Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(5), 902-909
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85102

Hans汉斯

Kolmogorov (n,δ)-Width of Infinite-Dimension Identity Operators in Probabilistic Frames

Jin Chen, Hanyue Xiao

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 751237185@qq.com

Received: Apr. 25th, 2019; accepted: May 10th, 2019; published: May 17th, 2019

Abstract

In this paper, we consider the Kolmogorov (n,δ)-width of infinite-dimension identity operator $I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q \left(1 \le q \le p < \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ in probabilistic frames, and obtain its asymptotic degree.

Keywords

Identity Operator, Kolmogorov N-Width, Asymptotic Degree, Probabilistic Frames

概率框架下无穷维恒等算子的 Kolmogorov (n,δ)-宽度

陈　锦，肖寒月

西华大学理学院，四川 成都
Email: 751237185@qq.com

收稿日期：2019年4月25日；录用日期：2019年5月10日；发布日期：2019年5月17日

摘　要

本文讨论了无穷维恒等算子 $I_{p,q}: l_{p,r} \to l_q \left(1 \le q \le p < \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ 在概率框架下的宽度，并计算了其精确渐近阶。

文章引用: 陈锦, 肖寒月. 概率框架下无穷维恒等算子的 Kolmogorov $(\mathbf{n},\delta)$-宽度[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 902-909. DOI: 10.12677/aam.2019.85102

关键词

恒等算子，Kolmogorov n-宽度，渐近阶，概率框架

1. 引言及主要结果

宽度理论是函数逼近论的重要内容之一，也是国内外研究的热点之一，它与计算复杂性有着密切的联系[1]。宽度问题是 Kolmogorov [2]在 1936 年首次提出的一个概念，并给出了 Sobolev 函数类 B_2^r 到 L_2 上的 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶。1954 年，Stechkin [3]研究了在 $p=1, q=2$ 特殊情况下有限维空间的 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶与线性 n-宽度的精确渐近阶。1960 年，Tikhomirov [4]给出了宽度 $d_n\left(B_\infty^r\right)_\infty$ 的精确渐近阶。此后两年，Pietsch [5]和 Stein [6]研究了在一般情形下，$p \geq q$ 时 Kolmogorov n-宽度的精确渐近阶与线性 n-宽度的精确渐近阶。1974 年，Ismagilov [7]研究了当 $q>p$ 时的精确渐近阶估计。1985 年，Pinkus [8]给出了有限维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度。王桐心[9]给出了无穷维恒等算子的在最坏框架下的 Kolmogorov n-宽度。本文主要讨论无穷维恒等算子在概率框架下的 Kolmogorov (n,δ)-宽度。

首先，我们给出需要用到的基本定义和记号。

定义 1.1 [8]：设 W 为赋范性线性空间 $(Y,\|\cdot\|)$ 的一非空子集，$n=0,1,2,\cdots$，称

$$d_n(W,Y)=\inf_{F_n}\sup_{x\in W}\inf_{y\in F_n}\|x-y\|$$

为 W 在 Y 中的 Kolmogorov n-宽度，其中 F_n 取遍 Y 中的维数不超过 n 的所有线性子空间。

定义 1.2 [8]：设 X,Y 为两个赋范线性空间，其范数分别为 $\|\cdot\|_X$ 与 $\|\cdot\|_Y$，T 是 X 到 Y 的有界线性算子。记 $n=0,1,2,\cdots$，

称

$$d_n(T:X\to Y)=d_n\left(T(B_X);\bar{Y}\right) \tag{1}$$

算子 T 的 Kolmogorov n-宽度，其中 B_X 表示 X 的单位球，即 $B_X:=\left\{x\in X \,\middle|\, \|x\|_X\leq 1\right\}$。

定义 1.3 [10]：设 B 为 W 的全部开子集所生成的 Borel 域，在 B 上赋予概率测度 μ，即 μ 为定义在 B 上的 σ-可加的非负函数，且有 $\mu(W)=1$，令 $\delta\in[0,1)$，

则称

$$d_{n,\delta}(W,\mu,Y)=\inf_{G_\delta} d_n\left(W/G_\delta, Y\right)$$

为 W 在 $\mathbb{Z}$ 中的 Kolmogorov 概率 (n,δ)-宽度，其中 G_δ 表示取遍 B 中所有测度不超过 δ 的子集。

并称

$$d_{n,\delta}(T:W\to Y,\mu)=\inf_{G_\delta} d_n\left(T\left(W/G_\delta\right),Y\right)=\inf_{G_\delta}\inf_{F_n}\sup_{x\in W/G_\delta}\inf_{y\in F_n}\|Tx-y\|_Y \tag{2}$$

为算子 Kolmogorov (n,δ)-宽度，其中 G_δ 表示取遍 B 中所有测度不超过 δ 的子集，F_n 取遍 Y 中的维数不超过 n 的所有线性子空间。

设$1 \le p \le \infty, \forall x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$\|x\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty \\ \sup_{n \ge 1} |x_n|, & p = \infty \end{cases}$$

$l_p = \left\{ x \middle| \|x\|_{l_p} < \infty \right\}$可知$\|\cdot\|_{l_p}$为$l_p$上的一个范数，且$l_p$为 Banach 空间，且

当$1 \le p \le q \le \infty$时，$l_p \subset l_q$，而$l_q \not\subset l_p$。

故而可知：无穷维恒等算子是$I : l_p \to l_q$的有界线性算子，而不是l_q到l_p的有界线性算子。

对于$1 \le p \le \infty ; r > 0, x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_p$，令

$$x^r := \{n^r x_n\}_{n=1}^{\infty}, \|x\|_{l_{p,\gamma}} := \|x^r\|_{l_p} = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |n^r x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \le p < \infty \\ \sup_{n \ge 1} |x_n \cdot n^r|, p = \infty \end{cases}$$

$$l_{p,r} := \left\{ x \in l_p \middle| \|x\|_{l_{p,r}} < \infty \right\}$$

则可知，$\|\cdot\|_{l_{p,r}}$为$l_{p,r}$上的范数，且$l_{p,r}$为 Banach 空间，记$B_{p,r}$为$l_{p,r}$中的单位球。

令$1 \le p < q \le \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$时，对$\forall x \in l_{p,r}$由 Hölder 不等式：

$$\|x\|_{l_q} \le \begin{cases} \|x\|_{l_{p,r}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{pr}{p-q}} \right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} < \infty, & 1 \le p < q \le \infty \\ \|x\|_{l_{p,r}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\gamma q} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, & p = \infty \end{cases}$$

因此$x \in l_q$，于是无穷维恒等算子$I_{p,q}\left(1 \le q < p \le \infty, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$定义为：

$$\begin{gathered} I_{p,q} : l_{p,r} \to l_q \\ x \mapsto x \end{gathered}$$

则$I_{p,q}$为$l_{p,r}$到l_q上的有界线性算子。

本文利用离散化的方法讨论了概率框架下无穷维恒等算子的 Kolmogorov(n,δ)-宽度，并得到其精确渐近阶。这就是本文的主要结果，即

定理 1：设$1 \le q < p \le 2, r > \frac{1}{q} - \frac{1}{p}, \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$，则

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,q} : l_{p,r} \to l_q, \mu\right) \succ\prec n^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{\delta}}$$

其中，符号“$\succ\prec$”的定义如下：假设$c_i, i = 0,1,\cdots$是和参数p,q,r有关的非负常数。对两个正函数$a(y)$和$b(y)$，$y \in D$，如果存在正常数c_1满足条件$a(y) \le c_1 b(y)$，则记$a(y) \ll b(y)$。若存在正常数c_2满足条件$c_2 a(y) \ge b(y)$，则记$a(y) \gg b(y)$，若$a(y) \ll b(y)$且$a(y) \gg b(y)$，则记$a(y) \succ\prec b(y)$。

2. 主要结果的证明

首先介绍有限维空间的 Kolmogorov (n,δ)-宽度的相关结论。

令 $\mathbb{R}^m=\{x=(x_1,\cdots,x_m)|x_i\in\mathbb{R},i=1,\cdots,m\}$。

设 $1\le p\le\infty,x=(x_1,\cdots,x_m)\in\mathbb{R}^m$，

$$\|x\|_{l_p^m}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^m|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty\\ \max_{1\le n\le m}|x_n|,p=\infty\end{cases}$$

则 $\|\cdot\|_{l_p^m}$ 为 $\mathbb{R}^m$ 上的范数，l_p^m 表示 $\mathbb{R}^m$ 按范数 $\|\cdot\|_{l_p^m}$ 所构成的 Banach 空间。

记 B_p^m 为 l_p^m 的单位球，则易知 $\{e_n'\}_{n=1}^m$ 为 l_p^m 的基，其中 $e_n'=(0,\cdots,1,\cdots,0)\in\mathbb{R}^m$

引理 1 [8] [10]：(1)设 $1\le p<q\le\infty,n=0,1,2,\cdots$，则

$$d_n\left(B_p^m,l_q^m\right)=\begin{cases}(m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & 0\le n\le m\\ 0, & n>m\end{cases}$$

$1\le q\le 2,2n\le m,\delta\in(0,\delta]$，则有

$$d_{n,\delta}\left(\mathbb{R}^m,\gamma,l_q^m\right)\succ\prec m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\sqrt{m+\ln\frac{1}{\delta}}.$$

首先建立离散化定理：

定理 2：设 $1\le q<p\le 2$，$r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，非负整数序列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ 满足 $0\le n_k\le m_k$，且 $\sum_{k=1}^\infty n_k\le n$。则

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)\succ\prec\sum_{n=1}^\infty 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}d_{n_k,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right).$$

为了证明定理 2，我们先介绍一些记号：对 $\forall k\in\mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}\in\{1,2,\cdots\}$，记 $S_k=\{n\in\mathbb{N}|2^{k-1}\le n<2^k\}$，则 $\forall k,k'\in\mathbb{N}$，且 $k\ne k'$，有 $S_k\cap S_{k'}=\varnothing,\mathbb{N}=\bigcup_{k=1}^\infty S_k$，用 m_k 表示 S_k 中元素的个数，则 $m_k=|S_k|=2^{k-1}$。

$\forall x=\{x_n\}_{n=1}^\infty\in l_p$，有 $x=\sum_{n=1}^\infty x_n e_n$ 这里 $e_n=\left(0,\cdots,\underset{\underset{n}{\downarrow}}{1},\cdots 0\right)$，且 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $l_p(1\le p)\le\infty$ 的 Schauder 基。

对于 $\forall k\in\mathbb{N}$，记 $F_k=span\{e_n|n\in S_k\}$，则 $\dim F_n=m_k=2^{k-1}$。

令 $I_k:F_k\to\mathbb{R}^{m_k}$

$$x=\sum_{n\in S_k}x_n e_n\mapsto\sum_{j=1}^m x_{2^{k-1}+j-1}\cdot e'_{2^{k-1}+j-1}$$

则 $\forall x=\sum_{n\in S_k}x_n\cdot e_n\in F_k$，有

$$\|x\|_{l_{p,r}}=\left(\sum_{n\in S_k}|n^r\cdot x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\succ\prec\left(\sum_{n\in S_k}|2^{rk}\cdot x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{r\cdot k}\left(\sum_{n\in S_k}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{rk}\|I_k x\|_{l_p^{m_k}}\tag{1}$$

且

$$\|x\|_{l_p}=\left(\sum_{n\in S_k}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|I_k x\|_{l_p^{m_k}} \tag{2}$$

从而 I_k 为 $l_p\cap F_k$ 到 $l_p^{m_k}$ 上的等距同构映射。

据 Gaussian 测度 μ 的定义，在 $\mathbb{R}^m$ 中赋予标准 Guassiam 测度

$$\gamma=\gamma_m,\gamma(G)=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int_G \exp\left(-\frac{1}{2}\|x\|_2^2\right)\mathrm{d}x$$

对 $\forall n\in S_k$，记 $\rho>0$ $\sigma_n=\langle c_\mu e_n,e_n\rangle=\lambda_n=n^{-\rho}$，$c_\mu$ 为所对应特征向量，$e_k=\left\{0,\cdots,\underset{\substack{\downarrow\\k}}{1},0,\cdots\right\}$。

则可知：

$$\frac{1}{2^{k\rho}}<\sigma_n\le\frac{2^\rho}{2^{k\rho}},\quad C_\mu e_k=\lambda_k e_k$$

记 $\sigma=\dfrac{1}{2^{k\rho}},\sigma'=\dfrac{2^\rho}{2^{k\rho}}$ 于是 $\lambda_k=k^{-\rho}$。

下面我们来估计定理 2 的上界：

即：设 $1\le q<p\le 2,r>\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p}$，$n$ 为自然数，则 $\forall\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，对任意满足条件 $0\le n_k\le m_q,\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n,\sum_{k=1}^{\infty}\delta_n\le\delta$ 的数列 $\{n_k\},\{\delta_k\}$，这里 $(n_k=0,1,2,\cdots)\delta_k\ge 0$，有

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,\gamma}:l_{p,\gamma}\to l_p\mu\right)\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(\frac{p}{2}+r\right)k}d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$

证明：$\forall k\in\mathbb{N}$，$x\in B_{l_{p,r}}\cap F_k$，有

$$1\ge\|x\|_{l_{p,r}}\gg 2^{\gamma k}\cdot\|I_k x\|_{l_p^{m_k}}$$

$\forall y\in F_k$ 由(2)式有

$$\|y\|_{l_q}=\|I_k y\|_{l_q^{m_k}}$$

$$d_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\ll 2^{-rk}\cdot d_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$

对于 $\forall k\in\mathbb{N}$，由 Kolmogorov-(n,δ) 宽度的定义，可知存在 $l_q^{m_k}$ 上的一个秩不大于 n_k 的恒等算子 I_{n_k}，使得

$$\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\middle|\left\|I_{p,r_k}y-I_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}>2^{-rk}d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma\right)\right\}\le\delta_k$$

对于 $\forall y\in\mathbb{R}^{m_k}$，有

$$\left\|I_{p,r_k}y-I_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}=\left\|I_k I_{p,r}y-I_{n_k}y\right\|_q$$

令

$$G_k=\left\{x\in l_2\middle|\left\|I_{p,r_k}I_k^{-1}n_k x-T_{n_k}I_k^{-1}n_k x\right\|_q>\sigma^{\frac{1}{2}}2^{-rk}d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma\right)\right\}$$

由 Gaussian 测度 μ 和标准 Gaussian 测度 γ 的定义可得

$$\mu(G_k)=\gamma_{m_k}\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|I_{p,r_k}\left(y_{2^{k-1}}\sigma_{2^{k-1}}^{\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma_{2^{k-1}}^{\frac{1}{2}}\right)-I_{n_k}\left(y_{2^{k-1}}\sigma_{2^{k-1}}^{\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma_{2^k-1}^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_{l_q^{m_k}}\right.\right.$$

$$\left.>\sigma^{\frac{1}{2}}2^{-rk}d_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{n_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\right\}$$

$$\le v\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|I_{p,r_k}\left(y_{2^{k-1}},\cdots,y_{2^k-1}\right)-I_{n_k}\left(y_{2^{k-1}}\sigma^{\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma^{\frac{1}{2}}\right)\right\|_{l_q^{m_k}}>\sigma^{\frac{1}{2}}2^{-rk}d_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},v_{m_k}\right)\right.\right\}$$

$$\le\delta_k$$

令 $G=\bigcup_k G_k, I_n=\sum_k I_{n_k}$ ，则

$$\mu(G)\le\sum_k\mu(G_k)\le\sum_k\delta_k\le\delta$$

$$rank\ I_n\le n$$

从而有：

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_p\to l_q,\mu\right)\ll\sup_{x\in l_p/G}\left\|I_{p,r}x-I_nx\right\|_q\ll\sup_{x\in\{n_kx\}/\{G_k\}}\sum_k\left\|I_{p,r,k}I_k^{-1}n_kx-I_{n_k}I_k^{-1}n_kx\right\|_q$$

$$\ll\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x\in\{n_kx\}/G_k}\left\|I_{p,r,n_k}I_k^{-1}n_kx-I_{n_k}I_k^{-1}n_kx\right\|$$

$$\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(r+\frac{\rho}{2}\right)k}\cdot d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$

现在，我们再来估计定理 2 的下界：

即：设 $1\le q\le 2,\delta\in\left(0,\frac{1}{2}\right],r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p},n=0,1,2,\cdots$ ，则有

$$d_{n,\delta}\left(I_{\rho,\gamma}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)\gg 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+\gamma\right)k}\cdot d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$

其中 $n\succ\prec 2^k\gg 2n$。

证明：$\forall x\in B_p^{m_k},1\ge\|x\|_{l_p^{m_k}}\ge 2^{rk}\left\|I_k^{-1}x\right\|_{l_{p,r}}$ ，对 $\forall y\in l_q^{m_k}$，则有 $\|y\|_{l_p^{m_k}}=\left\|I_k^{-1}y\right\|_{l_q}$

由 I_p 为 $F_k\cap l_2$ 到 l_q 上的恒等算子，有

$$\mu\left\{x\in F_k\cap l_2:\left\|I_px-y\right\|>2^{rk}d_{n,\delta}\right\}\le\delta$$

其中 $d_{n,\delta}=d_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)$。

设 $G_k'=\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|I_{p,k}y-I_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}>\sigma'^{-\frac{1}{2}}2^{rk}d_{n,\delta}\right.\right\}$，则有

$$\gamma\left(G_k'\right)=\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|I_{p,k}y-I_kI_{n_k}I_k^{-1}y\right\|_{l_q^{m_k}}>\sigma'^{\frac{1}{2}}2^{rk}d_{n,\delta}\right.\right\}=\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|I_{p,k}y\sigma'^{\frac{1}{2}}-I_kI_{n_k}I_k^{-1}y\cdot\sigma'^{-\frac{1}{2}}\right\|_{l_q^{m_k}}>2^{rk}d_{n,\delta}\right.\right\}$$

$$\le\gamma\left\{y\in\mathbb{R}^{m_k}\left|\left\|I_{p,k}\left(y_{2^{k-1}}\sigma'^{-\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma'^{-\frac{1}{2}}\right)-I_kI_{n_k}I_k^{-1}\left(y_{2^{k-1}}\sigma'^{-\frac{1}{2}},\cdots,y_{2^k-1}\sigma'^{-\frac{1}{2}}\right)\right\|_{l_q^{m_k}}>2^{rk}d_{n,\delta}\right.\right\}$$

$$=\mu\left\{x\in F_k\cap l_q^{m_k}:\left\|I_px-y\right\|_q>2^{rk}d_{n,\delta}\right\}\le\delta$$

所以

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,k}:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\le\sup_{y\in\mathbb{R}^{m_k}/G_k'}\left\|I_{p,k}y-I_{n_k}y\right\|_{l_q^{m_k}}\ll 2^{\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}d_{n,\delta}$$

即：

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\gamma\right)\ge 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)$$

综上可知，定理 2 得证。

有了离散化定理 2，下面我们来证明本文的主定理即定理 1。

证明：首先建立数列：

$$n_k=\begin{cases}m_k & k\le k'\\ \left[2^{\beta(k-k')}\cdot n\right] & k>k'\end{cases},\quad \delta=\begin{cases}0 & k\le k'\\ 2^{k-k'}\delta & k>k'\end{cases}$$

其中 $k'=\left[\log_2^n\right]+1$ 且 $0<\beta<\rho-\frac{1}{q}$，则

$$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\ll\sum_{0<k\le k'}2^{k-1}+n\sum_{k>k'}2^{\beta(k'-k)}\ll n$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\delta_k\ll\delta\sum_{k>k'}2^{k'-k}\ll\delta$$

下面我们来证明定理 1 的上界：

$$\begin{aligned}d_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)&\ll\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot d_{n,\delta}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\\&\ll\sum_{k>k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\left[m_k^{\frac{1}{q}}\left(\left(1+\frac{1}{n_k}\ln\frac{1}{\delta_k}\right)\ln\frac{em_k}{n_k}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\&\ll\sum_{k>k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot\left[m_k^{\frac{1}{q}}\left(\ln\frac{em_k}{n_k}\right)^{\frac{1}{2}}\right]+\left[\sum_{k>k'}2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}m^{\frac{1}{q}}\cdot\frac{1}{n_k}\ln\frac{1}{\delta_k}\ln\frac{em_k}{n_k}\right]^{\frac{1}{2}}\\&\ll 2^{k'\left(-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}\right)}\cdot 2^{\left(-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}\right)}+2^{k'\left(-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}\right)}\sqrt{\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}\\&\ll n^{-\left(-\frac{\rho-1}{2}-r+\frac{1}{q}-\frac{1}{2}\right)}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}=n^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}\end{aligned}$$

即得到定理的上界

下面再来证明主定理 1 的下界：

设 $k=\left[\log_2^n\right]+3$，则 $m_k\ge 2n$，且 $2^k\gg n$

于是

$$\begin{aligned}d_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)&\ge 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot d_{n_k,\delta_k}\left(I_k:\mathbb{R}^{m_k}\to l_q^{m_k},\gamma_{m_k}\right)\gg 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k}\cdot m_k^{\frac{1}{q}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{m_k}\right)\ln\frac{1}{\delta_k}}\\&\gg 2^{-\left(\frac{\rho}{2}+r\right)k+\frac{k}{q}}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)\ln\frac{1}{\delta}}\gg n^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}\end{aligned}$$

于是得到

$$d_{n,\delta}\left(I_{p,r}:l_{p,r}\to l_q,\mu\right)\asymp n^{-\frac{\rho}{2}-r+\frac{1}{q}}\sqrt{1+\frac{1}{n}\ln\frac{1}{\delta}}.$$

综上可知，定理 1 得证。

参考文献

[1] Traub, J.F., Wasilkowski, G.W. and Wozniakowski, H. (1988) Information-Based Complexity. Academic Press, Boston.

[2] Kolmogorov, A.N. (1936) Uber die deste Annaherung yon funktionen einer gegebenen funktioneklasse. *Annals of Mathematics*, No. 37, 107-111. https://doi.org/10.2307/1968691

[3] Stechkin, S.R. (1954) On Best Approximation of Given Classes of Functions by Arbitrary Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **9**, 133-134. (Russian)

[4] Tikhomirov, V.M. (1960) Diameters of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **15**, 81-120. (English Translation in *Russian Mathematical Surveys*, **15**, 75-111.) https://doi.org/10.1070/RM1960v015n03ABEH004093

[5] Pietsch, A. (1974) S-Numbers of Operators in Banach Spaces. *Studia Mathematica*, No. 51, 201-223. https://doi.org/10.4064/sm-51-3-201-223

[6] Stesin, M.I. (1975) Aleksandrov Widths of Finite-Dimensional Sets and Classes of Smooth Functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **220**, 1278-1281. (English Translation in *Soviet Mathematics*, *Doklady*)

[7] Ismagilov, R.S. (1974) Widths of Sets in Normed Linear Spaces and Approximation of Functions by Trigonometric Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **29**, 161-178. (English Translation in *Russian Mathematical Surveys*, **29**, 169-186.) https://doi.org/10.1070/RM1974v029n03ABEH001287

[8] Pinkus, A. (1985) N-Widths in Approximation Theory. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1

[9] 王桐心. 无穷维恒等算子的 Kolmogorov n-宽度[J]. 应用数学进展, 2018, 7(5): 519-524.

[10] Maiorov, V.E. (1994) Kolmogorov's (n,δ)-Widths of the Spaces of the Smooth Functions. *Russian Academy of Sciences*. *Sbornik Mathematics*, **79**, 265-279. https://doi.org/10.1070/SM1994v079n02ABEH003499