)\times(m+1)$ 的 Jacobi 矩阵

$$P_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{r_1}+\cot\alpha & -\dfrac{\mathrm{e}^{s_1}}{r_1} & & & \\ -\dfrac{\mathrm{e}^{s_1}}{r_1} & \dfrac{\mathrm{e}^{2s_1}}{r_1}+\dfrac{1}{r_3} & -\dfrac{\mathrm{e}^{s_3}}{r_3} & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -\dfrac{\mathrm{e}^{s_{2m-3}}}{r_{2m-3}} & \dfrac{\mathrm{e}^{2s_{2m-3}}}{r_{2m-3}}+\dfrac{1}{r_{2m-1}} & -\dfrac{\mathrm{e}^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} \\ & & & -\dfrac{\mathrm{e}^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} & \dfrac{\mathrm{e}^{2s_{2m-1}}}{r_{2m-1}}-\cot\beta\end{bmatrix}, \tag{13}$$

以及对角矩阵

$$\begin{aligned} Q_{\alpha\beta} &= diag\left(q_0, q_2, \cdots, q_{2m-2}, q_{2m}\right), \\ W_{\alpha\beta} &= diag\left(w_0, w_2, \cdots, w_{2m-2}, w_{2m}\right). \end{aligned} \tag{14}$$

则具有分离型边界条件的 S-L 问题(2)，(5)的谱 $\sigma(\alpha,\beta)$ 与矩阵对 $\left(P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta},W_{\alpha\beta}\right)$ 的谱 $\sigma\left(P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta},W_{\alpha\beta}\right)$ 相同。

注 3.1：引理 3.2 的论述对于分离型边界条件 $\alpha=0,\beta\in(0,\pi)$，$\alpha\in(0,\pi),\beta=\pi$ 和 $\alpha=0,\beta=\pi$ 的情况同样成立，即：$P_{0\beta}=\left(P_{\alpha\beta}\right)_1$，$P_{\alpha\pi}=\left(P_{\alpha\beta}\right)^1$，$P_{0\pi}=\left(P_{\alpha\pi}\right)_1=\left(P_{0\beta}\right)^1$，$Q_{0\beta}=\left(Q_{\alpha\beta}\right)_1$，$Q_{\alpha\pi}=\left(Q_{\alpha\beta}\right)^1$，$Q_{0\pi}=\left(Q_{\alpha\pi}\right)_1=\left(Q_{0\beta}\right)^1$，$W_{0\beta}=\left(W_{\alpha\beta}\right)_1$，$W_{\alpha\pi}=\left(W_{\alpha\beta}\right)^1$，$W_{0\pi}=\left(W_{\alpha\pi}\right)_1=\left(W_{0\beta}\right)^1$。我们可得到与引理 3.2 相同的结论，具体引理内容可参见文献[7]。根据引理 3.2 的矩阵表示形式，可以得到

$$\left(P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta}\right)_1=P_{0\beta}+Q_{0\beta},\ \left(P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta}\right)^1=P_{\alpha\pi}+Q_{\alpha\pi},$$

$$\left(P_{\alpha\pi}+Q_{\alpha\pi}\right)_1=P_{0\pi}+Q_{0\pi},\ \left(P_{0\beta}+Q_{0\beta}\right)^1=P_{0\pi}+Q_{0\pi}.$$

对具有耦合型边界条件的 S-L 问题(2)和(6)与矩阵特征值问题之间的等价关系，我们给出下述引理。

引理 3.3 [7]：若耦合型边界条件(6)中 $k_{12}\neq 0$。定义 $(m+1)\times(m+1)$ 阶循环 Jacobi 矩阵

$$P_I=\begin{bmatrix} \frac{1}{r_1}-\frac{k_{11}}{k_{12}} & -\frac{e^{s_1}}{r_1} & & & & \frac{1}{k_{12}} \\ -\frac{e^{s_1}}{r_1} & \frac{e^{2s_1}}{r_1}+\frac{1}{r_3} & -\frac{e^{s_3}}{r_3} & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & -\frac{e^{s_{2m-3}}}{r_{2m-3}} & \frac{e^{2s_{2m-3}}}{r_{2m-3}}+\frac{1}{r_{2m-1}} & -\frac{e^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} \\ \frac{1}{k_{12}} & & & -\frac{e^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} & \frac{e^{2s_{2m-1}}}{r_{2m-1}}-\frac{k_{22}}{k_{12}} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

以及对角矩阵

$$\begin{aligned} Q_I &= diag\left(q_0, q_2, \cdots, q_{2m-2}, q_{2m}\right), \\ W_I &= diag\left(w_0, w_2, \cdots, w_{2m-2}, w_{2m}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

则具有耦合型边界条件的 S-L 问题(2)，(6)的谱 $\sigma(K)$ 与矩阵对 $\left(P_I+Q_I,W_I\right)$ 的谱 $\sigma\left(P_I+Q_I,W_I\right)$ 相同。

引理 3.4 [7]：若耦合型边界条件(6)中 $k_{12}=0$。定义 $m\times m$ 阶循环 Jacobi 矩阵

$$P_\theta=\begin{bmatrix} -k_{11}k_{21}+\frac{1}{r_1}+k_{11}^2\frac{e^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} & -\frac{e^{s_1}}{r_1} & & & -k_{11}\frac{e^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} \\ -\frac{e^{s_1}}{r_1} & \frac{e^{2s_1}}{r_1}+\frac{1}{r_3} & -\frac{e^{s_3}}{r_3} & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -\frac{e^{s_{2m-5}}}{r_{2m-5}} & \frac{e^{2s_{2m-5}}}{r_{2m-5}}+\frac{1}{r_{2m-3}} & -\frac{e^{s_{2m-3}}}{r_{2m-3}} \\ -k_{11}\frac{e^{s_{2m-1}}}{r_{2m-1}} & & & -\frac{e^{s_{2m-3}}}{r_{2m-3}} & \frac{e^{2s_{2m-3}}}{r_{2m-3}}+\frac{1}{r_{2m-1}} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

以及对角矩阵

$$
\begin{aligned}
Q_\theta &= diag\left(q_0 + k_{11}^2 q_{2m}, q_2, \cdots, q_{2m-2}\right), \\
W_\theta &= diag\left(w_0 + k_{11}^2 w_{2m}, w_2, \cdots, w_{2m-2}\right).
\end{aligned} \tag{18}
$$

则具有耦合型边界条件的 S-L 问题(2)，(6)的谱 $\sigma(K)$ 与矩阵对 $\left(P_\theta + Q_\theta, W_\theta\right)$ 的谱 $\sigma\left(P_\theta + Q_\theta, W_\theta\right)$ 相同。

4. 矩阵的逆特征值问题

在本节中，我们研究 Jacobi 矩阵和循环 Jacobi 矩阵的逆特征值问题。利用引理 3.2 中的矩阵表示，我们首先考虑 $\mathbb{M}_k$ 中如下的对称矩阵

$$
J = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & & & \\ d_1 & c_2 & d_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & d_{k-2} & c_{k-1} & d_{k-1} \\ & & & d_{k-1} & c_k \end{bmatrix}. \tag{19}
$$

定义 4.1： 若 $d_i < 0, i = 1,2,\cdots,k-1$，则形如(19)的矩阵 J 称为负 Jacobi 矩阵。

引理 4.1 [5]： 设 $\{\lambda_i : i = 1,\cdots,k\}$ 和 $\{\mu_i : i = 1,\cdots,k-1\}$ 是两组严格交错的实数，满足

$$
\lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots < \lambda_{k-1} < \mu_{k-1} < \lambda_k. \tag{20}
$$

设 $W = diag\left(w_1,\cdots,w_k\right)$ 是一个对角矩阵，其中 $w_i > 0, i = 1,\cdots,k$ 。则存在唯一的负 Jacobi 矩阵 $M \in \mathbb{M}_k$ 使得：$\sigma(M,W) = \{\lambda_i : i = 1,\cdots,k\}$， $\sigma\left(M_1,W_1\right) = \{\mu_i : i = 1,\cdots,k-1\}$ 。

推论 4.1 [5]： 当引理 4.1 中的 M_1 和 W_1 分别由 M^1 和 W^1 替代，则引理 4.1 依然成立。

推论 4.2 [5]： 当引理 4.1 中的 $w_i > 0$ 分别由 $w_i < 0$ 替代 $(i = 1,\cdots,k)$，则引理 4.1 依然成立。

利用引理 3.3，3.4 中的矩阵表示，我们考虑下述属于集合 $\mathbb{M}_k$ 的对称矩阵

$$
J_c = \begin{bmatrix} c_1 & d_1 & & & d_k \\ d_1 & c_2 & d_2 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & d_{k-2} & c_{k-1} & d_{k-1} \\ d_k & & & d_{k-1} & c_k \end{bmatrix}. \tag{21}
$$

定义 4.2： 若 $d_i < 0, i = 1,2,\cdots,k-1$，则形如(21)的矩阵 J_c 称为负循环 Jacobi 矩阵。

引理 4.2 [5]： 设 $\{\lambda_i : i = 1,\cdots,k\}$ 和 $\{\mu_i : i = 1,\cdots,k-1\}$ 满足下述条件：

i) $\lambda_1 \le \mu_1 \le \lambda_2 \le \mu_2 \le \cdots \le \lambda_{k-1} \le \mu_{k-1} \le \lambda_k$；

ii) $\mu_i \ne \mu_j$， $i \ne j$；

iii) $\exists d > 0$，对于 $j = 1,\cdots,k-1$，

$$
\prod_{i=1}^{k} \left|\mu_j - \lambda_i\right| \ge 2d\left[1 + (-1)^{k+1-j}\right]. \tag{22}
$$

设 $W = diag\left(w_1,\cdots,w_k\right)$ 是一个对角矩阵，其中 $w_i > 0, i = 1,\cdots,k$ 。则存在唯一的负循环 Jacobi 矩阵 $N \in \mathbb{M}_k$，使得 $\prod_{i=1}^{k} d_i = d$，并且：$\sigma(N,W) = \{\lambda_i : i = 1,\cdots,k\}$， $\sigma\left(N_1,W_1\right) = \{\mu_i : i = 1,\cdots,k-1\}$ 。

推论 4.3 [5]： 当引理 4.2 中的 M_1 和 W_1 分别由 M^1 和 W^1 替代，则引理 4.2 依然成立。

推论 4.4 [5]： 当引理 4.2 中的 $w_i > 0$ 分别由 $w_i < 0$ 替代 $(i = 1,\cdots,k)$，则引理 4.2 依然成立。

5. 主要结论及其证明

我们建立具有分布势函数的 Atkinson 类型的 S-L 问题(2)，(4)的逆谱问题的结论。下述定理是关于分离型边界条件(5)的逆谱问题的结论。

定理 5.1：设 $\{\lambda_i : i=1,\cdots,k\}$ 和 $\{\mu_i : i=1,\cdots,k-1\}$ 是两组严格交错的实数，形如(20)。令 $m=k-1$。则对于区间 $I=[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ 上的任何划分(7)，任何函数 $s\in L(I,\mathbb{R})$ 满足(8)以及任何函数 $w\in L(I,\mathbb{R})$ 满足(10)，我们有以下结论：

a) 存在函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$ 满足(8)和(9)使得 S-L 问题(2)，(5)及其等价类的谱为

$$\sigma(\alpha,\beta)=\{\lambda_i : i=1,\cdots,k\},\ \sigma(0,\beta)=\{\mu_i : i=1,\cdots,k-1\}.$$

b) 存在函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$ 满足(8)和(9)使得 S-L 问题(2)，(5)及其等价类的谱为

$$\sigma(\alpha,\beta)=\{\lambda_i : i=1,\cdots,k\},\ \sigma(\alpha,\pi)=\{\mu_i : i=1,\cdots,k-1\}.$$

此外，a)和 b)中的结论在等价类意义下是唯一的。

证明：a) 对于区间 $I=[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ 上的给定划分(7)，定义：

$$s_{2i+1}=\int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}} s(t)\,\mathrm{d}t,\ i=0,1,\cdots,m-1,\quad w_{2i}=\int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}} w(t)\,\mathrm{d}t,\ i=0,1,\cdots,m,$$

$$W_{\alpha\beta}=diag(w_0,w_2,\cdots,w_{2m}).$$

根据(8)，(10)，$s_{2i+1}\neq 0, i=0,1,\cdots,m-1$，$w_{2i}>0, i=0,1,\cdots,m$。因为 $k=m+1$，根据引理 4.1，存在唯一的负 Jacobi 矩阵 $M\in\mathbb{M}_{m+1}$ 使得：

$$\sigma(M,W)=\{\lambda_i : i=1,\cdots,m+1\},\ \sigma(M_1,W_1)=\{\mu_i : i=1,\cdots,m\}.$$

设：

$$r_{2i-1}=-\frac{\mathrm{e}^{s_{2i-1}}}{d_i}, i=1,\cdots,m;\quad q_0=c_1-\frac{1}{r_1}-\cot\alpha,$$

$$q_{2i}=c_{i+1}-\frac{\mathrm{e}^{2s_{2i-1}}}{r_{2i-1}}-\frac{1}{r_{2i-1}}, i=1,\cdots,m-1,\quad q_{2m}=c_{m+1}-\frac{\mathrm{e}^{2s_{2m-1}}}{r_{2m-1}}+\cot\beta.$$

根据(13)，(14)和注 3.1 定义 $P_{\alpha\beta},Q_{\alpha\beta},P_{0\beta}$ 和 $Q_{0\beta}$。可知，$r_{2i+1}>0, i=0,1,\cdots,m-1$。容易推出：$M=P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta}$，$M_1=P_{0\beta}+Q_{0\beta}$。根据注 2.1，我们得到 $(W_{\alpha\beta})_1=W_{0\beta}$。因此，

$$\sigma(P_{\alpha\beta}+Q_{\alpha\beta},W_{\alpha\beta})=\{\lambda_i : i=1,\cdots,m+1\},$$
$$\sigma(P_{0\beta}+Q_{0\beta},W_{0\beta})=\{\mu_i : i=1,\cdots,m\}.$$

根据引理 3.2 和注 3.1，我们得到 S-L 问题(2)，(5)的谱：

$$\sigma(\alpha,\beta)=\{\lambda_i : i=1,\cdots,m+1\},\ \sigma(0,\beta)=\{\mu_i : i=1,\cdots,m\}.$$

其中 $r_{2i+1}, i=0,1,\cdots,m-1$，$q_{2i}, i=0,1,\cdots,m$ 的选取是唯一的，而且对于这样的选取所确定的所有函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$ 构成了 S-L 问题(2)，(5)的一个等价类。证毕。

b) 证明方法与 a)相同，只需利用推论 4.1，引理 4.1，引理 3.2 和注 3.1 即可，故省略证明细节。

下述定理是关于耦合型边界条件(6)的逆谱问题的结论。

定理 5.2：设 $\{\lambda_i : i=1,\cdots,k\}$ 和 $\{\mu_i : i=1,\cdots,k-1\}$ 是两组交错的实数，满足引理 4.2 的条件 i)~iii)。令 $m=k-1$。则对于区间 $I=[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$ 上的任何划分(7)，任何函数 $s\in L(I,\mathbb{R})$ 满足(8)以及任何函数 $w\in L(I,\mathbb{R})$ 满足(10)，我们有以下结论：

a) 对于 $\forall\beta\in(0,\pi)$，$\exists K=(k_{ij})\in SL_2(\mathbb{R})$满足 $k_{12}<0$，$\cot\beta=k_{22}/k_{12}$，并且存在函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$满足(8)和(9)，使得 S-L 问题(2)，(6)及其等价类的谱为

$$\sigma(K)=\{\lambda_i:i=1,\cdots,k\},\ \sigma(0,\beta)=\{\mu_i:i=1,\cdots,k-1\}.$$

b) 对于 $\forall\alpha\in(0,\pi)$，$\exists K=(k_{ij})\in SL_2(\mathbb{R})$满足 $k_{12}<0$，$\cot\alpha=-k_{11}/k_{12}$，并且存在函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$满足(8)和(9)，使得 S-L 问题(2)，(6)及其等价类的谱为

$$\sigma(K)=\{\lambda_i:i=1,\cdots,k\},\ \sigma(\alpha,\pi)=\{\mu_i:i=1,\cdots,k-1\}.$$

证明：对于区间 $I=[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$上的给定划分(7)，定义：

$$s_{2i+1}=\int_{a_{2i+1}}^{a_{2i+2}}s(t)\mathrm{d}t,\ i=0,1,\cdots,m-1,\quad w_{2i}=\int_{a_{2i}}^{a_{2i+1}}w(t)\mathrm{d}t,\ i=0,1,\cdots,m,$$

$$W_I=diag(w_0,w_2,\cdots,w_{2m}).$$

根据(8)，(10)，$s_{2i+1}\neq0,i=0,1,\cdots,m-1$，$w_{2i}>0,i=0,1,\cdots,m$。因为 $k=m+1$，根据引理 4.2，存在唯一的负循环 Jacobi 矩阵 $N\in\mathbb{M}_{m+1}$使得：

$$\sigma(N,W)=\{\lambda_i:i=1,\cdots,m+1\},\ \sigma(N_1,W_1)=\{\mu_i:i=1,\cdots,m\}.$$

设：$r_{2i-1}=-\frac{\mathrm{e}^{s_{2i-1}}}{d_i},i=1,\cdots,m$；则 $r_{2i+1}>0,i=0,1,\cdots,m-1$。令 $k_{12}=\frac{1}{d_{m+1}}$，则 $k_{12}<0$。对于 $\beta\in(0,\pi)$，选取 $K\in SL_2(R)$使得 $\cot\beta=\frac{k_{22}}{k_{12}},k_{12}=\frac{1}{d_{m+1}}$。由 K 定义一个耦合型边界条件(6)，则：

$$\begin{aligned}q_0&=c_1-\frac{1}{r_1}+\frac{k_{11}}{k_{12}},\\ q_{2i}&=c_{i+1}-\frac{\mathrm{e}^{2s_{2i-1}}}{r_{2i-1}}-\frac{1}{r_{2i-1}},i=1,\cdots,m-1,\\ q_{2m}&=c_{m+1}-\frac{\mathrm{e}^{2s_{2m-1}}}{r_{2m-1}}+\frac{k_{22}}{k_{12}}.\end{aligned}$$

根据(13)，(14)，(15)，(16)和注 3.1 定义 $P_I,Q_I,P_{0\beta}$和 $Q_{0\beta}$。容易推出：$M=P_I+Q_I,M_1=P_{0\beta}+Q_{0\beta}$。

由注 3.1，可得$(W_I)_1=W_{0\beta}$。因此，

$$\begin{aligned}\sigma(P_I+Q_I,W_I)&=\{\lambda_i:i=1,\cdots,m+1\},\\ \sigma(P_{0\beta}+Q_{0\beta},W_{0\beta})&=\{\mu_i:i=1,\cdots,m\}.\end{aligned}$$

根据引理 3.2 和注 3.1，我们得到 S-L 问题(2)，(6)的谱为

$$\sigma(K)=\{\lambda_i:i=1,\cdots,m+1\},\ \sigma(0,\beta)=\{\mu_i:i=1,\cdots,m\}.$$

而且得到的所有函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$构成了 S-L 问题(2)，(6)的一个等价类。证毕。

b) 证明方法与 a)相同，利用推论 4.3，引理 4.2，3.2，3.3 和注 3.1 即可。证明细节略。

定理 5.3：设 $K=(k_{ij})\in SL_2(\mathbb{R})$，$k_{12}=0$，$k_{11}>0$。设$\{\lambda_i:i=1,\cdots,k\}$和$\{\mu_i:i=1,\cdots,k-1\}$是两组交错的实数，满足引理 4.2 的条件 i)~iii)。令 $m=k$。则对于区间 $I=[a,b]$ $(-\infty<a<b<+\infty)$上的任何划分(7)，任何函数 $s\in L(I,\mathbb{R})$满足(8)以及任何函数 $w\in L(I,\mathbb{R})$满足(10)，存在函数 $r,q\in L(I,\mathbb{R})$满足(8)和(9)使得，S-L 问题(2)，(6)及其等价类的谱为

$$\sigma(K)=\{\lambda_i:i=1,\cdots,k\},\ \sigma(0,\pi)=\{\mu_i:i=1,\cdots,k-1\}.$$

证明：证明方法与定理 5.2 相似，利用推论 4.3，引理 4.2，3.2，3.4 和注 3.1 即可。证明细节略。

基金项目

国家自然科学基金(11661059)，内蒙古自然科学基金(2017JQ07)资助。

参考文献

[1] Atkinson, F.V. (1964) Discrete and Continuous Boundary Problems. Academic Press, New York/London.

[2] Kong, Q., Wu, H. and Zettl, A. (2001) Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **263**, 748-762. https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7661

[3] Volkmer, H. and Zettl, A. (2007) Inverse Spectral Theory for Sturm-Liouville Problems with Finte Spectrum. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **135**, 1129-1132. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08563-7

[4] Kong, Q., Volkmer, H. and Zettl, A. (2009) Matrix Representations of Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Results in Mathematics*, **54**, 103-116. https://doi.org/10.1007/s00025-009-0371-3

[5] Kong, Q. and Zettl, A. (2012) Inverse Sturm-Liouville Problems with Finite Spectrum. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **386**, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.06.083

[6] Xu, S.F. (1998) An Introduction to Inverse Algebraic Eigenvalue Problems. Peking University Press, Beijing.

[7] 阎军. 具有分布势函数的 Sturm-Liouville 问题的谱性质[D]: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2015.

[8] 唐松林. 具有分布势函数和转移条件的 Sturm-Liouville 问题的谱性质[D]: [博士学位论文]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2016.

[9] Hryniv, R.O. and Mykytyuk, Ya.V. (2003) Inverse Spectral Problems for Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials. Part III: Reconstruction by Three Spectra. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **284**, 626-646. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00370-6

[10] Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A. (2005) Inverse Problem for Sturm-Liouville Operators with Distribution Potentials: Reconstruction from Two Spectra. *Russian Journal of Mathematical Physics*, **12**, 507-514.

[11] Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A. (2003) Sturm-Liouville Operators with Distribution Potentials. *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, **64**, 143-192.

[12] Savchuk, A.M. and Shkalikov, A.A. (2006) On the Eigenvalues of the Sturm-Liouville Operator with Potentials from Sobolev Spaces. *Mathematical Notes*, **80**, 814-832. https://doi.org/10.1007/s11006-006-0204-6