

四种逼近型细分算法对比研究及应用

李万华¹, 王晓红^{2*}, 代友林¹

¹贵州大学矿业学院, 贵州 贵阳

²贵州大学林学院, 贵州 贵阳

Email: *2294009749@qq.com

收稿日期: 2020年12月14日; 录用日期: 2021年1月3日; 发布日期: 2021年1月19日

摘要

曲面细分作为生成平滑表面的重要手段, 已广泛应用于计算机图形学。在实体建模中, 多边形网格虽然可以表示物体形状, 但在实际采样中由于采样的不均匀性或物体的遮挡等导致获得的初始网格不够光滑, 难以表达曲面的真实形状, 而曲面细分可以有效解决网格光滑问题。近年来, 有些逼近型细分算法, 在经典算法的基础上通过改变细分规则, 实现了某些效果或者控制了网格的数量, 但是其应用的广泛性和普适性较低。本文选取了经典的逼近型Catmull-Clark细分法、Doo-Sabin细分法、Loop细分法和 $\sqrt{3}$ 细分法进行了对比实验, 并阐述了各细分算法的适用范围。此外, 基于贪婪算法对采集到的真实数据进行重建, 得到初始三角网格; 然后, 根据细分算法特点, 采用Loop细分对初始三角网格进行细分, 最后得到光顺的细分曲面。

关键词

Catmull-Clark细分, Doo-Sabin细分, Loop细分, $\sqrt{3}$ 细分

Comparative Research and Application of Four Approximation Subdivision Algorithms

Wanhua Li¹, Xiaohong Wang^{2*}, Youlin Dai¹

¹College of Mining, Guizhou University, Guiyang Guizhou

²College of Forestry, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Email: *2294009749@qq.com

Received: Dec. 14th, 2020; accepted: Jan. 3rd, 2021; published: Jan. 19th, 2021

*通讯作者。

Abstract

As an important means of generating smooth surfaces, surface subdivision has been widely used in computer graphics. In solid modeling, although the polygon mesh can represent the shape of the object, the initial mesh obtained in actual sampling is not smooth enough due to the unevenness of the sampling or the occlusion of the object, and it is difficult to express the true shape of the surface. Surface subdivision can effectively solve the problem of mesh smoothness. In recent years, some approximation subdivision algorithms have achieved certain specific effects or controlled the number of grids by changing subdivision rules on the basis of classic algorithms, but their application versatility and universality are low. This paper selects the classic approximation Catmull-Clark subdivision, Doo-Sabin subdivision, Loop subdivision and Sqrt3 subdivision for comparative experiments, and explains the applicable scope of each subdivision algorithm. In addition, based on the greedy algorithm, the collected real data is reconstructed to obtain the initial triangle mesh; then, according to the characteristics of the subdivision algorithm, the loop subdivision algorithm is used to subdivide the initial triangle mesh, and finally a smooth subdivision surface is obtained. As an important means of generating smooth surfaces, surface subdivision has been widely used in computer graphics.

Keywords

Catmull-Clark Subdivision, Doo-Sabin Subdivision, Loop Subdivision, $\sqrt{3}$ Subdivision

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

细分曲面以一个给定的相对粗糙的初始多边形网格作为输入数据, 根据相应的细分规则, 通过迭代细化过程, 生成顶点稠密的控制网格, 同时细分表面也变得更加平滑。由于其理想的属性, 例如多分辨率, 局部可控性, 仿射不变性和全局连续性等, 使得细分曲面已广泛应用于许多领域[1], 例如计算机图形, 计算机动画和曲面模型构建等。

迄今为止, 已经提出了许多不同的方法, 根据细分曲面与控制网格的关系, 可以将细分方法分为两类, 即逼近型细分和插值型细分。经典的插值型细分是在每次细分操作后始终在精炼网格中包含旧顶点, 其中最经典的是 Butterfly 细分算法[2]及其改进算法[3]都属于此类, 该方法生成的极限曲面将包含所有原始顶点。文献[4]提出了一种基于局部细化操作的四边形网格统一插值细分算法。文献[5]提出了一种混合非均匀递归细分方案, 以支持等几何分析, 并提高了收敛速度。典型的逼近型细分算法有 Catmull-Clark 细分[6]、Doo-Sabin 细分[7], Loop 细分[8]以及 $\sqrt{3}$ 细分[9]。其中 Loop 细分和 $\sqrt{3}$ 细分是较为常见的三角形网格细分, 而 Catmull-Clark、Doo-Sabin 细分则是常见的四边形网格细分。在此基础上, 一些学者对逼近型曲面细分方法进行了进一步的研究。文献[10]通过修改细分规则, 拓展了 Doo-Sabin 细分, 使其适用于具有尖锐特征的曲面。文献[11]通过专用内核替换, 优化了算法的性能。文献[12]通过改变细分准则来提高算法的效率。文献[13]通过插值曲面法向量来提高曲面的光顺性。

虽然改进的逼近型细分算法众多, 但经典细分方法因其几何规则、拓扑规则以及理论相对简单且容

易控制，所以得到了广泛的应用。因此，本文重点介绍了四种逼近细分算法，通过实际应用，对其细分效果进行了分析讨论。

2. 细分算法原理

2.1. Catmull-Clark 细分

Catmull-Clark 细分作为双三次 B 样条的扩展，是一种四边形网格的近似细分，通过将每个面分为四个子面来生成新的控制网格，其由新面点、新边点和新顶点构成。采用 Catmull-Clark 细分算法得到的曲面在规则点处具有 c^2 ，在不规则点处 c^1 连续。

2.1.1. 几何规则

设每个面细分所产生的新面点为 F-点，每个边生成的新边点为 E-点，每个点生成的新顶点为 V-点，则 Catmull-Clark 曲面细分的几何规则如下：

1) F-点：设四边形网格的 4 个原顶点为 v_1 、 v_2 、 v_3 、 v_4 如图 1(a)所示，则每个面上控制点的几何平均即为 F-点，可表示为：

$$v_F = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \tag{1}$$

2) E-点：设 2 个网格公共边的顶点为 v_0 、 v_1 ，其他顶点为 v_2 、 v_3 、 v_4 、 v_5 如图 1(b)所示，则公共边上的两个点和两个面控制点的几何平均即为新边点 E-点，可表示为：

$$v_E = \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{16}(v_2 + v_3 + v_4 + v_5) \tag{2}$$

边界情况：对于边界边如图 1(d)所示，设原顶点为 v_0 、 v_1 ，则

$$v_E = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) \tag{3}$$

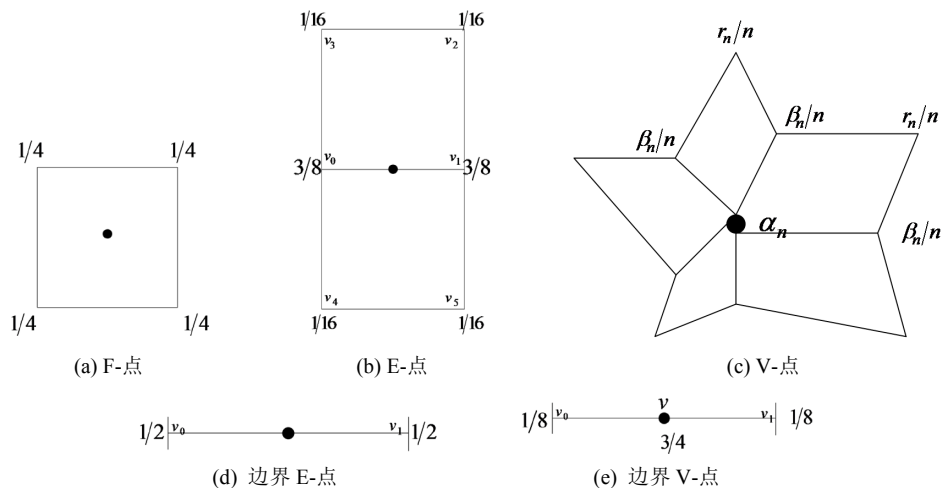


Figure 1. Surface subdivision geometric rules of Catmull-Clark
图 1. Catmull-Clark 曲面细分几何规则

3) V-点：设图 1(c)中网格原顶点为 v_1 、 v_2 、 v_3 、 \dots 、 $v_{2i\pm 1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$)，则新顶点 V-点可表示为：

$$v_V = \alpha_n + \frac{\beta_n}{n} \sum_{i=0}^{2n-1} v_{2i} + \frac{\gamma_n}{n} \sum_{i=0}^{2n-1} v_{2i+1} \quad (4)$$

式中: v_{2i} 为与原控制点共边的相邻顶点, v_{2i+1} 是同一四边形的对角点。系数 $\beta_n = \frac{3}{2n}$, $\gamma_n = \frac{1}{4n}$,

$\alpha_n = 1 - \beta_n - \gamma_n$ 。

边界情况: v 是边界点, 与其相邻的两个边界点为 v_0 、 v_1 如图 1(e) 所示, 则新边界点为:

$$v_V = \frac{1}{8}(v_0 + v_1) + \frac{3}{4}v \quad (5)$$

2.1.2. 拓扑规则

Catmull-Clark 细分的拓扑规则如图 2 所示。其中图 2(a) 为原始网格, 按照曲面细分几何规则生成新面点 F-点、新边点 E-点和新顶点 V-点, 依次将每个面的 F-点连接到该面中每条边的 E-点, 然后将新顶点 V-点连接相邻的 E-点, 由此生成一个新的加密网格如图 2(b) 所示, 至此完成一次细分。循环上述计算, 形成不断细分的网格。

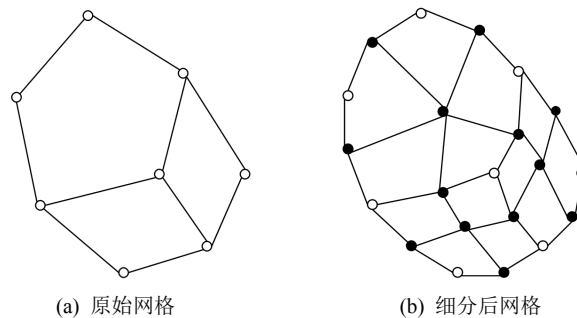


Figure 2. Topological structure of Catmull-Clark subdivision
图 2. Catmull-Clark 细分拓扑结构

2.2. Doo-Sabin 细分

1) 几何规则: 对于初始控制网格 M^k , 其中任意一个多边形 P^k 的顶点 V_i^k ($0 \leq i \leq n$), 细分后对应的多边形为 P^{k+1} , 每个顶点 V_i^{k+1} :

$$V_i^{k+1} = \sum_{j=1}^n \omega_{ij} V_j^k \quad (j = 0, \dots, n) \quad (6)$$

其中

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{4n}(n+5), & i = j \\ \frac{1}{4n}(3 + 2\cos(2\pi(i-j)/n)), & i \neq j \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (7)$$

2) 拓扑规则

- A: 对初始控制网格 M^k 的每个顶点 V_i^k 采用上式(6)生成新的顶点 V_i^{k+1} ;
- B: 依次连接控制网格 M^k 的每个面中的所有新生成的顶点 V_i^{k+1} 得到 F-面;
- C: 依次连接控制网格 M^k 的每个边两边面所对应的新顶点 V_i^{k+1} 得到 E-面;
- D: 依次连接控制网格 M^k 的每个点新生成点的顶点 V_i^{k+1} 得到 V-面。

Doo-Sabin 细分拓扑结构如图 3 [14] 所示。

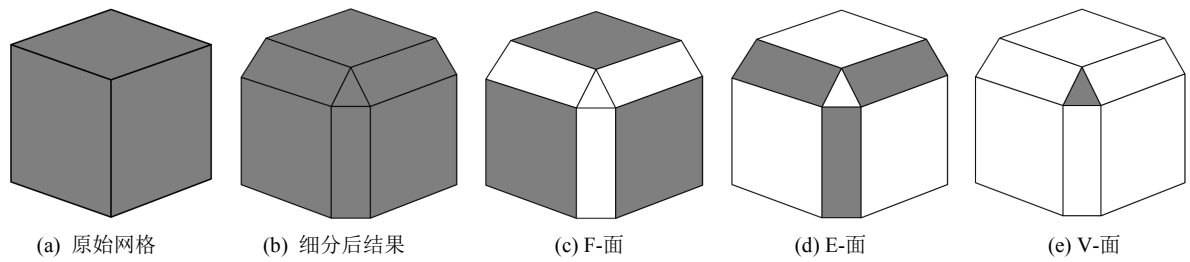


Figure 3. Topological structure of Doo-Sabin subdivision
图 3. Doo-Sabin 细分拓扑结构

2.3. Loop 细分

2.3.1. 几何规则

设每条边上插入的新顶点为 E-点, 由原顶点生成顶点为 V-点, 则:

1) V-点: 对于内部顶点 v , 与其相邻的顶点为 v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , 则 V-点由原顶点和其邻域内的顶点加权求和, 可表示为:

$$v_v = (1 - n\beta)v_0 + \beta \sum_{i=1}^n v_i \quad (8)$$

其中, 系数 β 由如下公式定义:

$$\beta = \begin{cases} \frac{3}{16}, & k=3; \\ \beta = \frac{1}{n} \left[\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \frac{2\pi}{n} \right)^2 \right] & (n > 3), k > 3. \end{cases} \quad (9)$$

2) E-点: 对于内部边, 设 2 个三角形的公共边所对应的顶点为 v_0, v_1 , 其他顶点为 v_2, v_3 , 则 E-点为:

$$v_E = \frac{3}{8}(v_0 + v_1) + \frac{1}{8}(v_2 + v_3) \quad (10)$$

边界 E-点和边界 V-点同 Catmull-Clark 细分。

Loop 曲面细分几何规则如图 4 [15]所示。

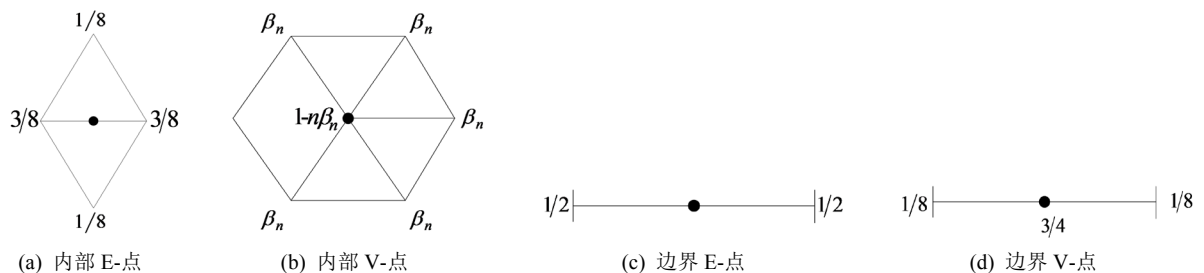


Figure 4. Surface subdivision geometric rules of Loop
图 4. Loop 曲面细分几何规则

2.3.2. 拓扑规则

按照上述细分的几何规则, 将每次细分后得到新顶点和新边点连接, 生成新的拓扑结构和控制网格, 拓扑规则如图 5 所示:

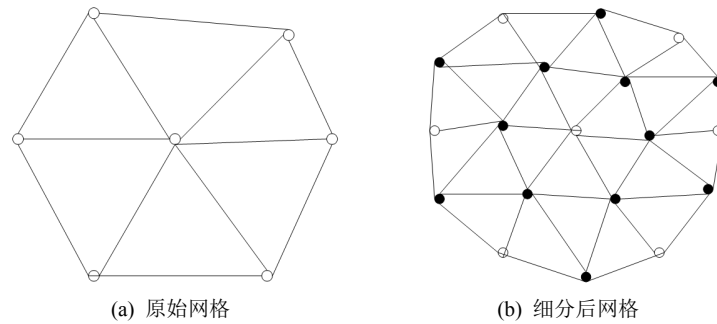


Figure 5. Topological structure of Loop subdivision
图 5. Loop 细分拓扑结构

2.4. $\sqrt{3}$ 细分

以上介绍的三种细分方法, 每细分一次后的面片数是上一次的 4 倍, 而 $\sqrt{3}$ 细分是细分后的面片数是原来的 3 倍的细分, 该细分方法增长速度较小, 其几何规则和拓扑规则如下:

2.4.1. 几何规则

(1) F-点: 设原面片 3 顶点为 v_1, v_2, v_3 , 则新插入的中心点 F-点为:

$$V_F = \frac{1}{3}(v_1 + v_2 + v_3) \quad (11)$$

(2) V-点: 设与原顶点 v 相邻的顶点为 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$, 则新顶点 V_v 为:

$$V_v = (1 - a_n)v + \frac{a_n}{n} \sum_{i=1}^n v_i \quad (12)$$

其中, a_n 的求解公式如下:

$$a_n = \frac{1}{9} \left(4 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \right) \quad (13)$$

2.4.2. 拓扑规则

每次细分后, 三角形生成一个 F-点和 V-点, 分别连接 F-点及其三个 V-点, 之后去掉原三角形的内部边, 则得到网格数量为细分前 3 倍的新网格, 其拓扑规则如图 6 所示:

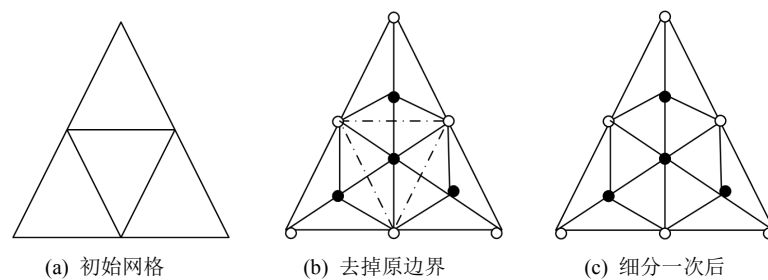


Figure 6. Topological structure of $\sqrt{3}$ subdivision
图 6. $\sqrt{3}$ 细分拓扑结构

3. 对比实验与讨论分析

本文在 Intel(R) Core(TM) i5-4200U CPU, 1.6 GHz, 安装内存(RAM) 8 GB, window7 64 位操作系统

配置环境下，利用 Visual studio 2015 实现了四种细分算法。本文选取 Pig 模型和 Cross 模型进行算法的对比，并采用实际风机数据进行 Loop 细分。

3.1. 对比结果分析

1) 逼近程度：上述几种算法都是逼近式细分，其中 Catmull-Clark 细分、Loop 细分和 $\sqrt{3}$ 细分是面分裂细分，而 Doo-Sabin 细分是逼近型的点分裂模式。就逼近程度来说，从图 7~10 可以看出，经过相同的细分次数，Doo-Sabin 细分相比于 Catmull-Clark 和 Loop 细分更加逼近于初始控制网格，尤其是在网格变化剧烈的地方，如 Cross 的拐角处。

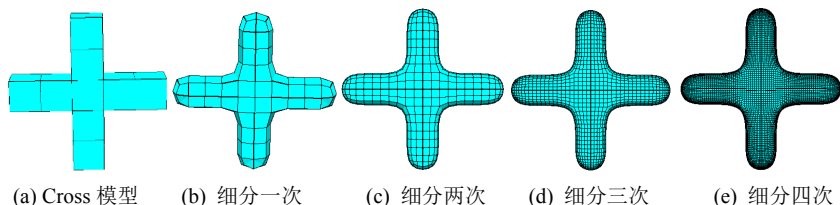


Figure 7. Surface subdivision process and result of Cross model by Catmull-Clark

图 7. Cross 模型 Catmull-Clark 细分过程及结果

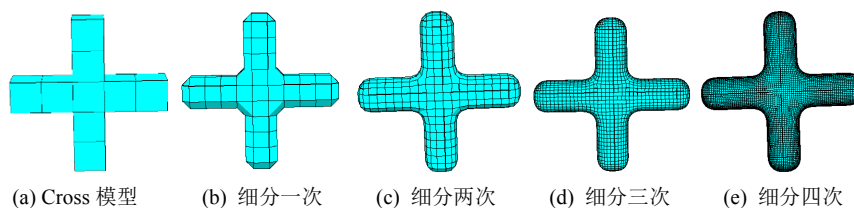


Figure 8. Surface subdivision process and result of Cross model by Doo-Sabin

图 8. Cross 模型 Doo-Sabin 细分过程及结果

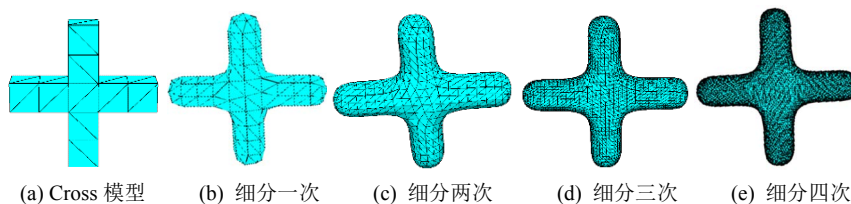


Figure 9. Surface subdivision process and result of Cross model by Loop

图 9. Cross 模型 Loop 细分过程及结果

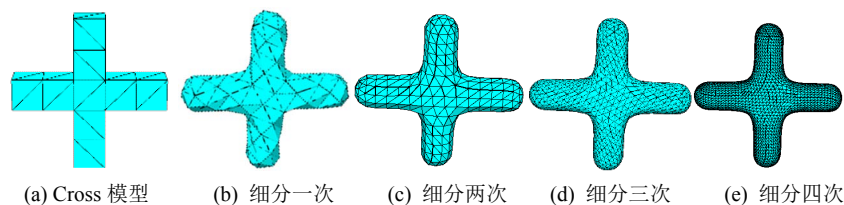


Figure 10. Surface subdivision process and result of Cross model by $\sqrt{3}$

图 10. Cross 模型 $\sqrt{3}$ 细分过程及结果

2) 细分曲面的质量：Catmull-Clark 细分是针对于四边形网格的细分，故对初始模型为四边形网格的模型有较好的效果，如图 7(e)所示。如下图 11(b)、图 11(c)和图 12(a)所示，Catmull-Clark、Doo-Sabin 细

分算法对原始网格为三角形的 Pig 模型进行细分, 相比于 Loop 细分其光顺性较差。从图 12、图 13 的细节信息可以看出经过相同次数的细分后, Loop 细分后模型的质量更高。而对于任意网格都可以转化为三角形网格, 因此 Loop 细分算法适用范围较广。

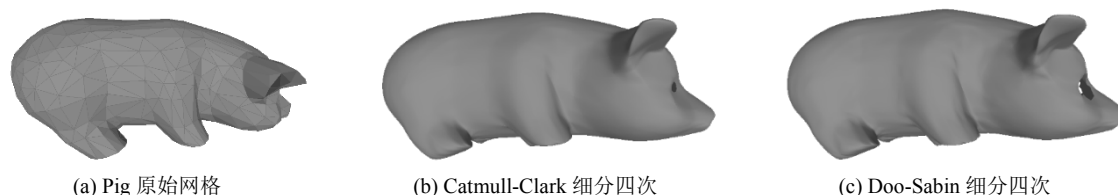


Figure 11. Surface subdivision result of Pig model by Catmull-Clark and Doo-Sabin

图 11. Pig 模型 Catmull-Clark 和 Doo-Sabin 细分结果

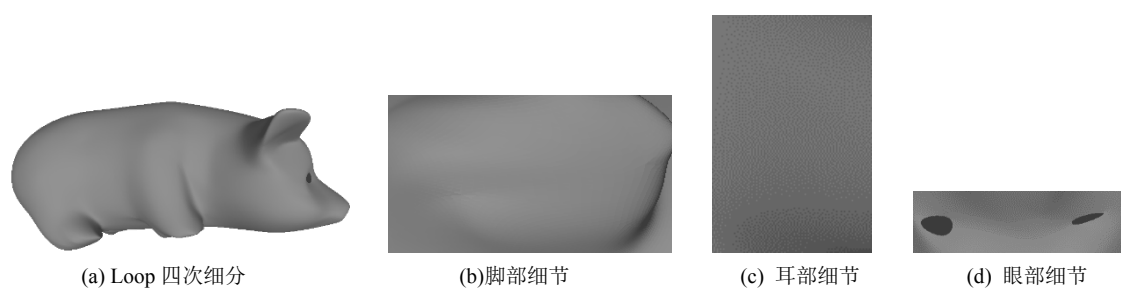


Figure 12. The Loop subdivision effect diagram of the Pig model and its detailed display

图 12. Pig 模型的 Loop 细分效果图及其细节展示

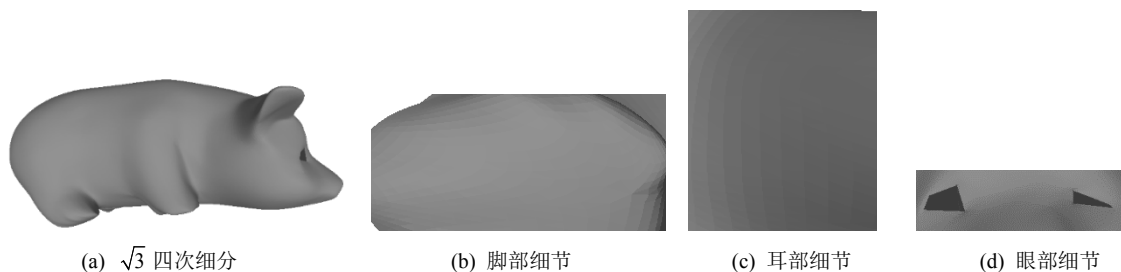


Figure 13. The $\sqrt{3}$ subdivision effect diagram of the Pig model and its detailed display

图 13. Pig 模型的 $\sqrt{3}$ 细分效果图及其细节展示

3) 细分的复杂度: 对比 Loop 细分和 $\sqrt{3}$ 细分应用于 Cross 和 Pig 模型的效果, 从图 9、图 10 可以看出, 细分相同的次数后, $\sqrt{3}$ 细分得到的网格较稀疏。在前三次细分时, Loop 细分和 $\sqrt{3}$ 细分在运行效率上相当, 而在第四次细分时, $\sqrt{3}$ 细分算法的运行效率明显较高。Pig 模型的初始点数为: 468, 初始网格数为: 927。从表 1 也可看出, Loop 细分算法细分一次, 三角网格面片的数量是上次的 4 倍, 而 $\sqrt{3}$ 细分算法细分一次后三角形的数量是细分前 3 倍, 这不仅大幅度减少了新增三角形的数量, 同时也提高了细分的效率。

根据上述的讨论, 我们应从初始网格形状、细分曲面的质量和细分曲面的数量三方面来选择一个最合适的细分方法。如果初始网格为四边形, 则可以选择 Catmull-Clark 细分或 Doo-Sabin 细分算法, 如若是三角形网格则选择 Loop 细分或 $\sqrt{3}$ 细分算法; 如若要求细分后的面片数较少, 则可以选择 $\sqrt{3}$ 细分算法; 如果要求细分后的光顺性较好, 则可以选择 Loop 细分或 Catmull-Clark 细分。

Table 1. The running time, the number of output points and triangles of the Pig model after subdivision four times
表 1. Pig 模型细分四次的运行时间、细分后的输出点数、面片数

细分次数	Loop			Sqrt3		
	time(s)	输出点数	输出面片数	time(s)	输出点数	输出面片数
细分一次	2.215	1864	3708	2.317	1395	2781
细分两次	8.991	7437	14832	6.019	4176	8343
细分三次	13.912	29707	59328	9.013	12519	25029
细分四次	55.096	118783	237312	22.087	37548	75087

3.2. Loop 细分算法应用于真实数据

本实验对贵州大学的风机进行数据采集，并截取底部部分数据。因栅栏的遮挡，点云数据存在缺陷和不均匀性，点云数据如图 14(a)所示。通过贪婪算法[16]建模后，模型表面存在凹凸不平的现象，并且在点云缺失部分，重建出的表面呈现局部平面，结果如图 14(b)所示。由上述可知，Loop 细分算法针对三角形网格，生成的曲面质量较高，因此本文选用 Loop 细分算法对建模后的初始网格进行细分，来消除上述现象，结果如图 14(c)所示。细分后的风机底部更加光滑，凹凸不平的现象消失，由于数据缺失而导致的局部平面，在细分后更接近于曲面。

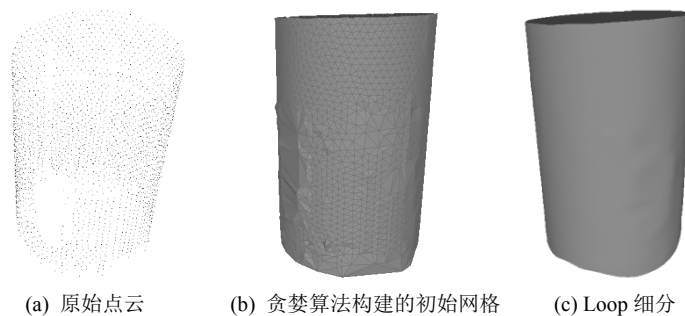


Figure 14. Loop subdivision of wind turbine model
图 14. 风机模型的 Loop 细分

4. 结论

在实际应用中，通过细分算法将低分辨率的初始网格转换为光滑的表面。本文系统的阐述了四种经典细分算法，分别对不同的模型进行对比实验，并从逼近程度、细分曲面的质量和细分的复杂度三个方面进行了算法的分析，来探究各个算法的适用情况。之后，根据各细分算法的特点，选取 Loop 细分应用于实际数据，得到了光滑性较好的结果。研究发现：Doo-Sabin 细分的逼近程度较好；四边形网格 Catmull-Clark 细分质量较高，而对于三角形的初始网格，Loop 细分算法的光滑性较好； $\sqrt{3}$ 细分后网格的数量较其他算法较少。

基金项目

国家自然科学基金(31700385)。

参考文献

- [1] Chen, L.L., Zhang, Y., Lian, H., *et al.* (2020) Seamless Integration of Computer-Aided Geometric Modeling and

- Acoustic Simulation: Isogeometric Boundary Element Methods Based on Catmull-Clark Subdivision Surfaces. *Advances in Engineering Software*, **149**, Article ID: 102879. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2020.102879>
- [2] Dyn, N., Levine, D. and Gregory, J.A. (1990) A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, **9**, 160-169. <https://doi.org/10.1145/78956.78958>
- [3] 王琪瑞, 冯毅雄, 张子贤, 程锦, 谭建荣. 基于改进型 Butterfly 细分的三角网格自由曲面环形刀具轨迹规划[J]. 计算机集成制造系统, 2016, 22(11): 2513-2521.
- [4] Deng, C. and Ma, W. (2013) A Unified Interpolatory Subdivision Scheme for Quadrilateral Meshes. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, **32**, 1-11. <https://doi.org/10.1145/2487228.2487231>
- [5] Li, X., Wei, X. and Zhang, Y.J. (2019) Hybrid Non-Uniform Recursive Subdivision with Improved Convergence Rates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **352**, 606-624. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.04.036>
- [6] Catmull, E. and Clark, J. (1978) Recursively Generated B-Spline Surfaces on Arbitrary Topological Meshes. *Computer-Aided Design*, **10**, 350-355. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90110-0](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90110-0)
- [7] Doo, D. and Sabin, M. (1978) Behaviour of Recursive Division Surfaces near Extraordinary Points. *Computer-Aided Design*, **10**, 356-360. [https://doi.org/10.1016/0010-4485\(78\)90111-2](https://doi.org/10.1016/0010-4485(78)90111-2)
- [8] Loop, C. (1987) Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles. Master's Thesis, University of Utah, Department of Mathematics, Salt Lake City.
- [9] Kobbelt, L. (2000) $\sqrt{3}$ -Subdivision. *Proceedings of the 27th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 103-112. <https://doi.org/10.1145/344779.344835>
- [10] 张湘玉, 马希青, 李明. 非均匀 Doo-Sabin 细分曲面的尖锐特征构造[J]. 计算机集成制造系统, 2015, 21(11): 2827-2836.
- [11] Mlakar, D., Winter, M., Stadlbauer, P., et al. (2020) Subdivision-Specialized Linear Algebra Kernels for Static and Dynamic Mesh Connectivity on the GPU. *Computer Graphics Forum*, **39**, 335-349. <https://doi.org/10.1111/cgf.13934>
- [12] 吴禄慎, 王启宇. 基于改进 Catmull-Clark 细分算法的曲面优化[J]. 南昌大学学报(工科版), 2020, 42(1): 64-69+75.
- [13] 张莉, 余祥荣, 葛先玉, 檀结庆. 带矩阵权值的 Catmull-Clark 细分曲面渐进插值算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2019, 31(8): 1312-1319.
- [14] 孙林. Doo-Sabin 细分方法的改进[D]: [硕士学位论文]. 合肥: 合肥工业大学, 2012.
- [15] 李继, 吴丽娟. 曲面细分模式的分类研究[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2009, 27(1): 54-58.
- [16] 贾军辉, 黄明, 刘祥磊. 基于三维狄洛尼三角网的曲面重建算法[J]. 测绘学报, 2018, 47(2): 281-290.