Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(5), 1007-1015**
Published Online May 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.85115

Hans汉斯

The Global Exponential Stability of the Positive Periodic Solution for a Class of Nicholson's Blowflies Model with Continuously Distributed Delays

Qiufeng Chen, Jianli Li

School of Mathematics and Statistics, Hunan Normal University, Changsha Hunan
Email: 995460263@qq.com, ljianli@sina.com

Received: May 9th, 2019; accepted: May 24th, 2019; published: May 31st, 2019

Abstract

In this paper, we study the existence of positive periodic solution for Nicholson's blowflies system with continuously distributed delay. Under appropriate conditions, we obtain that the system has unique positive periodic solution and its global exponential stability.

Keywords

Nicholson's Blowflies System, Continuous Distributed Delays, Periodic Solution, Global Exponential Stability

一类具有连续分布时滞的Nicholson飞蝇模型正周期解的全局指数稳定性

陈秋凤，李建利

湖南师范大学，数学与统计学院，湖南 长沙
Email: 995460263@qq.com, ljianli@sina.com

收稿日期：2019年5月9日；录用日期：2019年5月24日；发布日期：2019年5月31日

摘 要

该文研究了具有连续分布时滞的Nicholson飞蝇模型，证明了具有连续分布时滞的Nicholson飞蝇模型存

文章引用: 陈秋凤, 李建利. 一类具有连续分布时滞的 Nicholson 飞蝇模型正周期解的全局指数稳定性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(5): 1007-1015. DOI: 10.12677/aam.2019.85115

在唯一的正周期解以及该正周期解的全局指数稳定性，我们改变了相关文献的模型，改进了相关文献的条件。

关键词

Nicholson飞蝇模型，连续分布时滞，周期解，全局指数稳定性

1. 引言

在生态动力系统中，环境对于人口模型的影响不可忽视，Nicholson 飞蝇模型便是考虑了环境因素的模型。在文献[1] [2] [3]中，作者研究了具有线性死亡密度的 Nicholson 飞蝇模型。在文献[4] [5] [6]中，作者考虑了具有非线性死亡密度的 Nicholson 飞蝇模型，为了更精确地描述其发展规律，文献[7] [8] [9]研究了具有离散时滞的 Nicholson 飞蝇模型。随着对此类模型更深入的研究，发现分布时滞更符合真实环境下的模型。在该文中，我们研究一类具有非线性死亡密度连续分布时滞的 Nicholson 飞蝇模型正周期解的全局指数稳定性。

在文献[7]中，作者考虑了离散时滞的 Nicholson 飞蝇模型的概周期解及其指数稳定性，在文献[4]中，作者研究了非线性死亡密度函数为 $a(t)-b(t)\mathrm{e}^{-x}$ 的 Nicholson 飞蝇模型。该文研究的是非线性死亡密度函数为 $\dfrac{a(t)x}{b(t)+x}$ 具有连续分布时滞的另一类 Nicholson 飞蝇模型。

该文考虑下面的具有连续分布时滞的 Nicholson 飞蝇模型

$$x'(t)=-\frac{a(t)x(t)}{b(t)+x(t)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathrm{d}s \tag{1.1}$$

其中 a，b，$\beta_j:R\to(0,+\infty)$ 是连续的 T-周期函数，$K_j(\cdot)>0$，$j=1,2,\cdots,m$ 为连续时滞核函数。

定义 $g^{+}=\sup\limits_{t\in R}g(t)$，$g^{-}=\inf\limits_{t\in R}g(t)$，$r=\max\limits_{1\le j\le m}\sigma_j^{+}>0$。

设 $C=C([-r,0],R)$ 是 $[-r,0]$ 上全体连续函数的集合组成的 Banach 空间，赋予上确界范数 $\|\cdot\|$，$C^{+}=C([-r,0],R^{+})$，定义 $x_t(\theta)=x(t+\theta)$，$\theta\in[-r,0]$，初始条件为 $x_{t_0}=\varphi$，$\varphi\in C^{+}$，$\varphi(0)>0$。

结合 $\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}$ 的单调性可知，存在 $k\in(0,1)$ 使得

$$\frac{1-k}{\mathrm{e}^{k}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{2}} \tag{1.2}$$

显然

$$\sup_{x\ge k}\left|\frac{1-x}{\mathrm{e}^{x}}\right|=\frac{1}{\mathrm{e}^{2}} \tag{1.3}$$

由 $x\mathrm{e}^{-x}$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，则存在唯一的 $\tilde{k}\in(1,+\infty)$，使得

$$k\mathrm{e}^{-k}=\tilde{k}\mathrm{e}^{-\tilde{k}} \tag{1.4}$$

引理 1.1：假设存在 $K\in\left(k,\tilde{k}\right]$ 使得

$$\begin{cases}\sup\limits_{t\in R}\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\beta_j(t)\left(b(t)+K\right)}{a(t)K\mathrm{e}}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s<1,\\ \inf\limits_{t\in R}\sum\limits_{j=1}^{m}\dfrac{\beta_j(t)b(t)}{a(t)\mathrm{e}^{k}}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s>1,\end{cases}\tag{1.5}$$

成立，则系统(1.1)的解 $x(t;t_0,\varphi)$ 在 $\left[t_0,\eta(\varphi)\right)$ 上是有界的，且系统(1.1)是持久的。

证明：令 $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，因为 $\varphi\in C^{+}$，由引理 5.2.1 [10]有 $x_t(t_0,\varphi)\in C^{+}$，$\forall t\in\left[t_0,\eta(\varphi)\right)$。由 $\dfrac{a(t)x(t)}{b(t)+x(t)}\le\dfrac{a(t)x(t)}{b(t)}$，对 $t\in R$，$x\ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}x'(t)&=-\frac{a(t)x(t)}{b(t)+x(t)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathrm{d}s\\&\ge-\frac{a(t)x(t)}{b(t)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathrm{d}s\end{aligned},$$

已知 $x(t_0)=\varphi(0)>0$，对上式积分有

$$\begin{aligned}x(t)&\ge\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a(s)}{b(s)}\mathrm{d}s}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{s}\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\mathrm{d}\tau}\sum_{j=1}^{m}\beta_j(s)\int_0^{\sigma_j(s)}K_j(\tau)x(s-\tau)\mathrm{e}^{-x(s-\tau)}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+x(t_0)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^{t}\frac{a(s)}{b(s)}\mathrm{d}s}\\&>0,\ \forall t\in\left[t_0,\eta(\varphi)\right)\end{aligned}。$$

定义

$$N(t)=\max\left\{\gamma:\gamma\le t,x(\gamma)=\max_{t_0-r\le s\le t}x(s)\right\},\quad\forall t\in\left[t_0,\eta(\varphi)\right)。$$

下证 $x(t)$ 在 $\left[t_0,\eta(\varphi)\right)$ 上是有界的。

否则，当 $t\to\eta(\varphi)$ 时，$N(t)\to\eta(\varphi)$，有 $\lim\limits_{t\to\eta(\varphi)}x(N(t))=+\infty$。则存在序列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=\eta(\varphi)$，$\lim\limits_{n\to+\infty}x(N(t_n))=+\infty$。

另一方面，$x(N(t))=\max\limits_{t_0-r\le s\le t}x(s)$，则 $x'(N(t))\ge 0,N(t)>t_0$。

因此，

$$0\le x'(N(t))=-\frac{a(N(t))x(N(t))}{b(N(t))+x(N(t))}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(N(t))\int_0^{\sigma_j(N(t))}K_j(s)x(N(t)-s)\mathrm{e}^{-x(N(t)-s)}\mathrm{d}s,$$

即

$$\frac{a(N(t))x(N(t))}{b(N(t))+x(N(t))}\le\sum_{j=1}^{m}\beta_j(N(t))\int_0^{\sigma_j(N(t))}K_j(s)x(N(t)-s)\mathrm{e}^{-x(N(t)-s)}\mathrm{d}s,$$

由 $\sup\limits_{x\ge 0}x\mathrm{e}^{-x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，有

$$\frac{a(N(t_n))x(N(t_n))}{b(N(t_n))+x(N(t_n))}\le\sum_{j=1}^{m}\beta_j(N(t_n))\int_0^{\sigma_j(N(t_n))}K_j(s)\mathrm{d}s\frac{1}{\mathrm{e}},$$

则

$$\begin{aligned}\frac{x(N(t_n))}{b(N(t_n))+x(N(t_n))}&\le\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(N(t_n))}{a(N(t_n))\mathrm{e}}\int_0^{\sigma_j(N(t_n))}K_j(s)\mathrm{d}s\\&\le\sup_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)}{a(t)\mathrm{e}}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s\end{aligned},$$

令 $n\to+\infty$，有

$$1\le\sup_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)}{a(t)\mathrm{e}}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s,$$

与(1.5)矛盾。因此，$x(t)$ 在 $[t_0,\eta(\varphi))$ 上是有界的。由[11]中的定理 2.3.1 知，$\eta(\varphi)=+\infty$。

下证 $x(t)<K$，$\forall t\in[t_1,+\infty)$，$t_1>t_0$。否则 $\exists t_2\in(t_1,+\infty)$，使得 $x(t_2)=K$，$x(t)<K$，$\forall t\in[t_1,t_2)$，

$$\begin{aligned}0\le x'(t_2)&=-\frac{a(t_2)x(t_2)}{b(t_2)+x(t_2)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t_2)\int_0^{\sigma_j(t_2)}K_j(s)x(t_2-s)\mathrm{e}^{-x(t_2-s)}\mathrm{d}s\\&\le-\frac{a(t_2)K}{b(t_2)+K}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t_2)\int_0^{\sigma_j(t_2)}K_j(s)\mathrm{d}s\frac{1}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

所以，有

$$1\le\sup_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t_2)(b(t_2)+K)}{a(t_2)K\mathrm{e}}\int_0^{\sigma_j(t_2)}K_j(s)\mathrm{d}s\le\sup_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)(b(t)+K)}{a(t)K\mathrm{e}}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s,$$

这与(1.5)矛盾。所以有 $\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)\le K$。

下证 $c=\liminf\limits_{t\to+\infty}x(t)>k$，首先证明 $c>0$，否则 $c=0$。

定义

$$h(t)=\max\left\{\gamma:\gamma\le t,x(\gamma)=\min_{t_0\le s\le t}x(s)\right\}$$

则有

$$\lim_{t\to+\infty}h(t)=+\infty,\quad\lim_{t\to+\infty}x(h(t))=0\tag{1.6}$$

由 $h(t)$ 的定义，有 $x(h(t))=\min\limits_{t_0\le s\le t}x(s)$，$x'(h(t))\le0$，$h(t)>t_0$。因此，

$$\begin{aligned}0\ge x'(h(t))&=-\frac{a(h(t))x(h(t))}{b(h(t))+x(h(t))}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(h(t))\int_0^{\sigma_j(h(t))}K_j(s)x(h(t)-s)\mathrm{e}^{-x(h(t)-s)}\mathrm{d}s\\&\ge-\frac{a(h(t))x(h(t))}{b(h(t))}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(h(t))\int_0^{\sigma_j(h(t))}K_j(s)x(h(t)-s)\mathrm{e}^{-x(h(t)-s)}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由第一积分中值定理，有

$$\begin{aligned}\frac{a(h(t))x(h(t))}{b(h(t))+x(h(t))}&\ge\sum_{j=1}^{m}\beta_j(h(t))\int_0^{\sigma_j(h(t))}K_j(s)x(h(t)-s)\mathrm{e}^{-x(h(t)-s)}\mathrm{d}s\\&=\sum_{j=1}^{m}\beta_j(h(t))\int_0^{\sigma_j(h(t))}K_j(s)\mathrm{d}s\,x(h(t)-\tau_j(h(t)))\mathrm{e}^{-x(h(t)-\tau_j(h(t)))}\end{aligned}$$

结合(1.6)有 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(h(t)-\tau_j(h(t)))=0$，其中，$\tau_j(t)\in[0,\sigma_j(h(t))]$，$j=1,2,\cdots,m$。

由系数函数的连续性及周期性，选取序列 $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty}$，使得

$$\begin{cases} t_n \to +\infty, x(h(t_n)) \to 0, a(h(t_n)) \to a^* \\ b(h(t_n)) \to b^*, \beta_j(h(t_n)) \to \beta_j^*, \\ \sigma_j(h(t_n)) \to \sigma_j^*, \tau_j(h(t_n)) \to \tau_j^* \end{cases}$$

因此，

$$\begin{aligned} \frac{a(h(t_n))}{b(h(t_n))+x(h(t_n))} &\ge \sum_{j=1}^{m}\beta_j(h(t_n))\int_0^{\sigma_j(h(t_n))}K_j(s)\mathrm{d}s\frac{x(h(t_n)-\tau_j(h(t_n)))}{x(h(t_n))}\mathrm{e}^{-x(h(t_n)-\tau_j(h(t_n)))} \\ &\ge \sum_{j=1}^{m}\beta_j(h(t))\int_0^{\sigma_j(h(t))}K_j(s)\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-x(h(t_n)-\tau_j(h(t_n)))} \end{aligned}$$

可得，

$$1 \ge \sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(h(t_n))(b(h(t_n))+x(h(t_n)))}{a(h(t_n))}\int_0^{\sigma_j(h(t_n))}K_j(s)\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-x(h(t_n)-\tau_j(h(t_n)))}$$

令 $n \to +\infty$，有

$$\begin{aligned} 1 &\ge \lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(h(t_n))(b(h(t_n))+x(h(t_n)))}{a(h(t_n))}\int_0^{\sigma_j(h(t_n))}K_j(s)\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-x(h(t_n)-\tau_j(h(t_n)))} \\ &\ge \inf_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)b(t)}{a(t)}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s \end{aligned},$$

这与(1.5)矛盾，因此，$c>0$。

下证 $c>k$，否则，$c \le k$。

由波动引理([10] Lemma A.1.)可知，存在数列 $\{t_i\}_{i\ge1}$，使得 $t_i \to +\infty$，$x(t_i) \to \liminf_{t\to+\infty} x(t)$，$x'(t_i) \to 0$，当 $i \to +\infty$ 时。

因为 $\{x_{t_i}\}$ 是一致有界且等度连续的，由 Ascoli-Arzela 定理可知，存在 $\{t_i\}_{i\ge1}$ 的子列，不妨仍记为它本身，使得 $x_{t_i} \to \varphi^*$，其中 $\varphi^* \in C^+$。此外，$\varphi^*(0)=c \le \varphi^*(\theta) \le K$，$\theta \in [-r,0)$。

由第一积分中值定理，有

$$x'(t) = -\frac{a(t)x(t)}{b(t)+x(t)} + \sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s x(t-\tau_j(t))\mathrm{e}^{-x(t-\tau_j(t))},$$

其中，$\tau_j(t) \in [0,\sigma_j(t))$，$j=1,2,\cdots,m$。

由上可推导出，$c \le \varphi^*(-\tau_j^*) \le K$，$j=1,2,\cdots,m$。

$$x'(t_i) = -\frac{a(t_i)x(t_i)}{b(t_i)+x(t_i)} + \sum_{j=1}^{m}\beta_j(t_i)\int_0^{\sigma_j(t_i)}K_j(s)\mathrm{d}s x(t_i-\tau_j(t_i))\mathrm{e}^{-x(t_i-\tau_j(t_i))}$$

当 $t_i \to +\infty$ 时，有

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{a^*c}{b^*+c} + \sum_{j=1}^{m}\beta_j^*\int_0^{\sigma_j^*}K_j(s)\mathrm{d}s\varphi^*(-\tau_j^*)\mathrm{e}^{-\varphi^*(-\tau_j^*)} \\ &\ge -\frac{a^*c}{b^*} + \sum_{j=1}^{m}\beta_j^*\int_0^{\sigma_j^*}K_j(s)\mathrm{d}s c\mathrm{e}^{-c} \end{aligned}$$

与(1.5)矛盾。所以 $c=\liminf_{t\to+\infty} x(t)>k$ 。综上，引理 1.1 得证。

引理 1.2：假设引理 1.1 的条件成立，且

$$\sup_{t\in R}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)\left(b(t)+K\right)^2}{a(t)b(t)\mathrm{e}^2}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\right\}<1 \tag{1.7}$$

设 $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$ ， $x^*(t)=x(t;t_0,\varphi^*)$ ，则存在正常数 λ ， t^* 使得

$$\left|x(t;t_0,\varphi)-x(t;t_0,\varphi^*)\right|\le L_{\varphi,\varphi^*}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad t\ge t^*,$$

其中，

$$L_{\varphi,\varphi^*}=\mathrm{e}^{\lambda t^*}\left(\max_{t\in\left[t_0-r,t^*\right]}\left|x(t)-x^*(t)\right|+1\right)。$$

证明：令 $y(t)=x(t)-x^*(t)$ ，其中 $t\in[t_0-r,+\infty)$ ，则有

$$y'(t)=-\left[\frac{a(t)x(t)}{b(t)+x(t)}-\frac{a(t)x^*(t)}{b(t)+x^*(t)}\right]$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\left[x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}-x^*(t-s)\mathrm{e}^{-x^*(t-s)}\right]\mathrm{d}s$$

由引理 1.1 可知，存在 $t_{\varphi,\varphi^*}>t_0$ ， $k\le x(t),x^*(t)\le K$ ， $\forall t\in\left[t_{\varphi,\varphi^*}-r,+\infty\right)$ 。

考虑 Lyapunov 函数 $V(t)=\left|y(t)\right|\mathrm{e}^{\lambda t}$ 。

则

$$D^-\left(V(t)\right)=\lambda\left|y(t)\right|\mathrm{e}^{\lambda t}-\mathrm{e}^{\lambda t}\frac{a(t)x(t)}{\left(b(t)+x(t)\right)\left(b(t)+x^*(t)\right)}\left|x(t)-x^*(t)\right|$$
$$+\operatorname{sgn}\left(x(t)-x^*(t)\right)\mathrm{e}^{\lambda t}\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\left[x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}-x^*(t-s)\mathrm{e}^{-x^*(t-s)}\right]\mathrm{d}s$$

断言 $V(t)=\left|y(t)\right|\mathrm{e}^{\lambda t}<L_{\varphi,\varphi^*}$ 。

否则，存在 t^* ，使得 $V(t^*)=L_{\varphi,\varphi^*}$ ， $V(t)<L_{\varphi,\varphi^*}$ ， $t\in\left[t_0-r,t^*\right)$ ，由条件知，存在 $\lambda\in(0,1]$ ， $0<\mu<1$ ，且 $\lambda<\dfrac{a(t)b(t)}{\left(b(t)+K\right)^2}$ ， 使得

$$\sup_{t\in R}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)\left(b(t)+K\right)^2}{\left(a(t)b(t)-\lambda\left(b(t)+K\right)^2\right)\mathrm{e}^2}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\right\}<\mu<1$$

则

$$0\le D^-\left(V(t^*)\right)=\lambda V(t^*)-\frac{a(t^*)b(t^*)}{\left(b(t^*)+x(t^*)\right)\left(b(t^*)+x^*(t^*)\right)}V(t^*)$$
$$+\operatorname{sgn}\left(x(t^*)-x^*(t^*)\right)\mathrm{e}^{\lambda t^*}\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t^*)\int_0^{\sigma_j(t^*)}K_j(s)\left[x(t^*-s)\mathrm{e}^{-x(t^*-s)}-x^*(t^*-s)\mathrm{e}^{-x^*(t^*-s)}\right]\mathrm{d}s$$

所以，

$$\left(\frac{a(t^*)b(t^*)}{\left(b(t^*)+x(t^*)\right)\left(b(t^*)+x^*(t^*)\right)}-\lambda\right)L_{\varphi,\varphi^*}$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m}\beta_j(t^*)\int_0^{\sigma_j(t^*)}K_j(s)\mathrm{e}^{\lambda s}V(t^*-s)\mathrm{d}s\frac{1}{\mathrm{e}^2}\ 。$$
$$\leq \sum_{j=1}^{m}\beta_j(t^*)\int_0^{\sigma_j(t^*)}K_j(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s\frac{1}{\mathrm{e}^2}L_{\varphi,\varphi^*}$$

因此，有

$$1\leq \sup_{t\in R}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)\left(b(t)+K\right)^2}{\left(a(t)b(t)-\lambda\left(b(t)+K\right)^2\right)\mathrm{e}^2}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{e}^{s}\mathrm{d}s\right\}$$

这与(1.7)矛盾。所以，$|y(t)|<L_{\varphi,\varphi^*}\mathrm{e}^{-\lambda t}$，$t>t^*$。

2. 周期解及全局指数稳定性

定理 2.1：在引理 1.2 的条件假设下，系统(1.1)存在唯一的正 T-周期解，且该正周期解是全局指数稳定的。

证明：令 $x(t)=x(t;t_0,\varphi)$，由引理 1.1 可知，存在 $t_\varphi>t_0$，使得 $k\leq x(t;t_0,\varphi)\leq K$，$\forall t\geq t_\varphi$。由(1.1)的系数和时滞的周期性，对任意的自然数 q，有

$$\left[x\left(t+(q+1)T\right)\right]'=\sum_{j=1}^{m}\beta_j(t)\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)x\left(t+(q+1)T-s\right)\mathrm{e}^{-x\left(t+(q+1)T-s\right)}\mathrm{d}s$$
$$-\frac{a(t)x\left(t+(q+1)T\right)}{b(t)+x\left(t+(q+1)T\right)},\quad t+(q+1)T\in[t_0,+\infty)$$

这表明 $x(t+(q+1)T)$ 在 $t\geq t_0-r-(q+1)T$ 时为系统(1.1)的解。$x(t+T)\ (t\in[t_0-r,+\infty))$ 是系统(1.1)在初值 $\psi(s)=x(s+t_0+T)$，$s\in[-r,0]$ 下的解。

由引理 1.2 知，对任意的非负整数 h，存在正常数 $Q>t_0$，使得当 $t+qT>Q$ 时，有

$$\left|x\left(t+(q+1)T;t_0,\varphi\right)-x\left(t+qT;t_0,\varphi\right)\right|$$
$$=\left|x\left(t+qT;t_0,\psi\right)-x\left(t+qT;t_0,\varphi\right)\right|$$
$$\leq L_{\varphi,\psi}\mathrm{e}^{-\lambda(t+qT)}$$

其中

$$L_{\varphi,\psi}=\mathrm{e}^{\lambda Q}\left(\max_{t\in[t_0-r,Q]}\left|x(t)-x^*(t)\right|+1\right)。$$

令 $[a,b]\subset R$ 是 R 中的任意区间，选择非负整数 p_0，使得当 $t\in[a,b]$ 时，有 $t+p_0T\geq Q$，则对 $\forall t\in[a,b]$ 和 $p>p_0$，有

$$x(t+pT)=x(t+p_0T)+\sum_{q=p_0}^{p-1}\left[x\left(t+(q+1)T\right)-x(t+qT)\right]。$$

由 $[a,b]$ 的任意性可知，$\{x(t+pT)\}_p$ 在 R 上内闭一致收敛到 $x^*(t)$，且 $k\leq x^*(t)\leq K$，$\forall t\in R$。取极限有

$$\begin{aligned} x^*(t+T) &= \lim_{p\to+\infty} x\big((t+T)+pT\big) \\ &= \lim_{p+1\to+\infty} x\big(t+(p+1)T\big) \\ &= x^*(t) \end{aligned}$$

所以，$x^*(t)$ 是 T-周期解。

$$\begin{aligned} &x(t+pT)-x(t_0+pT) \\ &= \int_{t_0}^{t}\left[-\frac{a(s)x(s+pT)}{b(s)+x(s+pT)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(s)\int_0^{\sigma_j(s)}K_j(u)x(s+pT-u)\mathrm{e}^{-x(s+pT-u)}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

令 $p\to+\infty$，有

$$\begin{aligned} &x^*(t)-x^*(t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t}\left[-\frac{a(s)x^*(s)}{b(s)+x^*(s)}+\sum_{j=1}^{m}\beta_j(s)\int_0^{\sigma_j(s)}K_j(u)x^*(s-u)\mathrm{e}^{-x^*(s-u)}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

所以，$x^*(t)$ 是系统(1.1)在 $[t_0-r,+\infty)$ 上的解。类似于引理 2.1 的证明，可证正周期解 $x^*(t)$ 是全局指数稳定的。

3. 举例应用

例 3.1：考虑下面的系统

$$\begin{aligned} x'(t) = &-\frac{\left(16+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)x(t)}{12+\frac{1}{100}\sin^2(t)+x(t)}+\frac{80+\cos^2(t)}{100}\int_0^1 \mathrm{e}^s x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathrm{d}s \\ &+\frac{80+\cos^2(2t)}{100}\int_0^1 \mathrm{e}^s x(t-s)\mathrm{e}^{-x(t-s)}\mathrm{d}s \end{aligned}$$

由上式可知，

$$a(t)=16+\frac{1}{100}\sin^2(t)，\quad b(t)=12+\frac{1}{100}\sin^2(t)，\quad \beta_1(t)=\frac{80+\cos^2(t)}{100}，\quad \beta_2(t)=\frac{80+\cos^2(2t)}{100}，$$
$$\sigma_1(t)=\sigma_2(t)=1，\quad K_1(s)=K_2(s)=e^s。$$

则 $r=1$，$a^+=16.01$，$a^-=16$，$b^+=12.01$，$b^-=12$，$\beta_1^+=\beta_2^+=\frac{4}{5}$，$\beta_1^-=\beta_2^-=\frac{81}{100}$。

取 $K=0.9$，$\lambda=0.4$，$\mu=0.94$，由计算可知，$k\approx0.72154$，$\tilde{k}\approx1.34228$。

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)\big(b(t)+K\big)}{a(t)Ke}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s \\ &=\sup_{t\in R}\left\{\frac{\frac{80+\cos^2(t)}{100}\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)+\frac{9}{10}\right)}{16+\frac{1}{100}\sin^2(t)\frac{9}{10}\mathrm{e}}\int_0^1\mathrm{e}^s\mathrm{d}s+\frac{\frac{80+\cos^2(2t)}{100}\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)+\frac{9}{10}\right)}{16+\frac{1}{100}\sin^2(t)\frac{9}{10}\mathrm{e}}\int_0^1\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\right\} \\ &<0.54<1 \end{aligned}$$

$$\inf_{t\in R}\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)b(t)}{a(t)\mathrm{e}^k}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{d}s$$

$$=\inf_{t\in R}\left\{\frac{\frac{80+\cos^2(t)}{100}\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)}{\left(16+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)\mathrm{e}^k}\int_0^1\mathrm{e}^s\mathrm{d}s+\frac{\frac{80+\cos^2(2t)}{100}\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)}{\left(16+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)\mathrm{e}^k}\int_0^1\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\right\}$$

$$>1.07>1$$

$$\sup_{t\in R}\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\beta_j(t)\left(b(t)+K\right)^2}{a(t)b(t)\mathrm{e}^2}\int_0^{\sigma_j(t)}K_j(s)\mathrm{e}^s\mathrm{d}s\right\}$$

$$=\sup_{t\in R}\left\{\frac{\left(\frac{80+\cos^2(t)}{100}+\frac{80+\cos^2(2t)}{100}\right)\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)+\frac{9}{10}\right)^2}{\left(\left(16+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)\right)-\frac{2}{5}\left(12+\frac{1}{100}\sin^2(t)+\frac{9}{10}\right)^2\right)\mathrm{e}^2}\int_0^1\mathrm{e}^{2s}\mathrm{d}s\right\}$$

$$<0.94<1$$

综上，满足定理 2.1 的全部条件，所以上述系统存在唯一的全局指数稳定的正 2π-周期解。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 11571088，No. 11471109，No.11526111)，浙江省自然科学项目(No. LY14A010024)，湖南省教育厅项目(No. 14A098)。

参考文献

[1] Wang, L.J. (2013) Almost Periodic Solution for Nicholson's Blowflies Model with Patch Structure and Linear Harvesting Terms. *Applied Mathematical Modeling*, **37**, 2153-2165. https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.05.009

[2] (2012) Positive Almost Periodic Solution for a Class of Nicholson's Blowflies Model with Linear Harvesting Term. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **13**, 686-693. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.08.009

[3] Yao, Z.J. (2015) Almost Periodic Solution of Nicholson's Blowflies Model with Linear Harvesting Term and Impulsive Effects. *World Scientific*, **3**, 1-18. https://doi.org/10.19029/mca-2015-001

[4] 刘炳文, 田雪梅, 杨学山, 黄创霞. 具有非线性死亡密度和连续分布时滞的 Nicholson 飞蝇模型的周期解[J]. 应用数学学报, 2018, 41(1): 98-109.

[5] Tang, Y. and Xie, S.L. (2018) Global Attractivity of Asymptotically Almost Periodic Nicholson's Blowflies Model with a Nonlinear Density-Dependent Mortality Term. *World Scientific*, **6**, 1-15.

[6] Liu, B.W. (2014) Almost Periodic Solutions for a Delayed Nicholson's Blowflies Model with a Noninear Density-Dependent Mortality Term. *Advances in Difference Equations*, **2014**, 72. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2014-72

[7] Liu, P.Y., Zhang, L., Liu, S.T. and Zheng, L.F. (2017) Global Exponential Stability of Almost Periodic Solutions for Nicholson's Blowflies System with Noninear Density-Dependent Mortality Terms and Patch Structure. *Mathematical Modelling and Analysis*, **22**, 484-502. https://doi.org/10.3846/13926292.2017.1329171

[8] Yao, L.G. (2018) Global Attractivity of a Delayed Nicholson-Type System Involving Nonlinear Density-Dependent Mortality Terms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 2379-2391. https://doi.org/10.1002/mma.4747

[9] Chen, W. (2012) Permanence for Nicholson's-Type Delay Systems with Patch Structure and Nonlinear Density-Dependent Mortality Terms. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, **2012**, 1-14. https://doi.org/10.14232/ejqtde.2012.1.73

[10] Smith, H.L. (2011) An Introduction to Delay Differential Equations to the Life Sciences. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7646-8_1

[11] Hale, J.K. and Verduyn Lunel, S.M. (1993) Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：aam@hanspub.org