Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(4), 664-668**
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.84074

Hans汉斯

Vertex-Colors and Edge-Weights

Huijuan Zhang

Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
Email: 1123090089@qq.com

Received: Mar. 31st, 2019; accepted: Apr. 15th, 2019; published: Apr. 22nd, 2019

Abstract

Lyngsie, Thomassen and Zhong [1] on the base of 1-2-3-conjection proposed a conjecture that strengthens the four-color theorem: Every graph G with no isolated edges has a mapping $w: E(G) \to \{1,2,3\}$, so that for any two adjacent vertices u and v, $\sum_{e \in E(u)} w(e) \neq \sum_{e \in E(v)} w(e) (\bmod 4)$. We say satisfy the above conditions edge weighting w is 3-edge weighting 4-coloring of a graph G. This conjecture is considerably stronger than the four-color theorem. In this paper, we prove that Lyngsie, Thomassen and Zhong conjecture holds for trees. By using the four-color theorem, we prove that every planar graph has a 4-edge weighting 4-coloring.

Keywords

Tree, Planer Graph, Connected Graph, Edge Weighting Vertex Coloring

点染色和边赋权

张慧娟

浙江师范大学，浙江 金华
Email: 1123090089@qq.com

收稿日期：2019年3月31日；录用日期：2019年4月15日；发布日期：2019年4月22日

摘 要

Lyngsie，Thomassen和Zhong [1]在1-2-3-猜想的基础上提出了一个强化4-色定理的猜想：对于任意不含孤立边的平面图G，存在G的一个边赋权$w: E(G) \to \{1,2,3\}$，使得对任意相邻的两个顶点u,v，有$\sum_{e \in E(u)} w(e) \neq \sum_{e \in E(v)} w(e) (\bmod 4)$.我们称满足上述条件的边赋权$w$为$G$的一个3-边赋权4-染色。这是一个

文章引用: 张慧娟. 点染色和边赋权[J]. 应用数学进展, 2019, 8(4): 664-668.
DOI: 10.12677/aam.2019.84074

比4-色定理强很多的猜想。在本文中我们证明了阶数至少为3的树满足这个猜想。另外，利用4-色定理，我们证明了每一个平面图 G 存在一个4-边赋权4-染色。

关键词

树，平面图，连通图，边赋权顶点染色

1. 引言

对于图的边赋权染色的概念是 Karoński，Luczak 和 Thomason [2]在 2004 年引进的。Karoński，Luczak 和 Thomason 在[2]中提出如下猜想：对任意不含孤立边的图 G，存在 G 的一个边赋权 $w: E(G) \to \{1,2,3\}$，使得对任意相邻的两个顶点 u,v，有 $\sum_{e\in E(u)} w(e) \neq \sum_{e\in E(v)} w(e)$。这一猜想近十多年来受到极大的关注，被称为 1-2-3-猜想。我们称满足上述条件的边赋权 w 为 G 的一个 3-边赋权顶点染色。设 $w: E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$ 的一个映射，我们称 w 为 G 的一个 k -边赋权。对于 G 的顶点 v，$\sum_{e\in E(v)} w(e)$ 为 v 相对于 w 的加权点度。如果对 G 的任意两个相邻的顶点 u,v，$\sum_{e\in E(u)} w(e) \neq \sum_{e\in E(v)} w(e)$，称 w 为 G 的一个 k -边赋权顶点染色。

Karoński，Luczak 和 Thomason 证明了没有孤立边的 3-可染的连通图满足 1-2-3-猜想。2010 年 Kalkowski，Karoński 和 Pfender [3]证明了没有孤立边的连通图，存在一个 5-边赋权染色。2017 年，Wu，Zhang 和 Zhu [4]等人证明了 4-可染的 4-边连通图存在 3-边赋权染色。Lyngsie，Thomassen 和 Zhong [1]提出了强化 4-色定理的猜想。Lyngsie 等人证明了 4-可染的 4-边连通图和三角化的平面图满足这个猜想。

在本文中我们证明了：

定理 1：设 T 是一个阶数至少为 3 的树，则存在一个 3-边赋权 $w: E(T) \to \{1,2,3\}$，使得对任意两个 $uv \in E(T)$，$\sum_{e\in E(u)} w(e) \neq \sum_{e\in E(v)} w(e) \pmod 4$。

定理 2：至少三个顶点的平面图 G，令 $c: V(G) \to \{0,1,2,3\}$。若 $\sum_{v\in V(G)} c(v)$ 是偶数，那么存在一个 3-边赋权 $w: E(G) \to \{1,2,3\}$，使得对任意两个相邻的两个顶点 u,v，$\sum_{e\in E(u)} w(e) \neq \sum_{e\in E(v)} w(e) \pmod 4$。

2. 定理 1 的证明

为了证明定理 1，我们将证明一个更强的定理如下：

定理 3：令 T 是树。假设 L 是 T 的一个列表分配，如下：

$L(v) = \{1,2,3\}$，如果 v 是 T 的叶子点；

$L(v) = \{0,1,2,3\}$，否则。

那么存在一个边赋权 $w: E(T) \to \{1,2,3\}$，使得对任意的点 v 有

$$\sum_{e\in E(v)} w(e) \equiv c(v) \pmod 4,$$

且 c 是 T 的一个好的点染色，$c(v)\in L(v)$。

我们通过 $V(T)$ 上的归纳假设证明了这一点。如果 $|V(T)|=3$，那么很容易证明定理 3。假设 $|V(T)|\ge 4$ 且 $n'<|V(T)|$ 时，定理 3 成立。令 u 是树 T 的叶子点，$uu^*\in E(T)$。因为 T 不包含 K_2，所以 $d(u^*)\ge 2$。于是接下来的证明我们分两种情况：$d(u^*)=2$ 以及 $d(u^*)\ge 3$。

Case 1：$d(u^*)=2$。

令 $T'=T-u$，由归纳假设对任意的点 $v\in V(T')$ 存在一个边赋权 $w':E(T')\to\{1,2,3\}$，$\sum_{e\in E(v)} w'(e)\equiv c'(v) \pmod 4$。

并且 c' 是 T' 的一个好的染色 $c'(v)\in L'(v)$，其中对任意的 $v\in V(T')-\{u^*\}$ 时 $L'(v)=L(v)$，且 $L'(u^*)=\{1,2,3\}$。令 $u^{**}\ne u$ 是 u^* 的一个邻点。定义 T 的一个边赋权 $w:E(T)\to\{1,2,3\}$：使得如果 $e\in E(T')$，那么 $w(e)=w'(e)$，而 $w(uu^*)$ 定义如表 1。

Table 1. The definition of $w(uu^*)$

表 1. $w(uu^*)$ 的定义

$C(u^{**})$	0						1				2				3			
$C(u^*)$	1		2		3		2		3		1		3		1		2	
$W(uu^*)$	11	22	11	33	22	33	11	22	11	33	22	33	11	22	11	33	22	33

不难发现 w 是 T 的一个边赋权，使得对 $\forall\ v\in V(T)$，有

$$\sum_{e\in E(v)} w(e)\equiv c(v) \pmod 4$$

c 是 T 的一个好的染色，$c(v)\in L(v)$。

Case 2：$d(u^*)\ge 3$。

用集合 S 表示 T 的所有叶子点，即 $S=\{v:v\text{是}T\text{的叶子点}\}$。令 $N(S)=\{v^*:vv^*\in E(T),v\in S\}$。注意对任意的 $v^*\in N(S)$ 有 $d(v^*)\ge 3$。如果对任意的 $v^*\in N(S)$，在 T 中 v^* 只有一个叶子点邻点，那么 T 的平均度 $\bar{d}(T)\ge 2$，即 $|E(T)|\ge|V(T)|$，与 T 是树相矛盾。因此，$N(S)$ 中存在一个顶点，不失一般性地 $u^*\in N(S)$，使得 u^* 在 T 中至少有两个叶子点邻点，记作 u 和 u_1。令 $T'=T-\{u,u_1\}$，由归纳假设使对每一个点 $v\in V(T')$ 存在一个边赋权 $w':E(T')\to\{1,2,3\}$，

$$\sum_{e\in E(v)} w'(e)\equiv c'(v) \pmod 4,$$

使得 $c'(v)\in L'(v)$ 且 c' 是 T' 的一个好的染色。其中 L' 的定义如下：

如果 $d(u^*)=3$，那么 $L'(u^*)=\{1,2,3\}$，对任意的点 $v\in V(T')-\{u^*\}$ 有 $L'(v)=L(v)$；如果 $d(u^*)\ge 4$，那么对任意的点 $v\in V(T')$ 有 $L'(v)=L(v)$。

定义边赋权 $w:E(T)\to\{1,2,3\}$：如果 $e\in E(T')$，那么 $w(e)=w'(e)$；这时我们定义 $w(u^*u_1)$ 和 $w(u^*u)$ 如下：如果 $c'(u^*)\ne 2$ 那么 $w(u^*u_1)=w(u^*u)=2$；否则，$w(u^*u_1)=1$，$w(u^*u)=3$。注意对于每个点 $v\in V(T')$，$c'(v)\equiv c(v) \pmod 4$。此外，因为 $c(v)=c'(v)+w(u^*u_1)+w(u^*u)$，它验证了 $c(u_1)\ne c(u^*),c(u)\ne c(u^*) \pmod 4$。因此，$w$ 是 T 中对于每个点 v 的一个边赋权染色，

$$\sum_{e\in E(v)} w(e)\equiv c(v) \pmod 4,$$

并且 c 是 T 的一个好的染色，$c(v)\in L(v)$。证毕。

3. 定理 2 的证明

定理 2 也可以表述为：

定理 4：令 Γ 是四阶循环群，令 G 是非平凡的平面图。那么存在一个边赋权 $w:E(G)\to\Gamma$ 使得 c 是一个好的点染色，其中 $c(v)=\sum_{e\in E(v)}w(e)$。

因为 Γ 是循环群，由同构的性质我们可以假设 $\Gamma=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}=\{0,1,2,3\}$。由四色定理，我们可以用四种颜色将一个平面图 G 染好。对于 $1\le i\le 4$ 我们假设第 i 个颜色包含 $n_i\ge 0$ 个点。

Case 1：如果图 G 是二部图。

如果二部图 G 是星图 $K_{1,t}$，那么令 v 是 $K_{1,t}$ 中不是叶子的点，用 $v_1,v_2,\cdots,v_t$ 表示 $K_{1,t}$ 的叶子点，其中 t 是正整数且 $t\ge 2$。如果 $t\ne 4p+1$，那么对所有的边 $e\in E(G)$ 令 $w(e)=1$。如果 $t=4p+1$，那么对于 $i\le 4p-1$ 时，令 $w(vv_i)=1$；和 $w(vv_{4p})=w(vv_{4p+1})=2$，这证明了 c 是图 G 的一个好的染色。

假设 G 不是星图。

首先，令 $c_0:V(G)\to\{0,1\}$，对于 $1\le i\le 2$ 我们假设第 i 个颜色类包含 $n_i\ge 0$ 个点。然后我们定义权重 $w:E(G)\to\{0,1,2,3\}$。当 $c_0\ne\sum_{e\in E(v)}w(e)$ 时我们说这个点是错误的点；且当 $c_0=\sum_{e\in E(v)}w(e)$ 时我们说这个点是正确的点。我们想要实现图 G 中的每个顶点都是正确的顶点。

最初，我们定义图 G 的每条边的权重为 0，即对于任意的 $e\in E(G)$ 有 $w_0\equiv 0$。因为图 G 是非平凡图，那么由对称性，我们可以在颜色类 1 中选择一个点 x 以及 $d(x)\ge 2$。所以颜色类 1 中的每个点都是错误的点，因为 $c_0=1\ne 0=\sum_{e\in E(v)}w(e)$。

现在我们尝试修改权重：选择一个从错误的点 u 且 $g=\sum_{e\in E(u)}w(e)$ 到另一个错误的点 v 的偶长途径。遍历这个途径，给途径上的边交替增加 $1-g,g-1,\cdots$。这个操作保持了顶点权重的总和，除了点 u 和点 v 其他所有点的权重不变，并且生成了一个正确的点。

如果图 G 中的每个点都是正确的点，那么证毕。否则，存在一个点是错误的点，并且记这个错误的点 x 是颜色类 1 中的点。因为颜色类 0 中的点是正确的点，那么 x 的权重 $g=1-n_2$。如果 $g\ne 0$，那么证毕。否则我们可以将与 x 相关联的两条边分别加权重 2 和 3。因此，我们得到了边赋权 w 和好的染色 c。那么证毕。

Case 2：如果图 G 是非二部图。

令 $c:V(G)\to\{0,1,2,3\}=\{g_1,g_2,g_3,g_4\}$ 是一个好的点染色。通过置换颜色类，我们可以假设顶点颜色的总和是偶数，假设 $\sum_{v\in V(G)}c(v)=2h$。令其中一条边的权重为 $h(\bmod 4)$ 和剩余其他边的权重为 0，所以顶点权重的总和是 $2h$ 且 $n_1g_1+n_2g_2+n_3g_3+n_4g_4=2h$。我们现在尝试修改权重，使得顶点的权重总和不变，直到所有染颜色 i 的顶点有权重 $g_i,1\le i\le 4$。假设存在一个染颜色 i 的顶点 u 有错误的权重 $g\ne g_i$；因为 $n_1g_1+n_2g_2+n_3g_3+n_4g_4=2h$ 那么存在另一个顶点 $v\in V(G)$ 的权重也是错误的，选择一个从 u 到 v 的偶长途径，这总是可以存在的，除非图 G 是二部图。遍历这个途径，给途径上的边交替增加 $g_i-g,g-g_i,g_i-g,g-g_i,\cdots$。这个操作保持点的权重的总和，除了点 u 和点 v 其他所有点的权重不变，并且生成了一个正确的点。因此，重复的应用以上操作给出所需的权重。定理证毕。

如果 $|\Gamma|=2$，那么定理 4 可能会不满足。例如星图 $K_{1,3}$ 不可以用整数模 2 赋权。

参考文献

[1] Lyngsie, K.S., Thomassen, C. and Zhong, L. (2018) Four Vertex-Colors and Three Edge-Weights. AMS Subject Classifications, 05C10, 05C15, 05C22.

[2] Karoński, M., Luczak, T. and Thomason, A. (2004) Edge Weights and Vertex Colours. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **91**, 151-157. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.12.001

[3] Kalkowski, M., Karon'ski, M. and Pfender, F. (2010) Vertex-Coloring Edge-Weightings: Towards the 1-2-3-Conjecture. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **100**, 347-349. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2009.06.002

[4] Wu, Y.Z., Zhang, C.Q. and Zhu, B.X. (2017) Vertex-Coloring 3-Edge-Weighting of Some Graphs. *Discrete Mathematics*, **340**, 154-159. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.08.011