Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(3), 366-371
Published Online March 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.93044

A New Double-Auxiliary Differential Equation Expansion Method for Exact Solutions of Dispersive Water Wave Equations

Ping Zhang[1], Yuhuai Sun[2], Feng Luo[3]

[1]The Engineering & Technical College of Chengdu University of Technology, Leshan Sichuan
[2]Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
[3]Leshan Vocational & Technical College, Leshan Sichuan
Email: zhangping5633@sina.com

Received: Feb. 29th, 2020; accepted: Mar. 13th, 2020; published: Mar. 20th, 2020

Abstract

Based on the existing auxiliary differential equations and G'/G-expansion method, this paper constructs a new double auxiliary differential equation expansion method, and uses the double auxiliary differential equation expansion method to solve new exact solutions of dispersive water wave equations: hyperbolic function formal solution, rational function formal solution, trigonometric function formal solution, hyperbolic function and trigonometric function mixed form solution, trigonometric function and rational function mixed form solution. The method can also be applied to solve other nonlinear equations.

Keywords

Double Auxiliary Equation Expansion Method, Homogeneous Equilibrium Method, Dispersive Water Wave Equation, Exact Solution

新的双辅助微分方程展开法求色散水波方程的精确解

张 萍[1]，孙峪怀[2]，罗 缝[3]

[1]成都理工大学工程技术学院，四川 乐山
[2]四川师范大学，四川 成都
[3]乐山职业技术学院，四川 乐山

文章引用: 张萍, 孙峪怀, 罗缝. 新的双辅助微分方程展开法求色散水波方程的精确解[J]. 应用数学进展, 2020, 9(3): 366-371. DOI: 10.12677/aam.2020.93044

Email: zhangping5633@sina.com

收稿日期：2020年2月29日；录用日期：2020年3月13日；发布日期：2020年3月20日

摘　要

本文在已有的辅助微分方程和G'/G-展开法的基础上构造新的双辅助微分方程展开法，并利用双辅助微分方程展开法求解了色散水波方程的新的精确解：双曲函数形式解、有理函数形式解、三角函数形式解、双曲函数与三角函数混合形式解、三角函数与有理函数混合形式解，该方法也可应用于求解其他非线性方程。

关键词

双辅助方程展开法，齐次平衡法，色散水波方程，精确解

1. 引言

非线性偏微分方程描述了众多科学及工程问题中的非线性现象，而对于这些非线性现象中各种因子和各种物理量之间的相互关系的反映都依赖于非线性偏微分方程的精确解。近年来，已经出现了许多求解非线性偏微分方程精确解的直接方法，如 tanh 方法[1]、推广的 tanh 方法[2]、推广的 Riccati 方程法[3]、辅助方程法[4]、G'/G -展开法[5] [6]等，每一种方法都有它的局限性。因此，为了满足各个学科在描述非线性偏微分方程中的需要，在已有的方法基础上改进或者发现并使用新的方法去构造各类非线性偏微分方程的精确解是非常需要的。

2. 双辅助方程展开法

下列非线性偏微分方程组

$$\begin{cases} P\left(u,v,u_t,v_t,u_x,v_x,\cdots\right)=0 \\ H\left(u,v,u_t,v_t,u_x,v_x,\cdots\right)=0 \end{cases} \tag{1}$$

假设方程(1)有如下形式的解：

$$\begin{cases} u\left(x,t\right)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{i+j=k}a_{ij}\left(x,t\right)\phi^{i}\left(\xi\right)\left(\dfrac{G'\left(\theta\right)}{G\left(\theta\right)}\right)^{j}, \\ v\left(x,t\right)=\sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k}b_{ij}\left(x,t\right)\phi^{i}\left(\xi\right)\left(\dfrac{G'\left(\theta\right)}{G\left(\theta\right)}\right)^{j}, \end{cases} \tag{2}$$

其中$a_{ij}\left(x,t\right),b_{ij}\left(x,t\right)$是关于 t 的待定函数，通过齐次平衡法[7]平衡方程(1)可以确定正整数m,n的取值，辅助微分方程中的$\phi\left(\xi\right)$和$G\left(\theta\right)$则满足下列两个常微分辅助方程：

$$\phi'\left(\xi\right)=A+B\phi\left(\xi\right)+C\phi^{2}\left(\xi\right) \tag{3}$$

$$G''(\theta)+\lambda G'(\theta)+\mu G(\theta)=0 \tag{4}$$

其中 A,B,λ,μ 为任意常数，$C\neq 0,\xi=k_1x+\varpi_1 t,\theta=k_2x+\varpi_2 t$ 。

借助辅助方程(3)和方程(4)，将方程(2)代入到方程(1)中，此时，通过计算便可以得到一个关于 $\phi^i(\xi)\left(\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}\right)^j (i,j=0,1,2,\cdots)$ 的多项式，令这个多项式的每一项幂系数为零，得到一组关于 $a_{ij}(x,t)$，$b_{ij}(x,t)$，k_1,k_2,ϖ_1 和 ϖ_2 的线性方程组，借助计算机软件 Maple 求解线性方程组，并将所得结果代入到方程(2)中，就可以得到方程(1)的解。

注：当 $\Delta=B^2-4AC>0$ 时，方程(3)的解为：

$$\phi_1(\xi)=-\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \tag{5}$$

$$\phi_2(\xi)=-\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \tag{6}$$

当 $\Delta=B^2-4AC<0$ 时，方程(3)的解为：

$$\phi_3(\xi)=-\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) \tag{7}$$

$$\phi_4(\xi)=-\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) \tag{8}$$

当 $A=B=0,C\neq 0$ 时，方程(3)的解为：

$$\phi_5(\xi)=\frac{-1}{C\xi+H_1} \tag{9}$$

当 $\Delta_1=\lambda^2-4\mu>0$ 时，方程(4)的解为：

$$\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)} \tag{10}$$

当 $\Delta_1=\lambda^2-4\mu<0$ 时，方程(4)的解为：

$$\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)} \tag{11}$$

当 $\Delta_1=\lambda^2-4\mu=0$ 时，方程(4)的解为：

$$\frac{G'(\theta)}{G(\theta)}=-\frac{\lambda}{2}+\frac{c_2}{c_1+c_2\theta} \tag{12}$$

3. 色散水波方程的解

在文献[8]和文献[9]中，Guha 和 Zeng 分别考虑了色散水波方程

$$\begin{cases} u_t = v_{xxx} + 2(uv)_x = 0 \\ v_t = u_x + 2vv_x = 0 \end{cases} \tag{13}$$

这里 $u(x,t), v(x,t)$ 分别指底面到水平面的高度和水平速度场，文献[8]中 Guha 对色散水波方程进行了初步研究，文献[9]中 Zeng 则通过探讨对色散水波方程的相类似形式构造得到了一些精确解。

通过齐次平衡法平衡方程(13)中的 v_{xxx} 和 $(uv)_x$，u_x 和 vv_x，有 $n+3=n+m+1, m+1=2n+1$，从而得到 $m=2, n=1$，则方程(2)变为：

$$\begin{cases} u(x,t) = a_0(t) + a_1(t)\phi(\xi) + a_2(t)\dfrac{G'(\theta)}{G(\theta)} + a_3(t)\phi(\xi)\dfrac{G'(\theta)}{G(\theta)} \\ v(x,t) = b_0(t) + b_1(t)\phi(\xi) + b_2(t)\dfrac{G'(\theta)}{G(\theta)} \end{cases} \tag{14}$$

其中 A, B, λ, μ 为任意常数，$C \neq 0, \xi = k_1 x + \varpi_1 t, \theta = k_2 x + \varpi_2 t$。

借助辅助微分方程(3)和(4)，将方程(14)代入到方程(13)中，此时，通过计算便可以得到一个关于 $\phi^i(\xi)\left(\dfrac{G'(\theta)}{G(\theta)}\right)^j (i,j=0,1,2,3)$ 的多项式，令每一项幂系数为零，得到一个关于 $a_0(t), a_1(t), a_2(t), b_0(t), b_1(t), b_2(t), k_1, k_2, \varpi_1$ 和 ϖ_2 的线性方程组，借助 Maple 求解此方程组，可得到：

$$\begin{gathered} k_1 = k_1, k_2 = \frac{k_1 B}{\lambda} \\ \varpi_1 = 1, \varpi_2 = \frac{B}{\lambda} \\ a_0(t) = \frac{1}{4}\frac{k_2^2 \lambda (1+5\mu)}{\mu}, a_1(t) = -\frac{b_2 k_2^3 \lambda \mu (1+5\mu)}{4\mu b_0 k_1 A} \\ a_2(t) = -\frac{1}{4}\frac{b_2 k_2^2 \lambda (1+5\mu)}{\mu b_0}, a_3(t) = \frac{b_2 k_2^3 \lambda^2 (1+5\mu)}{4\mu b_0 k_1 A} \\ b_0(t) = b_0(t), b_1(t) = b_1(t), b_2(t) = b_2(t) \end{gathered} \tag{15}$$

将式(15)代入到(14)中，借助(5)~(12)，可得到色散水波方程(13)有如下形式的解：

情形 1：当 $\Delta > 0$ 且 $\Delta_1 > 0$ 时，方程(13)有如下形式的解：

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = {} & \frac{1}{4}\frac{k_2^2 \lambda (1+5\mu)}{\mu} - \frac{b_2 k_2^3 \lambda \mu (1+5\mu)}{4\mu b_0 k_1 A}\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \\ & + \frac{1}{4}\frac{b_2 k_2^2 \lambda (1+5\mu)}{\mu b_0}\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \\ & + \frac{b_2 k_2^3 \lambda^2 (1+5\mu)}{4\mu b_0 k_1 A}\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

$$v_1(x,t)=b_0(t)-b_1(t)\frac{B+\sqrt{\Delta}}{2C}\coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)$$

$$-b_2(t)\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \tag{17}$$

(16)与(17)为色散水波方程的双曲函数形式解。

情形 2：当 $\Delta<0$ 且 $\Delta_1>0$ 时，方程(13)有如下形式的解：

$$u_2(x,t)=\frac{1}{4}\frac{k_2^2\lambda(1+5\mu)}{\mu}+\frac{b_2k_2^3\lambda\mu(1+5\mu)}{4\mu b_0k_1A}\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$$

$$+\frac{1}{4}\frac{b_2k_2^2\lambda(1+5\mu)}{\mu b_0}\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \tag{18}$$

$$+\frac{b_2k_2^3\lambda^2(1+5\mu)}{4\mu b_0k_1A}\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)$$

$$v_2(x,t)=b_0(t)-b_1(t)\frac{B-\sqrt{-\Delta}}{2C}\tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$$

$$-b_2(t)\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\frac{c_1\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \tag{19}$$

(18)与(19)为色散水波方程的双曲函数与三角函数混合作用解。

情形 3：当 $A=B=0,C\neq 0$ 且 $\Delta_1<0$ 时，方程(13)有如下形式的解：

$$u_3(x,t)=\frac{1}{4}\frac{k_2^2\lambda(1+5\mu)}{\mu}+\frac{b_2k_2^3\lambda\mu(1+5\mu)}{4\mu b_0k_1A}\frac{1}{C\xi+H_1}$$

$$+\frac{1}{4}\frac{b_2k_2^2\lambda(1+5\mu)}{\mu b_0}\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \tag{20}$$

$$+\frac{b_2k_2^3\lambda^2(1+5\mu)}{4\mu b_0k_1A}\frac{1}{C\xi+H_1}\left(\frac{\lambda}{2}-\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right)$$

$$v_3(x,t)=b_0(t)-b_1(t)\frac{1}{C\xi+H_1}+b_2(t)\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\frac{-c_1\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}{c_1\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)+c_2\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta_1}}{2}\theta\right)}\right) \tag{21}$$

(20)与(21)为色散水波方程的三角函数与有理函数混合作用解。

情形 4：当 $A=B=0,C\neq 0$ 且 $\Delta_1=0$ 时，方程(13)有如下形式的解：

$$\begin{aligned}u_4(x,t)=&\frac{1}{4}\frac{k_2^2\lambda(1+5\mu)}{\mu}+\frac{b_2k_2^3\lambda\mu(1+5\mu)}{4\mu b_0k_1A}\frac{1}{C\xi+H_1}\\&-\frac{1}{4}\frac{b_2k_2^2\lambda(1+5\mu)}{\mu b_0}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{c_2}{c_1+c_2\theta}\right)\\&-\frac{b_2k_2^3\lambda^2(1+5\mu)}{4\mu b_0k_1A}\frac{1}{C\xi+H_1}\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{c_2}{c_1+c_2\theta}\right)\end{aligned} \tag{22}$$

$$v_4(x,t)=b_0(t)-b_1(t)\frac{1}{C\xi+H_1}+b_2(t)\left(-\frac{\lambda}{2}+\frac{c_2}{c_1+c_2\theta}\right) \tag{23}$$

(22)与(23)为色散水波方程的有理函数解。

其中 $\xi=k_1x+t,\theta=\frac{k_1B}{\lambda}x+\frac{B}{\lambda}t$， c_1,c_2 为任意常数， $\Delta=B^2-4AC$， $\Delta_1=\lambda^2-4\mu$。

根据式(5)~(12)还可以得到更多关于色散水波方程的解，这里就不再一一列出。

4. 结论

本文通过在已有的辅助微分方程和 G'/G -展开法基础上构造新的双辅助方程展开法获得了色散水波方程的多种函数混合而成的新的精确解，所得的这些结果所含函数种类多且在其他文献中还没有被提到过，使得所求的精确解在众多物理背景下更具有现实意义，其中在对 c_1,c_2 值取特定关系时可获得色散水波方程的多种形式孤子解。

参考文献

[1] Wazwaz, A.M. (2004) The Tanh Method for Traveling Wave Solutions of Nonlinear Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **154**, 713-723. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00745-8

[2] El-Wakil, S.A. and Abdou, M.A. (2005) Modified Extended Tanh-Function Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations. *Chaos*, *Solitons and Fractals*, **10**, 1256-1264. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.10.072

[3] 孙峪怀, 杨少华, 王佼. 非线性 Chaffee-Infante 反映扩散方程的精确解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2012, 35(3): 293-296.

[4] Elgarayhi, A. and Elhanbaly, A. (2005) New Exact Traveling Wave Solutions for the Two Dimensional KdV-Burgers and Boussinesq Equations. *Physics Letters A*, **343**, 85-89. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.10.072

[5] Li, B.Q. and Ma, Y.L. (2009) G'/G-Expanded Form and New Exact Solutions of (2 + 1)-Dimensional Asymmetric Nizhnik -Novikov -Vesselov System. *Acta Physica Sinica*, **58**, 4373-4378.

[6] 马志民, 孙峪怀, 孙阳, 刘福生. 广义变系数 Gardner 方程新的精确解[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2012, 35(4): 435-438.

[7] 张国栋, 秦清锋. 齐次平衡法在微分方程中的应用[J]. 中国新技术新产品, 2010(21): 243-244.

[8] Guha, P. (2008) Geodesic Flow on Extended Bott-Virasoro Group and Generalized Two Component Peakon Type Dual Systems. *Reviews in Mathematical Physics*, **20**, 1191-1208. https://doi.org/10.1142/S0129055X08003523

[9] Zeng, X. and Wang, D.S. (2009) A Generalized Extended Rational Expansion Method and Its Application to (1+1)-Dimensional Dispersive Long Wave Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **212**, 296-304. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.02.020