Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2019, 8(7), 1224-1227**
Published Online July 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.87141

Hans汉斯

Strong Edge Colorings on Bipartite Graphs with Degree Sum of Adjacent Vertices at Most 8

Xunxiang Yan

School of Mathematics and Statistics, Shandong Normal University, Jinan Shandong
Email: yxx1515193176@163.com

Received: Jun. 28th, 2019; accepted: Jul. 16th, 2019; published: Jul. 23rd, 2019

Abstract

A bipartite graph G is a graph in which $V(G)$ can be partitioned into two disjoint subsets, so that the vertices in the same subset are not adjacent. A strong edge coloring of graph G is an edge coloring in such a way that any two edges on a path of length at most three receive distinct colors. We prove that each bipartite graph with degree sum of each pair of adjacent vertices at most 8 has a strong edge coloring with at most 22 colors.

Keywords

Bipartite Graph, Strong Edge Coloring, Degree Sum

相邻顶点度和至多为8的二部图的强边染色

闫训祥

山东师范大学数学与统计学院，山东 济南
Email: yxx1515193176@163.com

收稿日期：2019年6月28日；录用日期：2019年7月16日；发布日期：2019年7月23日

摘 要

二部图G指顶点集$V(G)$可以划分成两个不相交的子集，使得在同一个子集内的顶点不相邻的图。图G的强边染色是在正常边染色的基础上，要求长至多为3的路上的边染不同的颜色。我们证明了每一对相邻顶点度和至多为8的二部图有一个强边染色至多22种颜色。

文章引用: 闫训祥. 相邻顶点度和至多为 8 的二部图的强边染色[J]. 应用数学进展, 2019, 8(7): 1224-1227.
DOI: 10.12677/aam.2019.87141

关键词

二部图，强边染色，度和

1. 引言

本文考虑的都是简单无向图。对于图 G，把它的顶点集、边集、最小度和最大度分别记为 $V(G)$，$E(G)$，$\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$，用 $d(v)$ 和 $N(v)$ 表示顶点 v 的度数和邻域，且 $d(v)=|N(v)|$。如果顶点 v 的度数等于 k (至少是 k 或至多是 k)，则称 v 是 k-点(k^+ - 点或 k^- - 点)。顶点 v 的一个 k-邻点指的是 $N(v)$ 中度数为 k 的顶点。如果两个顶点与同一条边关联，则称两个顶点是相邻的。对于每条边 $uv\in E(G)$，$d(v)+d(u)$ 表示相邻顶点 v 和 u 的度数之和，简称度和。如果两条边有一个公共顶点，则称这两条边是距离为 1 的。如果它们不是距离为 1 的且存在一条公共边，则称这两条边是距离为 2 的。$N_2(e)$ 表示与边 e 距离至多为 2 的边集。

二部图指顶点集可以划分成两个不相交的子集，使得在同一个子集内的顶点不相邻的图。图 G 的强边染色是在正常边染色的基础上，要求长至多为 3 的路上的边染不同的颜色。强边染色所用颜色的最小整数称为图 G 的强边色数，记为 $\chi_s'(G)$。1985 年，Erdös, Nesetril [1]提出了强边染色猜想：

猜想 1 (Erdös, Nesetril, 1985)。设图 G 的最大度为 Δ，则

1) 若 Δ 为偶数，则 $\chi_s'(G)\le 5/4\Delta^2$；

2) 若 Δ 为奇数，则 $\chi_s'(G)\le 1/4(5\Delta^2-2\Delta+1)$。

当 $\Delta\le 2$，猜想显然成立。Andersen [2]和 Horák [3]证明了当 $\Delta\le 3$ 时猜想成立。

2018 年 Huang 等人[4]给出了 $\Delta=4$ 时的结果。

定理 1 (Huang, Santana, Yu, 2018)。若图 G 的最大度为 $\Delta=4$，则 $\chi_s'(G)\le 21$。

Bruhn 和 Joos [5]证明了当 Δ 充分大时，$\chi_s'(G)\le 1.93\Delta^2$。

在本文中，我们研究了二部图的强边染色。1993 年 Brualdi 和 Massey [6]提出了关于二部图的强边染色猜想：

猜想 2 (Brualdi, Massey, 1993)。图 G 是一个 (d_A,d_B) – 二部图，则 $\chi_s'(G)\le d_Ad_B$。

(d_A,d_B) – 二部图是两部分顶点集 A 和 B 满足 $\Delta(A)\le d_A$ 和 $\Delta(B)\le d_B$ 的二部图。2008 年 Nakprasit [7]证明了：如果图 G 是一个 4^- - 二部图，则 $\chi_s'(G)\le 2\Delta$。2017 年 Huang 等人[8]直接使用分解的方法证明了 $(3,\Delta)$ – 二部图的结果。

定理 2 (Huang, Yu, Zhou, 2017)。如果图 G 是一个 $(3,\Delta)$ – 二部图，则 $\chi_s'(G)\le 3\Delta$。

另外，二部图的强边染色在度和条件限制下得到一些相关结果。2013 年 Luzar 等人[9]证明了：若图 G 是一个二部图，对每条边 $uv\in E(G)$，$d(v)+d(u)\le 5$，则 $\chi_s'(G)\le 6$。后来，Chen 等人[10]证明了：(1) 对于图 G，如果每条边 $uv\in E(G)$，都有 $d(v)+d(u)\le 6$，则 $\chi_s'(G)\le 10$。(2)对于图 G，如果每条边 $uv\in E(G)$，都有 $d(v)+d(u)\le 7$，则 $\chi_s'(G)\le 15$。

2. 定理及其证明

为了方便，令 $L=\{1,2,\cdots,22\}$ 是一个颜色集，用 σ 表示图G的用L中22色的一个强边色数，$C_\sigma(e)$ 表

示在染色 σ 下分配给 $N_2(e)$ 的颜色集， $A_\sigma(e)=L\setminus C_\sigma(e)$ 表示在染色 σ 下边 e 可利用的颜色集。$(|C_\sigma(e_1)|,|C_\sigma(e_2)|)$ 表示至多分配给 $N_2(e_1),N_2(e_2)$ 的颜色数。$(|A_\sigma(e_1)|,|A_\sigma(e_2)|)$ 表示边 e_1,e_2 至少可利用的颜色数。下面是本文的结果。

定理3 图G是一个二部图，如果每条边 $uv\in E(G)$，都有 $d(v)+d(u)\le 8$，则 $\chi_s'(G)\le 22$。

证明：用反证法。设二部图G是一个边数极小的反例，则对每条边 $uv\in E(G)$，都有 $d(v)+d(u)\le 8$，并且 $\chi_s'(G)>22$。显然图G是连通的且对图G的任何真子图 G' 是22色强边可染的，接下来我们讨论图G的结构。

断言1：G不含1度点。

否则，假设存在顶点v满足 $d(v)=1$， $N(v)=\{u\}$，满足 $d(u)\le 7$。由图G的极小性知， $G'=G-v$ 有一个22色强边染色 σ。现在 $|C_\sigma(uv)|\le 12$， 因此 $|A_\sigma(uv)|\ge 10$，所以我们可以根据贪婪染色把边uv染好，扩展得到图G的一个22色强边染色，矛盾。

断言2：G不含2度点。

否则，假设存在顶点v满足 $d(v)=2$，$N(v)=\{u,w\}$，满足 $d(u)\le 6$ 和 $d(w)\le 6$。由图G的极小性知，$G'=G-v$ 有一个22色强边染色 σ。现在 $(|C_\sigma(uv)|,|C_\sigma(wv)|)\le(17,17)$，因此 $(|A_\sigma(uv)|,|A_\sigma(wv)|)\ge(5,5)$。所以我们可以根据贪婪染色依次把边uv和wv染好，扩展得到图G的一个22色强边染色，矛盾。

由以上两个断言可知，$\delta(G)\ge 3$。由相邻两点度和不超过8，可知G不含6，7度点。

断言3：G不含邻接 4^- - 点的3点。

否则，假设存在顶点v满足 $d(v)=3$， $N(v)=\{v_1,v_2,v_3\}$， 且 v_1 是一个 4^- - 点。由图G的极小性知，$G'=G-v$ 有一个22色强边染色 σ。容易计算得 $(|C_\sigma(vv_1)|,|C_\sigma(vv_2)|,|C_\sigma(vv_3)|)\le(20,19,19)$， 因此 $(|A_\sigma(vv_1)|,|A_\sigma(vv_2)|,|A_\sigma(vv_3)|)\ge(2,3,3)$。所以我们根据贪婪染色依次把边 vv_1、 vv_2 和 vv_3 染好，扩展得到图G的一个22色强边染色，矛盾。

由以上三个断言可知，极小反例如果有3度点，它们的邻点都是5点。由相邻两点度和不超过8，和断言1，2知道，如果有5点，它们的邻点都是3点。又因图G是连通的，这种情况图G只能是两部分最大度分别是5和3的二部图，由定理2，15种颜色足够给出强边染色，矛盾。

综上可知，极小反例只有4度点，即图G是4-正则的二部图，由定理1，21种颜色可以给出它的一个强边染色，矛盾。

因此，极小反例图G不存在，从而定理3是成立的。

致 谢

感谢导师张霞副教授给我介绍强边染色的相关问题，并对本文书写进行了全面的修改。最后，向各位尊敬的评审专家致以诚挚的感谢，谢谢你们对本论文做出的评审以及提出的宝贵意见。

参考文献

[1] Erdös, P. (1988) Problems and Results in Combinatorial Analysis and Graph Theory. *Annals of Discrete Mathematics*, **38**, 81-92. https://doi.org/10.1016/S0167-5060(08)70773-8

[2] Andersen, I.D. (1992) The Strong Chromatic Index of a Cubic Graph Is at Most 10. *Discrete Mathematics*, **108**, 231-252. https://doi.org/10.1016/0012-365X(92)90678-9

[3] Horák, P., Qing, H. and Trotter, W.T. (1993) Induced Matchings in Cubic Graphs. *Journal of Graph Theory*, **17**, 151-160. https://doi.org/10.1002/jgt.3190170204

[4] Huang, M., Santana, M. and Yu, G. (2018) Strong Chromatic Index of Graphs with Maximum Degree Four. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **25**, Article No. P3.31.

[5] Bruhn, H. and Joos, F. (2015) A Stronger Bound for the Strong Chromatic Index. *Electronic Notes in Discrete Mathe-*

matics, **49**, 277-284. https://doi.org/10.1016/j.endm.2015.06.038

[6] Brualdi, A.T. and Quinn Massey, J.J. (1993) Incidence and Strong Edge-Colorings of Graphs. *Discrete Mathematics*, **122**, 51-58. https://doi.org/10.1016/0012-365X(93)90286-3

[7] Nakprasit, K. (2008) A Note on the Strong Chromatic Index of Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **308**, 3726-3728. https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.07.034

[8] Huang, M., Yu, G. and Zhou, X. (2017) The Strong Chromatic Index of (3, Δ)-Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, **340**, 1143-1149. https://doi.org/10.1016/j.disc.2016.10.016

[9] Lužar, B., Mockovčiaková, M., Soták, R. and Škrekovski, R. (2013) Strong Edge Coloring of Subcubic Bipartite Graphs. ArXiv: 1311.6668v2. https://arxiv.org/abs/1311.6668

[10] Chen, L., Huang, M., Yu, G. and Zhou, X. (2018) The Strong Edge-Coloring for Graph with Small Edge Weight.