Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2020, 9(7), 987-991**
Published Online July 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.97117

Probabilistic Representations and Applications of Two Kinds of Cauchy Numbers

Guisong Chang, Chen Xu

Department of Mathematics, Northeastern University, Shenyang Liaoning
Email: gschang@mail.neu.edu.cn

Received: Jun. 5th, 2020; accepted: Jun. 29th, 2020; published: Jul. 7th, 2020

Abstract

In this paper, we prove that the Cauchy numbers of the first and the second kind both are factorial moments of uniform random variable, and make use of the probabilistic methods and skills to the computation of combinatorial sums. As a result of the applications, some convolutions of the Cauchy numbers are obtained.

Keywords

Cauchy Numbers, Uniform Distribution, Factorial Moment

两类Cauchy数的概率表示及应用

常桂松，徐　晨

东北大学数学系，辽宁 沈阳
Email: gschang@mail.neu.edu.cn

收稿日期：2020年6月5日；录用日期：2020年6月29日；发布日期：2020年7月7日

摘　要

本文利用(0,1)区间上的均匀分布的阶乘矩，提出了第一类Cauchy数和第二类Cauchy数的概率表示。利用概率论的方法和技巧，证明了包含第一类Cauchy数和第二类Cauchy数的一些递推关系和一部分有趣的恒等式。最后证明了第一类Cauchy数和第二类Cauchy数的卷积公式。

文章引用：常桂松，徐晨．两类 Cauchy 数的概率表示及应用[J]．应用数学进展, 2020, 9(7): 987-991.
DOI: 10.12677/aam.2020.97117

关键词

Cauchy数，均匀分布，阶乘矩

1. 引言

Comtet 提出了第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数[1]

$$c_n = \int_0^1 (x)_n \mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$\hat{c}_n = \int_0^1 \langle x \rangle_n \mathrm{d}x. \tag{2}$$

这里 n 是一个非负整数。$(x)_n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$ 和 $\langle x \rangle_n = x(x+1)\cdots(x+n-1)$ 分别称为下阶乘和上阶乘。Merlini 等[2]利用 Riodan 矩阵的方法研究了 Cauchy 数的一些性质，并利用算子的方法，讨论了关于 Cauchy 数的几个求和公式。由于 Cauchy 数与特殊的组合数 Stirling 数、Bernoulli 数、Harmonic 数等有密切关系，Cauchy 数引起了许多学者的研究兴趣[3] [4]。文献[5] [6]推广了 Cauchy 数，并研究了两类推广的 Cauchy 数的一些恒等式。本文利用概率论的方法，给出了两类 Cauchy 数的概率表示，并利用概率论技巧证明了包含两类 Cauchy 数的一些递推关系，最后证明了包含两类 Cauchy 数的卷积公式。

2. 预备知识

设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，记作 $X \sim U(0,1)$，X 的密度函数

$$p(x) = 1, 0 < x < 1.$$

它的 n 阶下阶乘矩和 n 阶上阶乘矩为：

$$\mathbf{E}(X)_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(x-1)\cdots(x-n+1)p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x(x-1)\cdots(x-n+1)\mathrm{d}x,$$

$$\mathbf{E}\langle X \rangle_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x(x+1)\cdots(x+n-1)p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x(x+1)\cdots(x+n-1)\mathrm{d}x.$$

注意到第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数是区间 $(0,1)$ 上的均匀分布的 n 阶下阶乘矩和 n 阶上阶乘矩，从而可以利用概率论的方法研究第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数的一些性质。

为了叙述方便，在本文中记第一类无符号 Stirling 数和第二类 Stirling 数分别为 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 和 $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$，分别定义为

$$\langle x \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k, \quad x^n = \sum_{n=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (x)_k.$$

3. 主要结果

定理 1 第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数的指数型生成函数的概率表示分别为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n=\mathbf{E}(1+t)^X, \tag{3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{c}_n}{n!}t^n=\mathbf{E}(1-t)^{-X} \tag{4}$$

即 $c_n=\mathbf{E}(X)_n$，$\hat{c}_n=(-1)^n\mathbf{E}(-X)_n=\mathbf{E}\langle X\rangle_n$。这里随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布。

证明 设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，则

$$\mathbf{E}(1+t)^X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{E}(X)_n}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n,$$

$$\mathbf{E}(1-t)^{-X}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{E}(-X)_n}{n!}(-t)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^1 x(x+1)\cdots(x+n-1)\mathrm{d}x}{n!}t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{c}_n}{n!}t^n.$$

定理 2 第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数与第一类无符号 Stirling 数和第二类 Stirling 数之间有如下等式

$$\sum_{n=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}c_k=\frac{1}{n+1}, \tag{5}$$

$$\hat{c}_n=\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]\frac{1}{k+1}. \tag{6}$$

证明 设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，由下阶乘与幂函数的关系

$$\mathbf{E}X^n=\mathbf{E}\sum_{n=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}(X)_k=\sum_{n=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}c_k$$

另外，$\mathbf{E}X^n=\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$，所以 $\sum_{n=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}c_k=\frac{1}{n+1}$。

$$\mathbf{E}\langle X\rangle_n=\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]\mathbf{E}\left(X^k\right)=\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]\frac{1}{k+1}$$

定理 3 第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数有递归关系

$$\frac{c_n}{n!}=(-1)^n\frac{\hat{c}_n}{n!}+(-1)^{n-1}\frac{\hat{c}_{n-1}}{(n-1)!}, \tag{7}$$

$$\frac{\hat{c}_n}{n!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{c_k}{k!}. \tag{8}$$

证明 设随机变量 X 服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，$1-X$ 也服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，

$$\frac{c_n}{n!}=\mathbf{E}\binom{1-X}{n}=\frac{1}{n!}\mathbf{E}(1-X)_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1)_k\mathbf{E}(-X)_{n-k}$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{\mathbf{E}(-X)_n+n\mathbf{E}(-X)_{n-1}\right\}=\frac{(-1)^n}{n!}\hat{c}_n+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\hat{c}_{n-1}.$$

$$\frac{\hat{c}_n}{n!}=\frac{(-1)^n}{n!}\mathbf{E}(X-1)_n=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{E}(X)_k(-1)_{n-k}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}c_k(-1)_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}c_k.$$

定理 4 第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数满足卷积公式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k c_{n-k}=-(n-1)c_n-n(n-2)c_{n-1}, \tag{9}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}c_k\hat{c}_{n-k}=(1-n)c_n. \tag{10}$$

证明 设 X_1 与 X_2 是相互独立且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布的两个随机变量，令 $T_1=X_1+X_2$ 与 $T_2=X_1-X_2$，利用随机变量的函数的分布关系，T_1 与 T_2 的密度函数分别为

$$f(t_1)=\begin{cases} t_1, & 0<t_1<1; \\ 2-t_1, & 1\le t_1<2; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad f(t_2)=\begin{cases} 1+t_2, & -1<t_2<0; \\ 1-t_2, & 0\le t_1<1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}(X_1+X_2)_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{E}(X_1)_k\,\mathbf{E}(X_2)_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k c_{n-k}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1+X_2)_n&=\int_0^2(t_1)_n f(t_1)\mathrm{d}t_1=\int_0^1(t_1)_n\cdot t_1\mathrm{d}t_1+\int_1^2(t_1)_n\cdot(2-t_1)\mathrm{d}t_1\\
&=\int_0^1(t_1)_n\cdot(t_1-n+n)\mathrm{d}t_1+\int_0^1(u+1)_n\cdot(1-u)\mathrm{d}u\\
&=c_{n+1}+nc_n+\int_0^1(u+1)_n\mathrm{d}u-\int_0^1(u+1)_n\cdot(u-n+1+n-1)\mathrm{d}u\\
&=c_{n+1}+nc_n+c_n+nc_{n-1}-\left[\int_0^1(u+1)_{n+1}\mathrm{d}u+(n-1)\int_0^1(u+1)_n\mathrm{d}u\right]\\
&=c_{n+1}+nc_n+c_n+nc_{n-1}-\left[c_{n+1}+(n+1)c_n+(n-1)(c_n+nc_{n-1})\right]\\
&=-(n-1)c_n-n(n-2)c_{n-1}.
\end{aligned}$$

另外，由两个均匀分布差的密度得

$$\mathbf{E}(X_1-X_2)_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbf{E}(X_1)_k\,\mathbf{E}(-X_2)_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k(-1)^{n-k}\hat{c}_{n-k}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_1-X_2)_n=\mathbf{E}(T_2)_n&=\int_{-1}^{1}(t_2)_n f(t_2)\mathrm{d}t_2\\
&=\int_{-1}^{0}(t_2)_n(1+t_2)\mathrm{d}t_2+\int_0^1(t_2)_n(1-t_2)\mathrm{d}t_2\\
&=\int_0^1\left[(-t_2)_n+(t_2)_n\right](1-t_2)\mathrm{d}t_2\\
&=\int_0^1\left[(-t_2)_n+(t_2)_n\right]\mathrm{d}t_2-\int_0^1 t_2(t_2)_n\mathrm{d}t_2-\int_0^1 t_2(-t_2)_n\mathrm{d}t_2\\
&=c_n+(-1)^n\hat{c}_n-c_{n+1}-nc_n+\int_0^1(-t_2-n+n)(-t_2)_n\mathrm{d}t_2\\
&=(1-n)c_n+(-1)^n\hat{c}_n-c_{n+1}+n(-1)^n\hat{c}_n+(-1)^{n+1}\hat{c}_{n+1}\\
&=(1-n)c_n+(1+n)(-1)^n\hat{c}_n-c_{n+1}+(-1)^{n+1}\hat{c}_{n+1}\\
&=(1-n)c_n.
\end{aligned}$$

4. 结论

由以上的结论可以看到，利用第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数的概率表示，可以得到第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数相关性质。另外，借助于概率论的技巧，得到第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数的卷积公式。这说明，利用概率工具可以研究第一类 Cauchy 数和第二类 Cauchy 数更多的性质

和应用，可以研究广义 Cauchy 数的恒等式。

基金项目

东北大学教师发展专项资助(项目编号：DDJFZ202005)。

参考文献

[1] Comtet, L. (1974) Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

[2] Merlini, D., Sprugnoli, R. and Verri, M.C. (2006) The Cauchy Numbers. *Discrete Mathematics*, **306**, 1906-1920. https://doi.org/10.1016/j.disc.2006.03.065

[3] Zhao, F.Z. (2009) Sums of Products of Cauchy Numbers. *Discrete Mathematics*, **309**, 3830-3842. https://doi.org/10.1016/j.disc.2008.10.013

[4] Komatsu, T. (2013) Sums of Products of Cauchy Numbers, Including Poly-Cauchy Numbers. *Journal of Discrete Mathematics*, **2013**, Article ID: 373927, 10 p. https://doi.org/10.1155/2013/373927

[5] 郑德印. 两类 Cauchy 数的共同推广[J]. 大连理工大学学报, 2004, 44(4): 66-69.

[6] 李志荣, 肖冰, 袁文俊. 广义 Cauchy 数的一些恒等式[J]. 吉林大学学报(理学版), 2009, 47(1): 17-20.