

“X”型梯状图和“T”型梯状图的反强迫多项式

王倩倩¹, 韩振云², 姚海元^{1*}

¹西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

²临夏市第五中学, 甘肃 临夏

Email: *hyao@nwnu.edu.cn

收稿日期: 2020年8月16日; 录用日期: 2020年9月2日; 发布日期: 2020年9月9日

摘要

通过某个顶点关联边的匹配情况分类计算梯子图的部分反强迫多项式, 进而根据对完美匹配进行分类和图的分解, 得到了“X”型梯状图和“T”型梯状图的反强迫多项式。

关键词

完美匹配, 梯状图, 反强迫多项式, 部分反强迫多项式

The Anti-Forcing Polynomials of “X” Type and “T” Type Ladderlike Graphs

Qianqian Wang¹, Zhenyun Han², Haiyuan Yao^{1*}

¹College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

²Linxia City 5th Middle School, Linxia Gansu

Email: *hyao@nwnu.edu.cn

Received: Aug. 16th, 2020; accepted: Sep. 2nd, 2020; published: Sep. 9th, 2020

Abstract

The partial anti-forcing polynomials are calculated by the matching classification of a vertex associated edge in a ladder graph, and then the anti-force polynomials of the “X” type and the “T” type ladderlike graphs are obtained.

*通讯作者。

文章引用: 王倩倩, 韩振云, 姚海元. “X”型梯状图和“T”型梯状图的反强迫多项式[J]. 应用数学进展, 2020, 9(9): 1404-1416. DOI: 10.12677/aam.2020.99166

Keywords

Perfect Matching, Ladderlike Graph, Anti-Forcing Polynomial, Partial Anti-Forcing Polynomial

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

反强迫数的研究始于六角系统中凯库勒结构(即完美匹配)的外自由度。早在 1997 年李学良就已经研究了反强迫数等于 1, 即有强迫单边的六角系统[1]。Vukičević 和 Trinajstić 首次提出反强迫数的概念[2], 即从图中删边使得剩余子图有唯一完美匹配的删除的最少边数称图的反强迫数; 他们还给出了苯类化合物[2]和 cata-型六角系统[3]的反强迫数。雷洪川, 叶永南, 张和平等首次引入了图的完美匹配的反强迫数的概念[4], 从图 G 中删除完美匹配 M 以外的边使得 M 是剩余子图的唯一完美匹配, 删除的最少边数称图 G 的完美匹配 M 的反强迫数。邓汉元给出了六角链和双六角链系统的反强迫数[5] [6]。张倩倩等人证明了 cata-亚苯基系统的反强迫数等于该系统中六角形的个数[7]。蒋晓艳等人得到了硼氮富勒烯图的反强迫数[8]。杨琴证明了富勒烯图的反强迫数[9]。反强迫集的概念是由 Klein 和 Rosenfeld 提出的[10], 具体定义为从图 G 中删除完美匹配 M 以外的边使得 M 是剩余子图的唯一完美匹配, 删除的边集合称作图 G 完美匹配 M 的反强迫集, 而 M 的反强迫数是其最小的反强迫集的大小。图的所有完美匹配的反强迫数的集合称为图的反强迫谱。如果反强迫谱是一个整数区间, 则称反强迫谱是连续的。邓凯、张和平等证明了卡塔型六角系统和偶多边形链的反强迫谱是连续的[11], 还证明了两种类型的可构造六角系统的反强迫谱是连续的, 其中包括具有强迫单边的六角系统[12]。石玲娟研究了超立方图的反强迫谱以及(3,6)-富勒烯图的反强迫数[13]。为了考虑具有相同反强迫数的完美匹配的个数, Hwang 等人引入了反强迫多项式的概念[14]。赵爽、张和平等得到了具有强迫边的苯基系统、平行四边形六角系统、cata-型六角系统以及一些格子图的完美匹配的反强迫多项式[15] [16]。姚海元、王杰彬、韩振云等得到了几类梯子图以及变形梯子图完美匹配的反强迫细谱(等价于反强迫多项式)及其和卢卡斯数列、斐波那契数列之间的一些等式, 从而给出了这 2 个数列的一些组合解释[17] [18] [19]。近几年, 尽管关于图的反强迫多项式的研究有了一些结果, 但是总的来说计算方面的成果还非常少。

本文引言后的第 1 小节介绍了图的反强迫多项式及其根据某一顶点关联的边的分解定理等预备知识。第 2 小节主要是计算了梯子图的包含某特殊边的完美匹配的部分反强迫多项式。第 3 小节首先引入了“X”型梯状图及其退化情况“T”型梯状图的定义, 其次根据“X”型梯状图的结构特点, 将其完美匹配进行分类, 并进一步将各类情况的反强迫多项式分解为若干梯子图的反强迫多项式之和, 然后借助梯子图的剖部分及完整反强迫多项式求出了每一类完美匹配的反强迫多项式, 从而得到了“X”型梯状图及“T”型梯状图的反强迫多项式。最后还给出了一些特殊梯状图的完美匹配数与 Fibonacci 数相关的序列之间的关系。

2. 预备知识

设图 G 是一个简单图, $\mathcal{M} = \mathcal{M}(G)$ 是其所有完美匹配构成的集合。设 $M \in \mathcal{M}(G)$ 是 G 的一个完美匹配, $S \subseteq E(G) \setminus M$, 若 M 是 $G - S$ 的唯一完美匹配, 则称 S 为 M 的一个反强迫集。 M 的最小反强迫集的大小称为 M 的反强迫数, 记为 $af(G, M)$ 。图 G 的(最小)反强迫数是一个整体概念, 其值等于 G 中所

有完美匹配反强迫数的最小值, 记为 $af(G)$ 。类似的, 图 G 的所有完美匹配的最大反强迫数的最大值叫做 G 的最大反强迫数, 记为 $Af(G)$ 。设 \mathcal{A} 是 G 中 M -交错圈组成的集合。若 \mathcal{A} 中任意两个 M -交错圈不交或仅交于 M 中的边, 我们称 \mathcal{A} 是一个相容 M -交错集。图 G 的最大相容 M -交错集的大小, 即包含的 M -交错圈的个数, 记为 $c'(M)$ 。

引理1 [4]: 若 M 是图 G 的一个完美匹配, 则 $af(G, M) \geq c'(M)$ 。特别若图 G 是平面二部图, 则

$$af(G, M) = c'(M).$$

定义1 [14] [15]: 图 G 的反强迫多项式是一个有如下形式的计数多项式:

$$P(G, x) = \sum_{M \in \mathcal{M}} x^{af(G, M)}.$$

实际上, 若记 k_i 是 G 的反强迫数为 $af(G, M) = i$ 的完美匹配的个数, 则经过简单的合并同类项有

$$P(G, x) = \sum_{i=0}^{Af(G)} k_i x^i.$$

若 G 没有完美匹配, 则 $P(G, x) = 0$; 若 G 有唯一的完美匹配, 则 $P(G, x) = 1$ 。特别地, 对空图我们有 $P(G, x) = 1$ 。

Fibonacci 数列 $F(n)$ 是以 $F(0) = 0, F(1) = 1$ 为初始值, $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ 为递推公式的序列 (注, 文献[21]中的定义其初始值与标准定义相差一位)。

引理2 [20] [21]: Fibonacci 数 $F(n)$ 等于杨辉矩阵中与主对角线垂直的第 n 条斜线上诸元素之和, 即

$$F(n+1) = \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i}.$$

定理1: 设 \mathcal{M} 是图 G 的所有完美匹配构成的集合, 若 G 的顶点 u 关联 t 条边 e_1, e_2, \dots, e_t , 则 G 的反强迫多项式有如下分解式

$$P(G, x) = \sum_{i=1}^t \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ e_i \in M}} x^{af(G, M)}.$$

证明 我们将图 G 的完美匹配按其所含的顶点 u 关联的 t 条边 e_1, e_2, \dots, e_t 进行分类有

$$P(G, x) = \sum_{M \in \mathcal{M}(G)} x^{af(G, M)} = \sum_{i=1}^t \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ e_i \in M}} x^{af(G, M)}.$$

定理得证。

3. 梯子图的反强迫多项式

定义2 梯子图 L_n 是路 P_n 和 P_2 的笛卡尔积, 即 $L_n = P_n \times P_2$ 。

通常, 我们把一个梯子图 $L_n = P_n \times P_2$ 水平放置 (如图 1 所示), 其顶点从上到下、从左到右依次记为 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, 其中 $a_i b_i$ 称为竖直边, $a_i a_{i+1}$ 称为水平边, 相应地匹配中的边分别称为竖直匹配边和水平匹配边。

定理2 [15] [17]: 梯子图 $L_n (n \geq 1)$ 的反强迫多项式为

$$P(L_n, x) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-q}{q} x^{n-q-1} + \delta(n) = \sum_{t=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}^{n-1} \binom{t+1}{n-t-1} x^t + \delta(n).$$

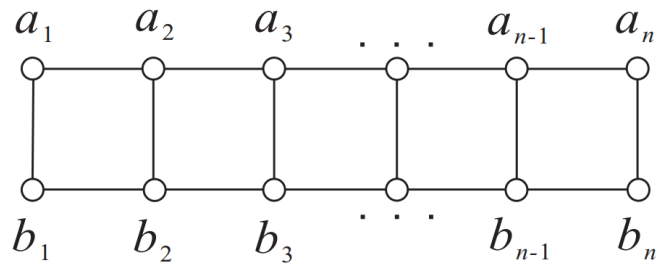


Figure 1. Ladder graphs L_n

图 1. 梯子图 L_n

其中, 若 n 为奇数则 $\delta(n) = 0$, 若 n 为偶数则 $\delta(n) = x^{\frac{n}{2}}$.

这里我们记 \mathcal{M}_i 是 L_n 的包含第 i 条竖直边 $a_i b_i$ 的完美匹配的集合, $1 \leq i \leq n$ 。记 \mathcal{M}_i^* 是 L_n 的包含第 i 条水平边 $a_i a_{i+1}$ 的完美匹配的集合, $1 \leq i \leq n-1$ 。

定理 3: 我们有部分反强迫多项式

$$P_1(L_n, x) := \sum_{M \in \mathcal{M}_1} x^{af(G, M)} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ xP(L_{n-1}, x), & n \geq 2 \text{ 为偶数} \\ xP(L_{n-1}, x) - x^{\frac{n+1}{2}} + x^{\frac{n-1}{2}}, & n \geq 3 \text{ 为奇数} \end{cases}$$

由定理 2 可以得出以下结论。

推论 1: 我们有部分反强迫多项式

$$P_1(L_n, x) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1}.$$

定理 4: 我们有部分反强迫多项式

$$P_1^*(L_n, x) := \sum_{M \in \mathcal{M}_1^*} x^{af(G, M)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n = 1 \\ xP(L_{n-2}, x), & n \geq 2 \end{cases}$$

推论 2: 我们有部分反强迫多项式

$$P_1^*(L_n, x) = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} + \delta(n).$$

由定理 3 和定理 4, 就可以得出 L_n 的反强迫多项式关于顶点 a_1 关联边的匹配情况的分解表达式。

推论 3: L_n 的反强迫多项式满足如下递推关系

$$P(L_n, x) = \begin{cases} P(L_0, x) = 1, & n = 0 \\ P(L_1, x) = 1, & n = 1 \\ P_1(L_n, x) + P_1^*(L_n, x) = xP(L_{n-1}, x) + xP(L_{n-2}, x) + \xi(n), & n \geq 2 \end{cases}$$

其中 $\xi(n) = x^{\frac{n-1}{2}} - x^{\frac{n+1}{2}}$, 若 n 为奇数; $\xi(n) = 0$, 若 n 为偶数。

定理 5: 我们有部分反强迫多项式

$$P_i^*(L_n, x) := \sum_{M \in \mathcal{M}_i^*} x^{af(G, M)} = \begin{cases} x^2 P(L_{i-1}, x) P(L_{n-i-1}, x), & n \text{ 为偶数, } i \text{ 为偶数} \\ x^2 \left(P(L_{i-1}, x) - x^{\frac{i-1}{2}} \right) \left(P(L_{n-i-1}, x) - x^{\frac{n-i-1}{2}} \right) + x^{\frac{i}{2}} \left(P(L_{n-i-1}, x) - x^{\frac{n-i-1}{2}} \right) \\ + x^{\frac{n-i}{2}} \left(P(L_{i-1}, x) - x^{\frac{i-1}{2}} \right) + x^{\frac{n}{2}}, & n \text{ 为偶数, } i \text{ 为奇数;} \\ x^2 P(L_{i-1}, x) P(L_{n-i-1}, x) + (x - x^2) x^{\frac{n-i-1}{2}} P(L_{i-1}, x), & n \text{ 为奇数, } i \text{ 为偶数;} \\ x^2 P(L_{i-1}, x) P(L_{n-i-1}, x) + (x - x^2) x^{\frac{i-1}{2}} P(L_{n-i-1}, x), & n \text{ 为奇数, } i \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

证明: 设 M 是 L_n 的包含第 i 条水平边 $a_i a_{i+1}$ 的完美匹配, 由文献[17]中引理 6 的证明过程可知:

情形 1: 当 n 为偶数, i 为偶数时, 交错 4-圈两边一定会有竖直匹配边, 此时会多出一个与交错 4-圈相容的交错圈使得反强迫数增加一, 也就是反强迫多项式多乘一个 x , 这时直接从交错 4-圈处断开, 交错 4-圈独占一段即多项式的另一 x , 左右两边各一段, 则有

$$x^2 P(L_{i-1}, x) P(L_{n-i-1}, x).$$

情形 2: 当 n 为偶数, i 为奇数时, 当交错 4-圈两边都有竖直匹配边, 则有

$$x^2 \left(P(L_{i-1}, x) - x^{\frac{i-1}{2}} \right) \left(P(L_{n-i-1}, x) - x^{\frac{n-i-1}{2}} \right);$$

当交错 4-圈或左、或右有竖直匹配边, 此时不存在与所有 4-圈都是 M -相容的交错圈, 所以反强迫数不变, 则有

$$xx^{\frac{i-1}{2}} \left(P(L_{n-i-1}, x) - x^{\frac{n-i-1}{2}} \right) + xx^{\frac{n-i-1}{2}} \left(P(L_{i-1}, x) - x^{\frac{i-1}{2}} \right);$$

当交错 4-圈两边都没有竖直匹配边, 此时反强迫数为 $\frac{n}{2}$, 则有项 $x^{\frac{n}{2}}$.

n 为奇数时证明情况类似。

推论 4: 由定理 5 有以下关系式成立

$$\begin{aligned} P_j^*(L_n, x) &= P_{n-j}^*(L_n, x); \\ P_2^*(L_n, x) &= xP_1^*(L_{n-2}, x); \\ P_3^*(L_n, x) &= xP_1^*(L_{n-2}, x) + x^2 P_1^*(L_{n-3}, x) = x^2 P(L_{n-4}, x) + x^2 P_1^*(L_{n-3}, x) \\ &= x^2 P(L_{n-4}, x) + xP_2^*(L_{n-1}, x) = xP_1^*(L_{n-2}, x) + xP_2^*(L_{n-1}, x) \end{aligned}$$

定理 6: 我们有部分反强迫多项式

$$P_i(L_n, x) := \sum_{M \in \mathcal{M}_i} x^{af(G, M)} = P_1(L_i, x) P_1(L_{n+1-i}, x) = \begin{cases} x^2 P(L_{i-1}, x) \left[xP(L_{n-i}, x) - x^{\frac{n-i+2}{2}} + x^{\frac{n-i}{2}} \right], & n \text{ 为偶数, } i \text{ 为偶数;} \\ x \left[xP(L_{i-1}, x) - x^{\frac{i+1}{2}} + x^{\frac{i-1}{2}} \right] P(L_{n-i-1}, x), & n \text{ 为偶数, } i \text{ 为奇数;} \\ x^2 P(L_{i-1}, x) P(L_{n-i-1}, x), & n \text{ 为奇数, } i \text{ 为偶数;} \\ \left[xP(L_{i-1}, x) - x^{\frac{i+1}{2}} + x^{\frac{i-1}{2}} \right] \left[xP(L_{n-i}, x) - x^{\frac{n-i+2}{2}} + x^{\frac{n-i}{2}} \right], & n \text{ 为奇数, } i \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

证明: 设 M 是 L_n 的包含第 i 条竖直边 $a_i b_i$ 的完美匹配。由文献[17]中分解定理知, 我们可以将图从第 i 条竖直边 $a_i b_i$ 处分解成 $L^{(1)} = L_i$ 和 $L^{(2)} = L_{n+1-i}$, $L^{(1)} \cap L^{(2)} = \{a_i b_i\}$, M_1, M_2 是 $L^{(1)}$ 和 $L^{(2)}$ 的完美匹配, $M_1 \cap M_2 = \{a_i b_i\}$, $M_1 \cup M_2 = M$ 。有 $af(M) = af(M_1) + af(M_2)$ 。则

$$\begin{aligned} P_i(L_n, x) &= \sum_{M \in \mathcal{M}_i} x^{af(L_n, M)} = \sum_{\substack{M_1 \in \mathcal{M}(L_i), a_i b_i \in M_1 \\ M_2 \in \mathcal{M}(L_{n+1-i}), a_i b_i \in M_2}} x^{af(L_i, M_1) + af(L_{n+1-i}, M_2)} \\ &= \sum_{M_1 \in \mathcal{M}(L_i), a_i b_i \in M_1} x^{af(L_i, M_1)} \sum_{M_2 \in \mathcal{M}(L_{n+1-i}), a_i b_i \in M_2} x^{af(L_{n+1-i}, M_2)} \\ &= P_1(L_i, x) P_1(L_{n+1-i}, x) \end{aligned}$$

4. “X”型梯状图和“T”型梯状图的反强迫多项式

定义 3: 将一个梯子图水平放置, 从梯子图内部某个方格子(称分叉方格子)处向与梯子图上下方向各延伸出一个梯子图, 记从交叉方格子处, 向上、向左、向右、向下分别有 n_1, n_2, n_3, n_4 个方格子, 我们把这样得到的方格子图称为“X”型梯状图(如图 2 所示), 记为 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 。

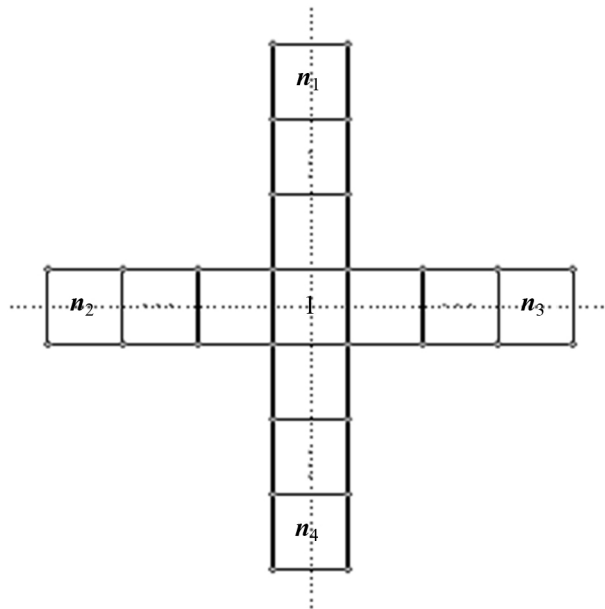


Figure 2. “X” type ladderlike graph XL_{n_1, n_2, n_3, n_4}

图 2. “X”型梯状图 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4}

我们称从交叉方格子处向上、向左、向右、向下方向的边中与虚线相交的边均为竖直边, 在完美匹配中的竖直边称为竖直匹配边; 其余边为水平边, 在完美匹配中的水平边称为水平匹配边。

定义 4: 当“X”型梯状图的 $n_4 = 1$ 时, 我们把这样的退化“X”型梯状图称为“T”型梯状图(如图 3 所示), 记为 $TL_{n_1, n_2, n_3} = XL_{n_1, n_2, n_3, 1}$ 。

引理 3: 若 M 是 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 或 TL_{n_1, n_2, n_3} 的完美匹配, 则其水平匹配边必成对出现, 即(非交叉)方格子中的两条相对水平边同时在 M 中。

证明: 设 M 是 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的完美匹配, 若 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的某一对水平边 $e \in M, e' \notin M$, 则整个图无竖直匹配边且至少存在两个 M -非饱和的点, 与 M 是 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的完美匹配矛盾, 所以 $e \in M$ 时必有与其相对应的 $e' \in M$ 。

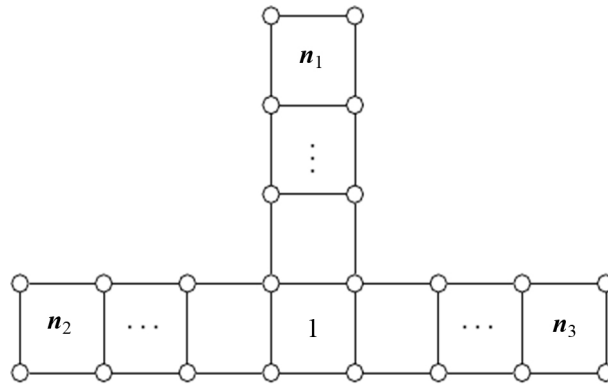


Figure 3. "T" type ladderlike graph TL_{n_1, n_2, n_3}

图 3. "T" 型梯状图 TL_{n_1, n_2, n_3}

因 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 是平面二部图，由引理 1 易知有下面的结论。

引理 4: 若 G 是方格子链 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 或 TL_{n_1, n_2, n_3} ， M 是 G 的完美匹配，水平边 $e \notin M$ ，若存在 G 的最大 M -相容交错集使其中的所有 M -交错圈都不包含边 e ，则我们就可以从该方格子将 G 分解开来，即从 G 中删去边 e 和对边 e' ，不妨记分解得到的图为 G_1, G_2 ， $M \cap E(G_1) = M_1$ ， $M \cap E(G_2) = M_2$ ，则有

$$af(G, M) = af(G_1, M_1) + af(G_2, M_2)$$

我们可以对交叉方格子的四个顶点，多次应用定理 1，从而将 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的完美匹配分为 8 小类(如图 4 所示)：

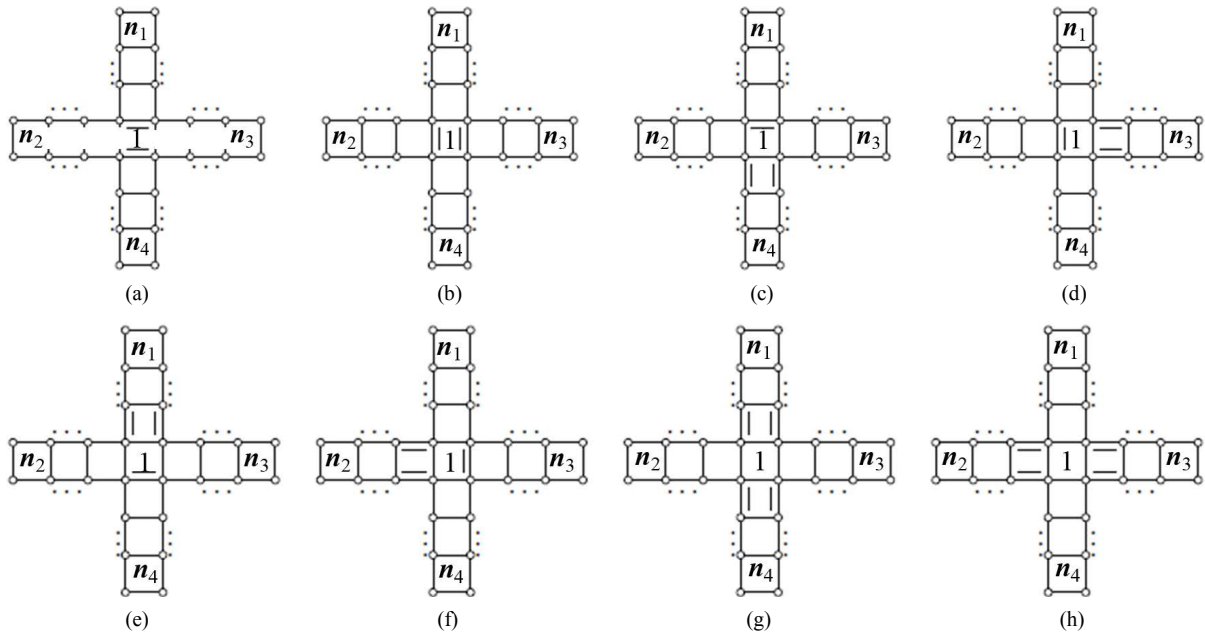


Figure 4. The 8 small class matching method of XL_{n_1, n_2, n_3, n_4}

图 4. XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的 8 小类匹配方式

其中，(b)可以通过旋转得到(a)，同样(c)可以由(d)、(e)、(f)得到，(g)可以由(h)得到，因此我们将八小类匹配通过旋转得到 3 类，记(a)、(b)为类型 1，(c)、(d)、(e)、(f)为类型 2，(g)、(h)为类型 3。

易知, TL_{n_1, n_2, n_3} 的完美匹配分为 6 小类(如图 5 所示):

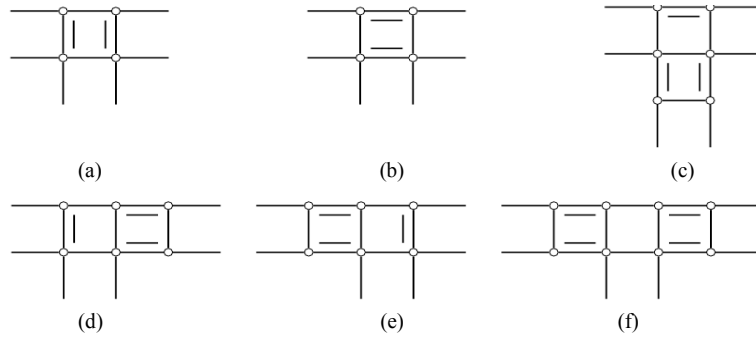


Figure 5. The 6 small class matching method of TL_{n_1, n_2, n_3}

图 5. TL_{n_1, n_2, n_3} 的 6 小类匹配方式

其中, (a)、(b)为类型 1, (c)、(d)、(e)为类型 2, (f)为类型 3。

定理 7: XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的反强迫多项式满足

$$\begin{aligned}
 P(XL_{n_1, n_2, n_3, n_4}, x) &= \sum_{i=1}^4 \sum_{\substack{M \in \mathcal{M} \\ e_i \in M}} x^{af(XL_{n_1, n_2, n_3, n_4}, M)} = P_{n_2}^*(L_{n_2+n_3}, x) P_1(L_{n_1}, x) P_1(L_{n_4}, x) \\
 &+ P_{n_1}^*(L_{n_1+n_4}, x) P_1(L_{n_2}, x) P_1(L_{n_3}, x) + xP(L_{n_1-1}, x) P(L_{n_4-1}, x) P_1(L_{n_2}, x) P_1(L_{n_3-1}, x) \\
 &+ xP(L_{n_1-1}, x) P(L_{n_4-1}, x) P_1(L_{n_2}, x) P_1(L_{n_3-1}, x) + xP(L_{n_1-1}, x) P(L_{n_4-1}, x) P_1(L_{n_2-1}, x) P_1(L_{n_3}, x) \\
 &+ xP(L_{n_1-1}, x) P(L_{n_4-1}, x) P_1(L_{n_2-1}, x) P_1(L_{n_3}, x) + xP(L_{n_2-1}, x) P(L_{n_3-1}, x) P_1(L_{n_1-1}, x) P_1(L_{n_4}, x) \\
 &+ xP_{n_2-1}^*(L_{n_2+n_3-2}, x) P_{af}(L_{n_1-1}, x) P_{af}(L_{n_4-1}, x) + xP_{n_1-1}^*(L_{n_1+n_4-2}, x) P(L_{n_2-1}, x) P(L_{n_3-1}, x)
 \end{aligned}$$

证明: 根据前面的分类情况, 分别计算 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的三种类型的反强迫多项式, 然后按照旋转方式适当调整一下参数的下标即可。称一个匹配交错圈跨过一个方格子, 若该匹配交错圈恰包含该方格子上的两条边。

情形 1: 不妨设完美匹配方式如图 6, 此时存在水平方向跨过交叉方格子且与交叉方格子相容的 M -交错圈, 不存在以其他方式跨过交叉方格子的 M -交错圈, 因此根据引理 4 有以下分解(这里我们用图本身来表示其反强迫多项式, 下同)

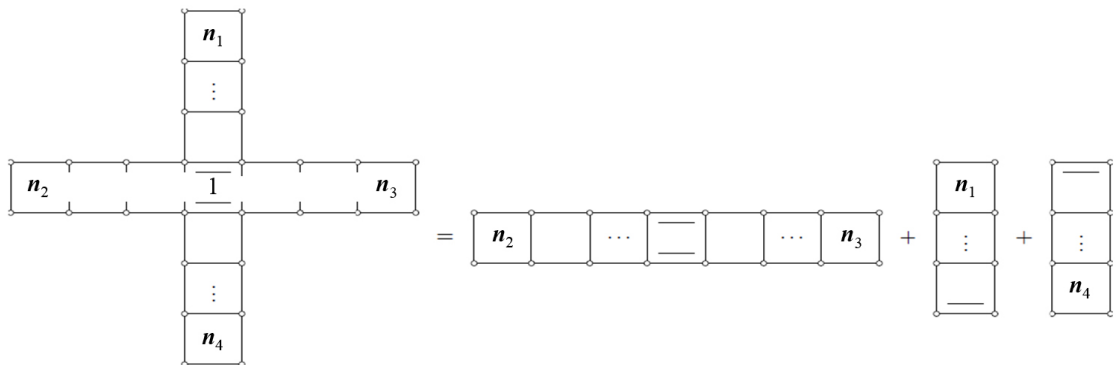


Figure 6. A breakdown diagram of XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} when there is a Type 1 match

图 6. 具有类型 1 匹配时的 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 分解示意图

故而有

$$P_{n_2}^*(L_{n_2+n_3}, x)P_1(L_{n_1}, x)P_1(L_{n_4}, x).$$

情形 2: 不妨设完美匹配方式如图 7, 此时不存在以任何跨过交叉方格子的 M -交错圈(但可能包含交叉方格子的 3 条或 4 条边), 故根据引理 4 有以下分解

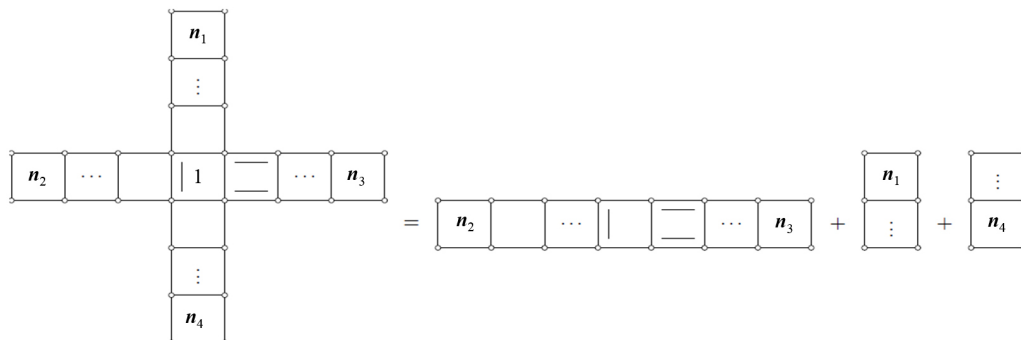


Figure 7. A breakdown diagram of XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} when there is a Type 2 match

图 7. 具有类型 2 匹配时 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的分解示意图

故而有

$$xP(L_{n_1-1}, x)P(L_{n_4-1}, x)P_1(L_{n_2}, x)P_1(L_{n_3-1}, x).$$

情形 3: 不妨设完美匹配方式如图 8, 此时存在竖直方向跨过交叉方格子且与交叉方格子相容的 M -交错圈, 不存在以任何跨过交叉方格子的 M -交错圈, 故根据引理 4 有以下分解

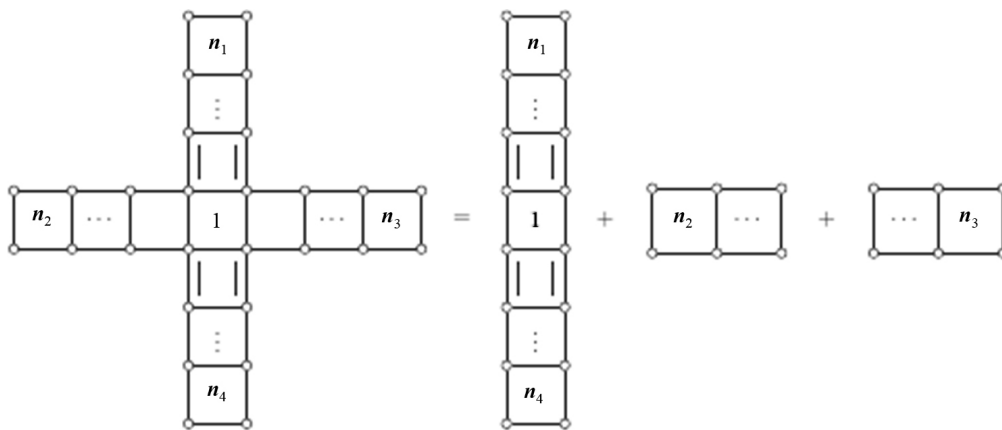


Figure 8. A breakdown diagram of XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} when there is a Type 3 match

图 8. 具有类型 3 匹配时 XL_{n_1, n_2, n_3, n_4} 的分解示意图

故而有

$$xP_{n_1-1}^*(L_{n_1+n_4-2}, x)P(L_{n_2-1}, x)P(L_{n_3-1}, x).$$

综上, 定理得证。

特别的, 当 $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$ 时, 有

推论 5: $XL_{n, n, n, n}$ 的反强迫多项式满足

$$P(XL_{n,n,n,n}, x) = \begin{cases} \left[2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right]^4 + 4x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right] \right. \\ \left. \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} \right] + 2x \left[x^2 \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-3} \right]^2 + 2x^{\frac{n}{2}} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-3} \right] + x^{n-1} \right] \\ \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right]^2, n \text{ 为偶数;} \\ \left. \left[2 \left[x^2 \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right]^2 + 2x^{\frac{n+1}{2}} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right] + x^n \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right]^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} + x^{\frac{n-1}{2}} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + 2x^3 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-3} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} + x^{\frac{n-1}{2}} \right]^2, n \text{ 为奇数.} \right. \end{cases}$$

推论 6: 梯状图 $XL_{n,n,n,n}$ 的完美匹配的个数为 $2F(n)^2 F(n+1)^2$ 。

证明: 通过引理 2 和上述推论进行证明: 上述推论中, 当 $x=1$ 时, 可得 $XL_{n,n,n,n}$ 的完美匹配的个数。

若 n 是偶数, 则

$$\begin{aligned} & 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^4 + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right]^2 + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] + 1 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 \\ & 4 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] \\ & = 2F(n)^4 + 4F(n)^2 F(n)F(n-1) + 2F(n-1)^2 F(n)^2 \\ & = 2F(n)^2 (F(n)^2 + 2F(n)F(n-1) + F(n-1)^2) = 2F(n)^2 F(n+1)^2 \end{aligned}$$

若 n 是奇数, 则

$$\begin{aligned} & 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] + 1 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 + 4 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} + 1 \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \\ & \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} + 1 \right]^2 \\ & = 2F(n)^2 F(n)^2 + 4F(n)^2 F(n)F(n-1) + 2F(n-1)^2 F(n)^2 = 2F(n)^2 F(n+1)^2 \end{aligned}$$

综上, $XL_{n,n,n}$ 的完美匹配的个数为 $2F(n)^2 F(n+1)^2$ 结论成立。

由定义知 TL_{n_1,n_2,n_3} 是 XL_{n_1,n_2,n_3,n_4} 的 $n_4=1$ 的特例。

推论 7: TL_{n_1,n_2,n_3} 的反强迫多项式满足

$$\begin{aligned}
 P(XL_{n_1,n_2,n_3}, x) &= P_{n_2}^*(L_{n_2+n_3}, x)P_1(L_{n_1}, x) + xP(L_{n_1-1}, x)P_1(L_{n_2}, x)P_1(L_{n_3}, x) \\
 &\quad + xP_1(L_{n_1-1}, x)P(L_{n_2-1}, x)P(L_{n_3-1}, x) + xP(L_{n_1-1}, x)P_1(L_{n_2}, x)P_1(L_{n_3-1}, x) \\
 &\quad + xP(L_{n_1-1}, x)P_1(L_{n_2-1}, x)P_1(L_{n_3}, x) + xP_{n_2-1}^*(L_{n_2+n_3-2}, x)P(L_{n_1-1}, x)
 \end{aligned}$$

推论 8: $TL_{n,n,n}$ 的反强迫多项式为

$$P(TL_{n,n,n}, x) = \begin{cases} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right]^3 + x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right]^2 \\ + x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right]^2 + 2x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right] \\ \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} \right] \\ + x \left[x^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-3} \right]^2 + 2x^{\frac{n}{2}} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-3} \right] + x^{n-1} \right] \\ \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right], n \text{ 为偶数;} \\ x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} + x^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right]^2 \right] \\ + \left[x^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right]^2 + 2x^{\frac{n+1}{2}} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} \right] + x^n \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right] \right] \\ + x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} + x^{\frac{n-1}{2}} \right]^2 \\ + 2x \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} + x^{\frac{n-1}{2}} \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-1} \right] \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-2} \right] \\ + x^3 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} x^{n-q-3} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} x^{n-q-2} + x^{\frac{n-1}{2}} \right], n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

推论 9: 梯状图 $TL_{n,n,n}$ 的完美匹配的个数为 $F(n)F(n+1)F(n+2)$ 。

证明: 通过引理 2 和上述推论进行证明: 上述推论中, 当 $x=1$ 时, 可得 $TL_{n,n,n}$ 的完美匹配的个数。

若 n 是偶数, 则

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^3 + \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 + \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 \\
 & + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] \\
 & + \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right]^2 + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] + 1 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \\
 & = F(n)^3 + F(n)^3 + F(n-1)F(n)^2 + 2F(n)^2 F(n-1) + F(n-1)^2 F(n) \\
 & = 2F(n)^3 + 3F(n)^2 F(n-1) + F(n)F(n-1)^2 \\
 & = F(n)(F(n)+F(n-1))(F(n+1)+F(n)) \\
 & = F(n)F(n+1)F(n+2)
 \end{aligned}$$

若 n 是奇数, 则

$$\begin{aligned}
 & \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} + 1 \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 + \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right]^2 + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] + 1 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \\
 & + \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} + 1 \right]^2 + 2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} + 1 \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} \right] \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right] \\
 & + \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor} \binom{n-2-q}{q} \right]^2 \left[\sum_{q=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \binom{n-1-q}{q} + 1 \right] \\
 & = F(n)^3 + F(n)^3 + F(n-1)F(n)^2 + 2F(n)^2 F(n-1) + F(n-1)^2 F(n) \\
 & = F(n)F(n+1)F(n+2)
 \end{aligned}$$

综上所述, $TL_{n,n,n}$ 的完美匹配的个数为 $F(n)F(n+1)F(n+2)$ 。

注: 梯状图 $XL_{n,n,n}$ 的完美匹配个数 $2F(n)^2 F(n+1)^2$ 和 $TL_{n,n,n}$ 的完美匹配个数 $F(n)F(n+1)F(n+2)$ 是两个已知的序列, 在 OEIS [22] 中的编号分别为 A060635 和 A065563, 前一个序列在该网站上的解释是一个特殊图方格子图的二米诺覆盖方式数, 其实就是梯状图 $XL_{n,n,n}$ 的完美匹配的个数, 而后一序列网站上没有组合解释, 推论 9 给出了其中一个组合解释。

基金项目

国家自然科学基金(11401475)。

参考文献

- [1] Li, X.L. (1997) Hexagonal Systems with Forcing Single Edges. *Discrete Applied Mathematics*, **72**, 295-301. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(95\)00116-9](https://doi.org/10.1016/0166-218X(95)00116-9)
- [2] Vukičević, D. and Trinajstić, N. (2007) On the Anti-Forcing Number of Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **42**, 575-583. <https://doi.org/10.1007/s10910-006-9133-6>
- [3] Vukičević, D. and Trinajstić, N. (2008) On the Anti-Kekule Number and Anti-Forcing Number of Cata-Condensed Benzenoids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **43**, 719-726. <https://doi.org/10.1007/s10910-006-9223-5>
- [4] Lei, H.C., Yeh, Y.N. and Zhang, H.P. (2016) Anti-Forcing Numbers of Perfect Matchings of Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **202**, 95-105. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2015.08.024>
- [5] Deng, H.Y. (2008) The Anti-Forcing Number of Hexagonal Chains. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 58675-58682.
- [6] Deng, H.Y. (2008) The Anti-Forcing Number of Double Hexagonal Chains. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **60**, 183-192.
- [7] Zhang, Q., Bian, H. and Vumar, E. (2011) On the Anti-Kekule Number and Anti-Forcing Number of Cata Condensed Phenylenes. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **65**, 799-806.
- [8] 蒋晓艳, 程晓胜. 硼氮富勒烯图的反强迫数[J]. 湖南师范学院学报(自然科学版), 2013, 33(3): 28-30.
- [9] Zhang, F.J. and Liu, Y.T. (1993) Estimation of the Resonance Energy of Benzenoid Hydrocarbon. *Chinese Science Bulletin*, **38**, 2040-2043.
- [10] Klein, D.J. and Rosenfeld, V. (2014) Forcing, Freedom, & Uniqueness in Graph Theory & Chemistry. *Croatica Chemica Acta*, **87**, 49-59. <https://doi.org/10.5562/cca2000>
- [11] Deng, K. and Zhang, H.P. (2017) Anti-Forcing Spectrum of Any Cata-Condensed Hexagonal System Is Continuous. *Frontiers of Mathematics in China*, **12**, 325-337. <https://doi.org/10.1007/s11464-016-0605-0>
- [12] Deng, K. and Zhang, H.P. (2015) Anti-Forcing Spectrum of Perfect Matchings of Graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, **33**, 660-680. <https://doi.org/10.1007/s10878-015-9986-3>
- [13] Shi, L.J. and Zhang, H.P. (2016) Forcing and Anti-Forcing Numbers of (3,6)-Fullerenes. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **76**, 597-614.
- [14] Hwang, H.-K., Lei, H.C., Yeh, Y.-N. and Zhang, H.P. (2015) Distribution of Forcing and Anti-Forcing Numbers of Random Perfect Matchings on Hexagonal Chains and Crowns. <http://140.109.74.92/hk/?p=873>
- [15] Zhao, S. and Zhang, H.P. (2019) Forcing and Anti-Forcing Polynomials of Perfect Matchings for Some Rectangle Grids. *Journal of Mathematical Chemistry*, **57**, 202-225. <https://doi.org/10.1007/s10910-018-0944-z>
- [16] 赵爽. 关于一些图类的强迫和反强迫多项式的研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2018.
- [17] 韩振云, 王杰彬. 梯子图的完美匹配的反强迫谱与斐波那契数列[J]. 兰州工业学院学报, 2020, 27(1): 85-90.
- [18] 姚海元, 王杰彬, 王旭. 循环梯状图的完美匹配的反强迫谱与卢卡斯数[J]. 西北师范大学学报(自然科学版), 2018, 54(2): 21-25.
- [19] 韩振云, 姚海元. 删边梯子图和“L”型梯子图的反强迫数[J]. 应用数学进展, 2019, 8(8): 1352-1361.
- [20] Koshy, T. (2001) Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Wiley, New York.
- [21] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1988: 22.
- [22] Sloane, N.J.A. (2020) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://oeis.org/>