

Chaos Analysis and Numerical Simulation of a Nonlinear System

Xi Zhang, Heyuan Wang

School of Mathematics and System Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 1062337849@qq.com

Received: Mar. 1st, 2020; accepted: Mar. 16th, 2020; published: Mar. 24th, 2020

Abstract

In this paper, a nonlinear system based on the change of Liu system is discussed, and its chaos is analyzed and simulated. The symmetries, dissipations, singularities and local stability of the system are discussed. The global stability and the existence of attractors are explained. According to the different parameters of the attractor, Poincare section, time series and return map, the chaotic characteristics of the system are described. The simulation results show that the chaotic behavior of the nonlinear system is universal.

Keywords

Nonlinear Dynamical System, Bifurcation, Chaos, Numerical Simulation, MATLAB

一个非线性系统的混沌现象分析及数值仿真

张 熙, 王贺元

沈阳师范大学, 数学与系统科学学院, 辽宁 沈阳
Email: 1062337849@qq.com

收稿日期: 2020年3月1日; 录用日期: 2020年3月16日; 发布日期: 2020年3月24日

摘 要

本文讨论了一个根据Liu系统变化而来的非线性系统, 分析其混沌现象并进行数值仿真。讨论了系统的对称性、耗散性、奇点及其局部稳定性, 说明了系统的全局稳定性和吸引子的存在性。结合不同参数变化下的分岔图与最大李雅普诺夫指数分析了系统发生混沌的区间, 根据不同参数下的吸引子、庞加莱截面、时间序列和返回映射等指标, 描述系统的混沌特性。通过仿真的结果说明此非线性系统混沌行为的普适性。

关键词

非线性动力系统, 分岔, 混沌, 数值仿真, MATLAB

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对非线性系统的探索和研究已持续一个多世纪的时间, 但仍然方兴未艾。20 世纪 70 年代初, 科学家们利用计算机和 nonlinear 数学, 发现了非线性系统中的混沌行为, 这一发现极大地激起了人们对复杂问题探索的热情, 对混沌的研究热潮也开始了。混沌现象的研究对现代科学的影响是广泛的, 几乎涉及到了任何领域。

1963 年, 气象学家 E.N. Lorenz 在数值实验中发现了混沌现象, 提出了 Lorenz 系统[1], 自此, 不管是国际上还是国内, 人们不断地提出和构建新的混沌系统。很多的学术专家都曾展示了自己的研究成果, 在国内有影响力的像 Chen-系统[2] [3], Lv-系统[4]等等, 在 2004 年, 刘崇新教授等人又提出了 Liu-系统[5]。Liu-混沌系统属于广义 Lorenz 系统, Chen-系统与 Lorenz 系统互为对偶系统, 而 Lv-系统在 Lorenz 系统和 Chen 系统之间架起了桥梁, 三者之间的联系十分紧密。本文在 Liu-系统的基础上, 研究了一个新的非线性系统[6], 对其动力学行为进行了数值仿真, 因而初步分析了其混沌行为[7] [8] [9]。

2. 数学模型

2.1. 系统描述

根据文献[6]所提到的一类新的混沌系统:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(y-x) + yz \\ \frac{dy}{dt} = cx - xz \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

其中状态变量 x, y, z 均为时间 t 的函数, a, b, c 为控制参数。

2.2. 对称性与不变性

对于系统(1), 通过变化 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 对系统(1)进行处理, 发现系统的控制参数 a, b, c 不发生变动。对应的非线性系统(1)也保持它的原有属性, 而且仍然以 z 轴为对称轴。系统(1)具有对称性和不变性。

2.3. 系统耗散性与吸引子不变性

对于系统(1), 作如下处理:

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = a(y-x) + yz \\ f_2(x, y, z) = cx - xz \\ f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

则系统(1)的散度为:

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial f_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial f_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial f_3(x, y, z)}{\partial z} \quad (3)$$

当 $a+b>0$ 时, 系统(1)是耗散的, 故存在吸引子, 即 $a+b>0$ 是吸引子存在的条件。

2.4. 平衡点及局部稳定性

对于系统(1)中的各式, 令其方程右边等于 0, 可以解得系统(1)的三个平衡点[10], 分别为:

$$S_0 = (0, 0, 0), \quad S_{\pm} = \left(\pm\sqrt{bc}, \frac{a\sqrt{bc}}{a+c}, c \right)$$

其中 S_+ 和 S_- 对称的落在 z 轴的两侧, 对于 $bc=0$, 系统(1)有唯一的平衡点 $(0, 0, 0)$ 。下面讨论各平衡点的稳定性。

在平衡点 $S_0 = (0, 0, 0)$ 处通过线性变换处理后, 得到 Jacobian 矩阵为:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

其对应的特征方程为:

$$\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + a(b-c)\lambda - abc = (\lambda+b)(\lambda^2 + a\lambda - ac) = 0 \quad (4)$$

解得上述 Jacobian 矩阵的三个特征值分别为:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ac}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ac}}{2}$$

当 $ac < 0$ 时, $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ac}}{2} < 0$, 故系统存在三个负实根, 此时平衡点 S_0 稳定。为了直观地判

断平衡点稳定与否, 我们不妨设 $a=8$, $b=3$, $c=13$, 此时三个特征值分别为 -3 , 6.95 , -14.95 , 存在一个大于 0 的特征值, 由 Routh-Hurwitz 原理可知, 平衡点 $S_0 = (0, 0, 0)$ 是不稳定的。

对于平衡点 S_+ 和 S_- , 由于系统(1)通过变化 $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ 后, 系统的控制参数 a, b, c 不发生变动。对应的非线性系统(1)也保持它的原有属性, 而且 P_+ 和 P_- 也关于 z 轴对称, 所以二者性质相同, 这里不妨只分析 S_+ 。

S_+ 对应的 Jacobian 矩阵为:

$$J_2 = \begin{pmatrix} -a & a+c & \frac{a\sqrt{bc}}{a+c} \\ 0 & 0 & -\sqrt{bc} \\ \frac{a\sqrt{bc}}{a+c} & \sqrt{bc} & -b \end{pmatrix}$$

其特征方程为:

$$\lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + \left(bc + ab - \frac{a^2bc}{(a+c)^2} \right) \lambda + 2abc = 0 \quad (5)$$

根据 Routh-Hurwitz 原理以及参数 a, b, c 的取值范围, 可知该特征方程仅有实部为负的根, 故 S_+ 为不

稳定的平衡点, 同理, S_- 也为不稳定的平衡点。

3. 数值仿真

本节对系统(1)的动力学行为进行数值仿真。当固定两个系统参数时, 随着参数 a 的增大, 系统的动力学行为发生了一系列的变化。采用龙格-库塔方法编写 MATLAB 程序, 画出仿真图, 并揭示系统(1)的混沌学行为[11]。

当固定参数 $b=3$, $c=13$ 时, 图 1 和图 2 分别给出了 $0 \leq a \leq 30$ 时的分岔图与最大 Lyapunov 指数, 图 3 为当 $0 \leq a \leq 10$ 时局部放大的分岔图, 图 4 和图 5 分别为 $a=8$, $b=3$, $c=13$ 时的吸引子图和庞家莱截面图, 图 6 为 $a=28$, $b=3$, $c=13$ 时的吸引子图。

系统经过一系列复杂演变过程, 经 Hopf 分岔到达混沌态, 当 $6.7 \leq a \leq 26$ 时, 系统彻底发生混沌, 当 $a=8$ 时, 混沌现象已经出现, 当 $a=26$ 时, 混沌结束, 系统进入周期轨道。

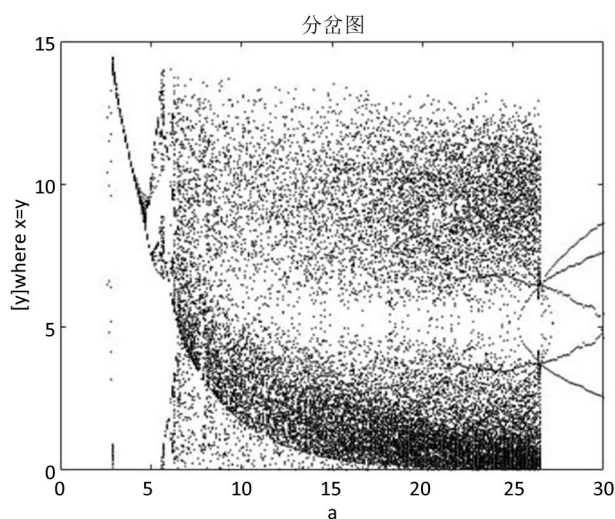


Figure 1. Bifurcation diagram when $0 \leq a \leq 30$, $b=3$, $c=13$

图 1. $0 \leq a \leq 30$, $b=3$, $c=13$ 时的分岔图

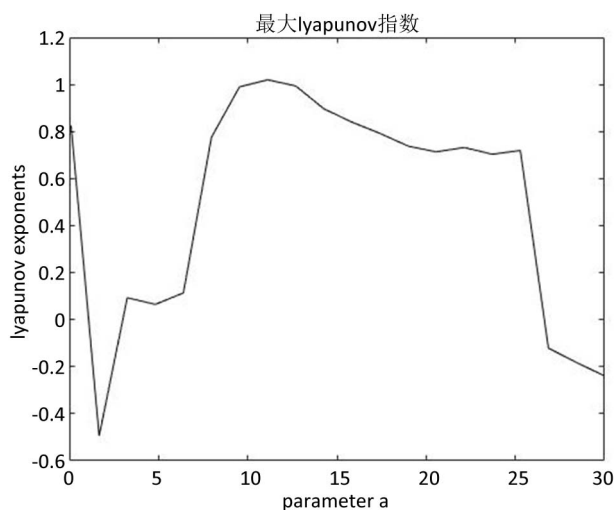


Figure 2. Graph of maximum Lyapunov index when $0 \leq a \leq 30$, $b=3$, $c=13$

图 2. $0 \leq a \leq 30$, $b=3$, $c=13$ 时的最大 Lyapunov 指数图

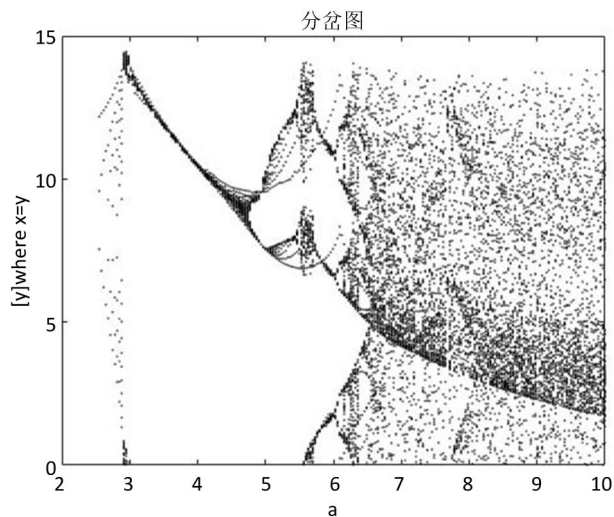


Figure 3. Bifurcation diagram when $0 \leq a \leq 10, b = 3, c = 13$
图 3. $0 \leq a \leq 10, b = 3, c = 13$ 时的分岔图

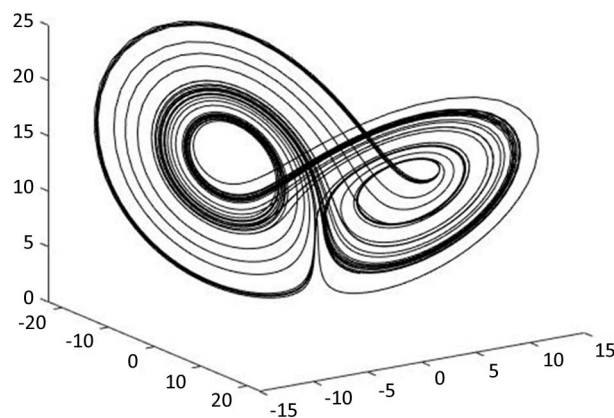


Figure 4. Attractor graph when $a = 8, b = 3, c = 13$
图 4. $a = 8, b = 3, c = 13$ 时的吸引子图

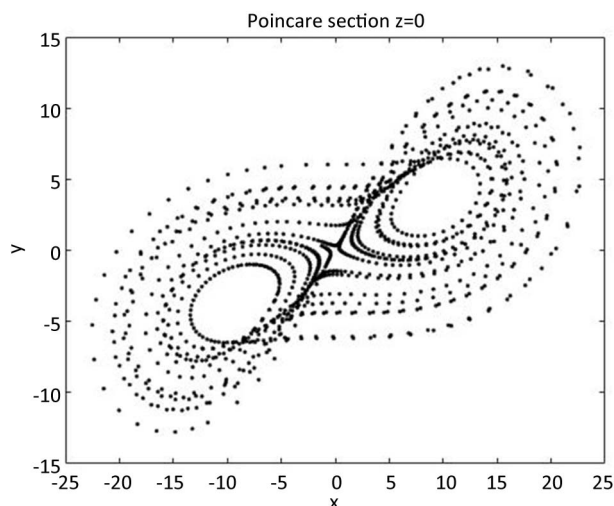


Figure 5. Poincaré Section when $a = 8, b = 3, c = 13$
图 5. $a = 8, b = 3, c = 13$ 时的庞家莱截面图

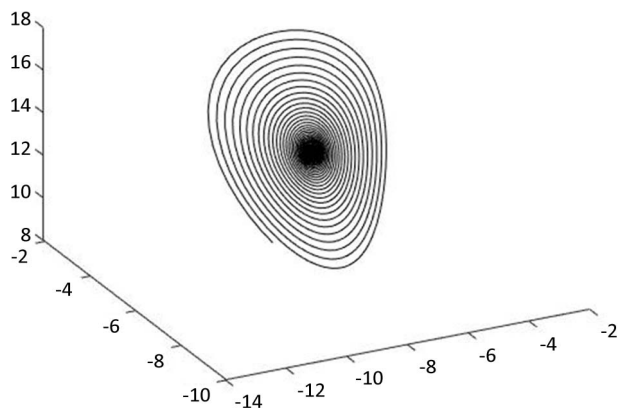


Figure 6. Attractor graph when $a = 28, b = 3, c = 13$
图 6. $a = 28, b = 3, c = 13$ 时的吸引子图

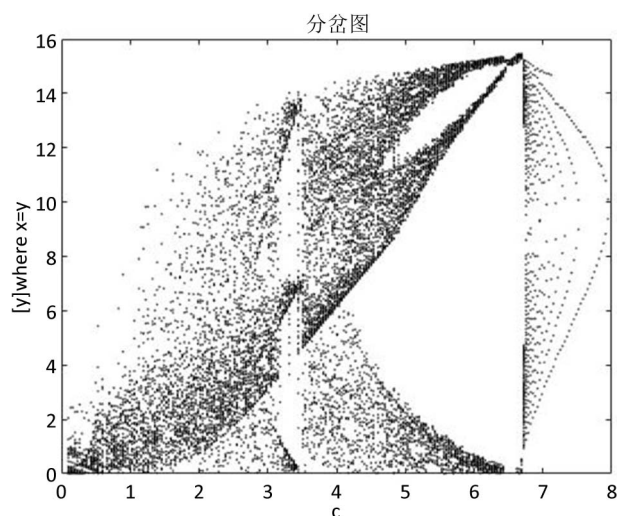


Figure 7. Bifurcation diagram when $0 \leq b \leq 10, b = 3, c = 13$
图 7. $0 \leq b \leq 10, b = 3, c = 13$ 时的分岔图

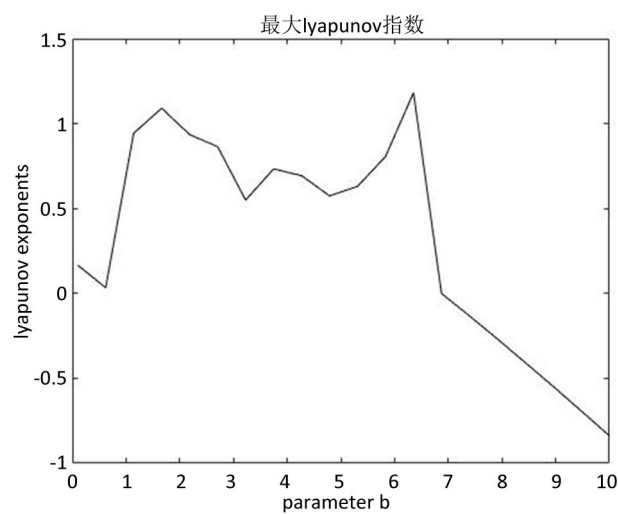


Figure 8. Graph of maximum Lyapunov index when $0 \leq b \leq 10, b = 3, c = 13$
图 8. $0 \leq b \leq 10, b = 3, c = 13$ 时的最大 Lyapunov 指数图

当固定参数 $a=8$, $c=13$ 时, 图 7 和图 8 分别给出了 $0 \leq b \leq 10$ 时的分岔图和最大 Lyapunov 指数图。当 $b=0.1$ 时混沌出现, 当 $b=6.6$ 时混沌逐渐消失, 其中有一个较为明显的周期窗口。

当固定参数 $a=8$, $b=3$ 时, 图 9 和图 10 分别给出当 $0 \leq c \leq 30$ 时的分岔图和最大 Lyapunov 指数图。 $6 < c < 22$ 时, 系统处于混沌状态, 其中存在一个明显的周期窗口。

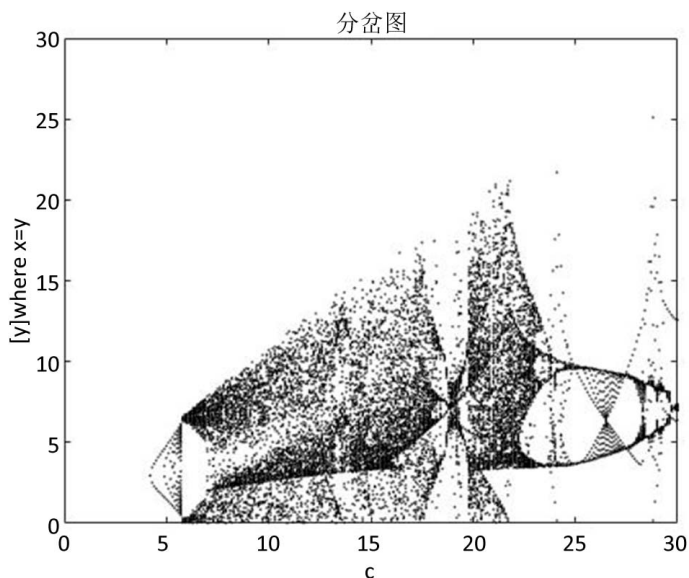


Figure 9. Bifurcation diagram when $a=8$, $b=3$, $0 \leq c \leq 30$

图 9. $a=8$, $b=3$, $0 \leq c \leq 30$ 时的分岔图

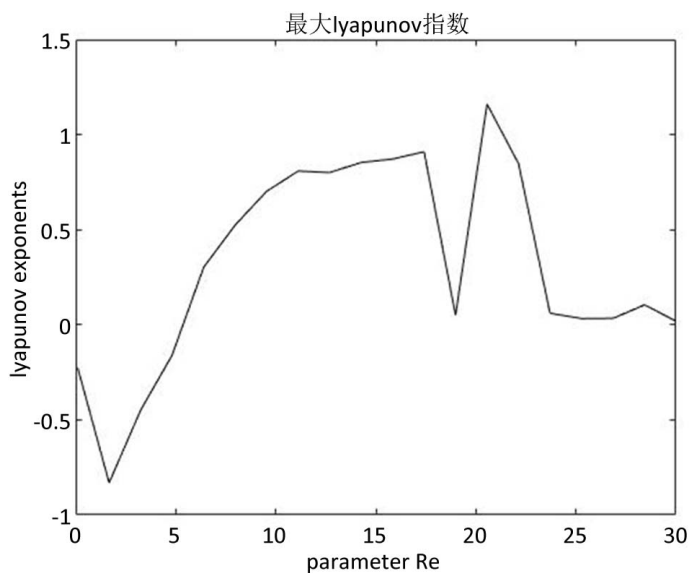


Figure 10. Graph of maximum Lyapunov index when $a=8$, $b=3$, $0 \leq c \leq 30$

图 10. $a=8$, $b=3$, $0 \leq c \leq 30$ 时的最大 Lyapunov 指数图

综合以上三个系统参数使系统发生混沌的范围, 不妨取 $a=8$, $b=3$, $c=13$ 进行数值仿真。图 11、图 12 和图 13 分别为该组参数下的返回映射、时间序列和功率谱, 从中可以看出此时系统正处于混沌状态下。

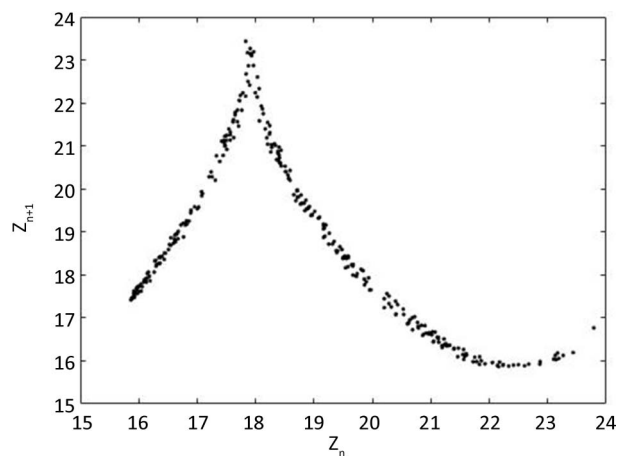


Figure 11. Return map when $a = 8, b = 3, c = 13$

图 11. $a = 8, b = 3, c = 13$ 时的返回映射

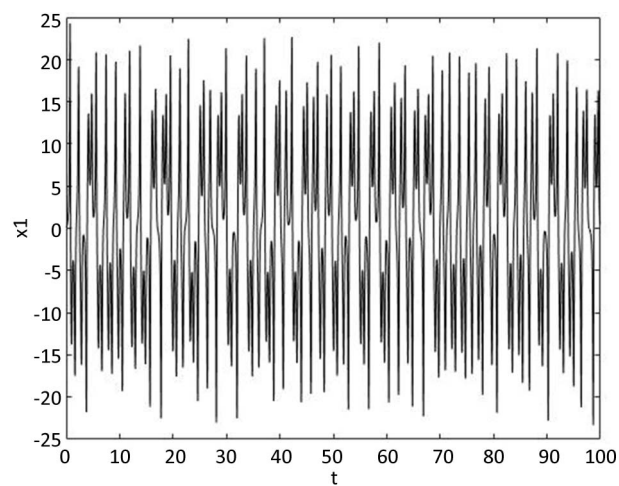


Figure 12. Time series when $a = 8, b = 3, c = 13$

图 12. $a = 8, b = 3, c = 13$ 时的时间序列

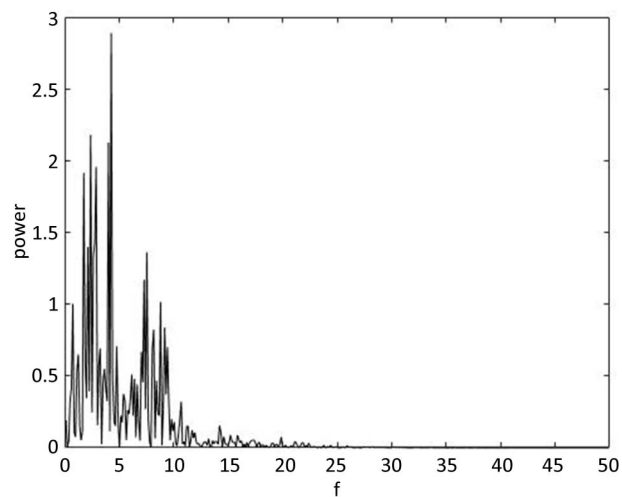


Figure 13. Power Spectrum when $a = 8, b = 3, c = 13$

图 13. $a = 8, b = 3, c = 13$ 时的功率谱

4. 结论

本文首先对所研究的内容研究现状及近期发展进行简介;其次,说明系统的对称性与不变性,讨论系统的耗散性与吸引子的存在性,计算平衡点及证明其局部稳定性,说明系统确实存在混沌;最后对系统的三个参数 a, b, c 分别进行数值仿真,确定混沌产生的区间,并选取一组参数值: $a = 8, b = 3, c = 13$,仿真出吸引子图、庞家莱映射图、时间序列、返回映射和功率谱,充分证明在此参数值下,系统正在发生混沌。

参考文献

- [1] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [2] Li, T.Y. and Yorke, J.A. (1975) Period Three Implies Chaos. *American Mathematical Monthly*, **82**, 985-992. <https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11994008>
- [3] Chen, G, and Ueta, T. (1999) Yet Another Chaotic Attractor. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **9**, 1465-1466. <https://doi.org/10.1142/S0218127499001024>
- [4] Lv, J.H. and Chen, G.R. (2002) A New Chaotic Attractor Coined. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**, 659-661. <https://doi.org/10.1142/S0218127402004620>
- [5] Liu, C.X., Liu, T. and Liu, L. (2004) A New Chaotic Attractor. *Chaos, Solitons and Fractals*, **22**, 1031-1038. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.02.060>
- [6] 雷腾飞, 付海燕, 陈恒, 窦洋洋. 一类新三维混沌系统的构建及电路仿真[J]. 东莞理工学院学报, 2017, 24(1): 23-29.
- [7] 王贺元. 非线性系统的动力学行为及其数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 114-117.
- [8] 朱克勤, 彭杰. 高等流体力学[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 36-42.
- [9] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 120-129.
- [10] 王贺元. 平面不可压缩磁流体动力学五模类 Lorenz 方程组的动力学行为及其数值仿真[J]. 数学物理学报, 2017, 37(1): 199-216.
- [11] 王贺元, 崔进. 旋转流动混沌行为的全局稳定性分析及数值仿真[J]. 数学物理学报, 2017, 37(4): 785-786.