Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(4), 871-877
Published Online April 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.104095

Hans汉斯

无穷维序列空间的非线性宽度

贺小航，赵家锐

西华大学理学院，四川 成都
Email: 990181245@qq.com

收稿日期：2021年3月12日；录用日期：2021年4月1日；发布日期：2021年4月15日

摘　要

本文研究无穷维序列空间在一致框架下的非线性manifold n-宽度$\delta_n(W,X)$，并得到其精确渐进估计，即当$1\le p,q\le\infty$时$\delta_n(B_{p,r},l_q)\succ\prec n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$，$B_{p,r}$表示$l_{p,r}$中的单位球。

关键词

无穷维序列空间，非线性Manifold n-宽度，渐进阶

Nonlinear Width of an Infinite-Dimensional Sequence Space

Xiaohang He, Jiarui Zhao

School of Science, Xihua University, Chengdu Sichuan
Email: 990181245@qq.com

Received: Mar. 12th, 2021; accepted: Apr. 1st, 2021; published: Apr. 15th, 2021

Abstract

In this paper, we study the nonlinear n-width $\delta_n(W,X)$ of infinite dimensional sequence spaces under consistent framework and obtain its accurate asymptotic estimates. That is $\delta_n(B_{p,r},l_q)\succ\prec n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$ when $1\le p,q\le\infty$. $B_{p,r}$ is the unit sphere in the representation $l_{p,r}$.

文章引用: 贺小航, 赵家锐. 无穷维序列空间的非线性宽度[J]. 应用数学进展, 2021, 10(4): 871-877.
DOI: 10.12677/aam.2021.104095

Keywords

Infinite-Dimensional Sequence Space, Nonlinear Manifold n-Width, Asymptotic Order

1. 引言

函数逼近论是函数论中极其重要的研究领域之一。而 n-宽度是逼近论的核心研究方向之一，一直被逼近论方向的研究者所重视。

1936 年 Kolmogorov [1]首次提出 Kolmogorov n-宽度。关于经典宽度(即最坏情形下的宽度)理论，可见 Pinkus [2]的专著。S. R. Stechkin [3] 1954 年研究了在 $p=1, q=2$ 特殊条件下有限维空间的 Kolmogorov *n*-宽度的精确渐进阶与线性 n-宽度的精确渐进阶。V. M. Tikhomirov [4] 1976 年给出了经典的非线性 Alexandroff 宽度 $a_n(W,X)$ 及其精确阶。R. DeVore、R. Howard 及 C. Micchelli [5] 1989 年给出了在 Sobolev 空间中的经典的非线性 manifold n-宽度 $\delta_n(W,X)$ 及其精确渐进阶。De Vore、G. Kyriazis、D. Leviatan 及 V. Tikhomirov 和 Dinh Dung 及 Vu Quoc Thanh [6] [7]分别讨论了经典的 Sobolev 函数类和 Besov 函数类的逼近特征，得出非线性 Alexandroff $a_n(W,X)$ 宽度和非线性 Alexandroff $\delta_n(W,X)$ 宽度的精确渐进阶。本文继以上工作，研究无穷维序列空间在一致框架下的非线性 manifold n-宽度 $\delta_n(W,X)$，并得到其精确渐进估计。

2. 预备知识

2.1. $\delta_n(W,X)$ 定义

设 W 是赋范线性空间 X 的有界子集，

W 在 X 中的非线性 manifold n-宽度 $\delta_n(W,X)$ 定义为：

$$\delta_n(W,X)=\inf_{R,G}\sup_{x\in W}\left\|x-R\left(G(x)\right)\right\|$$

其中，下确界是取遍所有的连续映射

$$G:W\to R^n \text{ 和 } R:R^n\to X$$

2.2. l_p 及 l_p^m 的相关定义及性质

2.2.1. l_p 定义

设 $1\le p\le\infty, \forall x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，令

$$\|x\|_{l_p}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & 1\le p<\infty\\ \sup_{n\ge1}|x_n|, & p=\infty\end{cases}$$

$l_p=\left\{x\,\middle|\,\|x\|_{l_p}<\infty\right\}$ 可知 $\|\cdot\|_{l_p}$ 为 l_p 上的一个范数，l_p 为 Banach 空间。

2.2.2. l_p 具有以下性质

1) 任意的 n，令 $e_n=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)$ (e_n 的第 n 个分量是 1，其余分量是 0)，则 $\{e_n\}$ 为 $l_p\,(1\le p<\infty)$ 的一个基。

2) l_2 按照内积 $\langle x,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n y_n$ 构成一 Hilbert 空间，且 $\{e_n\}$ 为其一组标准正交基，其中 $x=\{x_n\}$，$y=\{y_n\}\in l_2$。

3) $l_q\subset l_p,(1\le q<p\le\infty)$

$$l_p\not\subset l_q,(1\le q<p\le\infty)$$

对于 $1\le p\le\infty, r>0, x=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in l_p$，令

$$x^r:=\{n^r x_n\}_{n=1}^{\infty},\|x\|_{l_{p,r}}=\left\|x^{(r)}\right\|_{l_p}$$

及

$$l_{p,r}:=\left\{x\in l_p\,\middle|\,\|x\|_{l_{p,r}}<\infty\right\}$$

易见 $\|\bullet\|_{l_{p,r}}$ 为 $l_{p,r}$ 上的范数，同时 $l_{p,r}$ 为 Banach 空间。$B_{p,r}$ 为 $l_{p,r}$ 中单位球。

令 $1\le q<p\le\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$，(当 $p=\infty$ 时，令 $\frac{1}{p}=0$)。

对 $\forall x=\{x_n\}\in l_{p,r}$ 由 holder 不等式有：

$$\|x\|_{l_q}\le\begin{cases}\|x\|_{l_{p,r}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{\frac{pr}{p-q}}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}<\infty, & 1\le q<p<\infty\\ \|x\|_{l_{p,r}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^{-rq}\right)^{\frac{1}{q}}<\infty, & p=\infty\end{cases}$$

则有 $x\in l_q$。于是无穷维序列空间($1\le q<p\le\infty, r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$) $\begin{matrix}I_{p,q}:l_{p,r}\to l_q\\ x\mapsto x\end{matrix}$ 有界。

2.2.3. l_p^m 的定义

设 $1\le p\le\infty, x=(x_1,\cdots,x_m)\in R^m$，

$$\|x\|_{l_p^m}=\begin{cases}\left(\sum_{n=1}^{m}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}},1\le p<\infty\\ \max\limits_{1\le n\le m}|x_n|,p=\infty\end{cases}$$

则 $\|\cdot\|_{l_p^m}$ 为 R^m 上的范数，l_p^m 为 R^m 依范数 $\|\cdot\|_{l_p^m}$ 所构成的 Banach 空间。

B_p^m 表示 l_p^m 的单位球。$\{e_n'\}_{n=1}^{m}$ 为 l_p^m 的基，$e_n'=(0,\cdots,0,1,0,\cdots)\in\mathrm{R}^m$ (第 n 个分量是 1，其余分量是 0)。

3. 相关符号

1) $c_i, i=(0,1,\cdots)$ 表示非负常数，其仅与参数 p,q,r 有关；

2) 正函数 $a(y)$ 和 $b(y)$，$y\in D$，如果存在正常数 c_1 满足条件 $a(y)\le c_1 b(y)$，则记 $a(y)\ll b(y)$，若存在正常数 c_2 满足条件 $c_2 a(y)\ge b(y)$，则记 $a(y)\gg b(y)$；

3) 若 $a(y)\ll b(y)$ 且 $a(y)\gg b(y)$，则记 $a(y)\succ\prec b(y)$。

4. 引理

4.1. [8] [9] [10]若 $1\le p<q\le\infty$ 且 $m>n$ 则有

$$\delta_n\left(B_p^m,l_q^m\right)\succ\prec\begin{cases}n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & p<q\\(m-n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & p>q\end{cases}$$

4.2. 离散化引理

对 $\forall k\in N$，记 $N=\{1,2,\cdots\},S_k=\left\{n\in N\left|2^{k-1}\le n\le 2^k\right.\right\}$。则对任意的 $k,k'\in N$，且 $k\ne k'$ 有 $S_k\cap S_{k'}=\varnothing,N=\bigcup_{k=1}^{\infty}S_k$。用 m_k 表示 S_k 中元素的个数，则 $m_k=\left|S^k\right|=2^{k-1}$。

以下我们总是假设 $1\le p<\infty$。则 e_n 为 $l_p\left(1\le p<\infty\right)$ 的Schauder基。从而对 $\forall x\in\{x_n\}\in l_p$，有 $x=\sum_{n=1}^{\infty}x_ne_n$。

对 $k\in N$ 记 $F_k=span\left\{e_n\left|n\in S_k\right.\right\}$，则 $\dim F_k=m_k=2^{k-1}$。

令 $I_k:=F_k\to R^{m_k}$

$$x=\sum_{n\in S_k}x_ne_n\mapsto\sum_{j=1}^{m}x_{2^{k-1}+j-1}e'_{2^{k-1}+j-1}$$

则对 $\forall x=\sum_{n\in S_k}x_ne_n\in F_k$ 有

$$\|x\|_{l_{p,r}}=\left(\sum_{n\in S_k}\left|n^rx_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\succ\prec\left(\sum_{n\in S_k}\left|2^{rk}x_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{rk}\left(\sum_{n\in S_k}\left|x_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=2^{rk}\left\|I_kx\right\|_{l_p^{m_k}}\tag{1}$$

且

$$\|x\|_{l_p}=\left(\sum_{n\in S_k}\left|x_n\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left\|I_kx\right\|_{l_p^{m_k}}\tag{2}$$

因此 I_k 为 $l_p\cap F_k$ 到 $l_p^{m_k}$ 上的等距同构映射。

4.2.1. 上界的离散化定理

设 $1\le q<p\le\infty,r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$。$\{n_k\}_{n=1}^{\infty}$ 是非负的整数序列，且 $0\le n_k\le m_k$，$\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$。则 $\delta_{n_k}\left(B_{p,r},l_q\right)\ll\sum_{n=1}^{\infty}2^{-rk}\delta_{nk}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$。

证明：

由(1)得 $\forall x\in B_{l_{p,r}}\cap F_k$ 有 $1\ge\|x\|_{l_{p,r}}\succ\prec 2^{rk}\left\|I_kx\right\|_{l_p^{m_k}}$，

对 $\forall y\in F_k$ 由(2)得 $\|y\|_{l_q}=\left\|I_ky\right\|_{l_p^{m_k}}$，

于是 $\delta_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\ll 2^{-rk}\delta_{nk}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$。

由非线性 n 宽度定义可见存在连续映射：

$G_k:B_{p,r}\cap F_k\to R^{n_k}$ 和 $R_k:R^{n_k}\to l_q\cap F_k$，且 $\dim\left(R_k\circ G_k\right)\le n_k$，

使得任意的 $x\in B_{p,r}\cap F_k$，有

$$\inf_{G_k,R_k}\left\|x-R_k\left(G_k\left(x\right)\right)\right\|_{l_q}\le\delta_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\tag{3}$$

现规定：$Gx:=\left\{G_k\left(\delta_k x\right)\right\}_{k\in N}$

$$R_x:=\left\{R_k x^k\right\}_{k\in N},x=\left\{x^k\right\}_{k\in N},x^k\in R^{n_k}.$$

定义连续映射：

$G:B_{p,r}\to R^n$ 和 $R:R^n\to l_q$

有 $\dim R\circ G\le\sum_{k=1}^{\infty}\dim R_k\circ G_k\le\sum_{k=1}^{\infty}n_k\le n$

对 $\forall$ 的 $x\in B_{p,r}$ 根据 $R\circ G$ 的定义和(3)有

$$\begin{aligned}\inf_{G_k,R_k}\left\|x-R_k\left(G_k\left(x\right)\right)\right\|_{l_q}&\le\inf_{G,R}\sum_{k=1}^{\infty}\left\|\delta_k x-\delta_k R\left(G\left(x\right)\right)\right\|_{l_q}\\&=\sum_{k=1}^{\infty}\inf_{G_k,R_k}\left\|\delta_k x-R_k\left(G_k\left(x\right)\right)\right\|_{l_q}\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}\delta_{n_k}\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\\&\le\sum_{k=1}^{\infty}2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)\end{aligned}$$

即得到定理上界的离散化定理。

4.2.2. 下界的离散化定理

$$1\le q<p<\infty,r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p},n=0,1,2,\cdots$$

有 $\delta_n\left(B_{p,r},l_q\right)\gg 2^{-rk}\delta_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$，其中 $n\succ\prec 2^k\ge 2^n$。

证明：由 $\delta_n\left(B_{p,r},l_q\right)$ 定义得 $\delta_n\left(B_{p,r},l_q\right)\gg\delta_n\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_K\right)$

对 $\forall x\in B_p^{m_k}$，由(1)得 $1\ge\|x\|_{l_p^{m_k}}\ge 2^{rk}\left\|I_k^{-1}x\right\|_{l_{p,r}}$

对 $\forall y\in l_q^{m_k}$，则由(2)得 $\|y\|_{l_q^{m_k}}=\left\|I_k^{-1}y\right\|_{l_q}$。

$$\delta_n\left(B_{p,r},l_q\right)\gg\delta_n\left(B_{p,r}\cap F_k,l_q\cap F_k\right)\gg 2^{-rk}\delta_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$

5. 结论的证明

5.1. $1\le q<p\le\infty$

首先构造序列，对 $\forall k\in N$，令 $k'=\left[\lg n\right]$，

$$n_k=\begin{cases}m_k & 1\le k<k'\\2^{k'}\cdot 2^{\beta(k'-k)} & k\ge k'\end{cases}$$

则 $\sum_{k=1}^{\infty}n_k\ll\sum_{k=1}^{k'}2^k+\sum_{k=k'}^{\infty}2^{k'}\cdot 2^{\beta(k'-k)}\ll n$。其中，$0<\beta<1$，则有 $\left\{n_k\right\}$ 满足引理 4.2.1 上界的离散化定理的条件。

所以由引理 4.1 有限维非线性空间 $\delta_n\left(B_p^m,l_q^m\right)$ 及上界的离散化定理 4.2.1，且当 $m=n$ 时，

$\delta_n\left(B_p^m, l_q^m\right)=0$ 及 $r>\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$。

现给出 $\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right)$ 的上界估计：

$$\begin{aligned}\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right) &\ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \ll \sum_{k=1}^{k'} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)+\sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)\\ &= \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\left(m_k-n_k\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\ &\ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\left(2^k-2^{k'}\cdot 2^{\beta(k'-k)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\left(2^k\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\ &\ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k} \ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'} \ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

现估计 $\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right)$ 的下界：

由 $S_k=\left\{n\in N \,\middle|\, 2^{k-1}\le n\le 2^k\right\}$ 及 $F_k=span\left\{e_n \,\middle|\, n\in S_k\right\}$ 知，存在一个正常数 k_1，使得 $n \succ\prec 2^{k_1}=m_{k_1}\gg 2n$。

由引理 4.1 有限维非线性空间 $\delta_n\left(B_p^m, l_q^m\right)$ 及下界的离散化定理 44.2.2 得

$$\begin{aligned}\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right) &\gg 2^{-rk}\delta_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \gg 2^{-rk_1}\delta_n\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)\\ &\gg 2^{-rk_1}\left(m_{k_1}-n\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gg 2^{-rk_1}\left(2n-n\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\ &\gg 2^{-rk_1} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gg \left(2^{k_1}\right)^{-r} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gg n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

综上，当 $1\le q<p\le\infty$ 时 $\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right) \succ\prec n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$。

5.2. $1\le p<q\le\infty$

同 5.1 构造 k' 使得 $\sum_{k=1}^{\infty} n_k \ll \sum_{k=1}^{k'} 2^k+\sum_{k=k'}^{\infty} 2^{k'}\cdot 2^{\beta(k'-k)} \ll n$。其中，$0<\beta<1$，则有 $\left\{n_k\right\}$ 满足引理 4.2.1 上界的离散化定理的条件。

所以由引理 4.1 有限维非线性空间 $\delta_n\left(B_p^m, l_q^m\right)$ 及上界的离散化定理 4.2.1，且当 $m=n$ 时，$\delta_n\left(B_p^m, l_q^m\right)=0$ 及 $r>0$，则有 $\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right)$ 的上界估计：

$$\begin{aligned}\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right) &\ll \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \ll \sum_{k=1}^{k'} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)+\sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right)\\ &= \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\delta_{n_k}\left(B_p^{m_k}, l_q^{m_k}\right) \ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\left(n_k\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \ll \sum_{k=k'}^{\infty} 2^{-rk}\left(2^{k'}\cdot 2^{\beta(k'-k)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\ &\ll \sum_{k=k'}^{\infty}\left(2^k\right)^{-r}\left(2^{k'}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\left(2^{\beta\left(k'-k\right)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \ll \left(2^{k'}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\sum_{k=k'}^{\infty}\left(2^k\right)^{-r}\left(2^{\beta(k'-k)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\\ &\ll 2^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)k'} \ll n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}\end{aligned}$$

接下来估计 $\delta_n\left(B_{p,r}, l_q\right)$ 的下界：

由 $S_k=\left\{n\in N \,\middle|\, 2^{k-1}\le n\le 2^k\right\}$ 及 $F_k=span\left\{e_n \,\middle|\, n\in S_k\right\}$ 知，同样存在一个正常数 k_1，使得 $n \succ\prec 2^{k_1}$。

由引理 4.1 有限维非线性空间 $\delta_n\left(B_p^m, l_q^m\right)$ 及下界的离散化定理 4.2.2 得

$$\delta_n\left(B_{p,r},l_q\right) \gg 2^{-rk}\delta_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right) \gg 2^{-rk_1}\delta_n\left(B_p^{m_k},l_q^{m_k}\right)$$
$$\gg 2^{-rk_1} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gg \left(2^{k_1}\right)^{-r} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \gg n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$$

综上，当$1 \le p \le q \le \infty$时$\delta_n\left(B_{p,r},l_q\right) \succ\prec n^{-\left(r-\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}$。

基金项目

2020 年“西华杯”大学生创新创业项目 2020108。

参考文献

[1] Kolmogorov, A.N. (1936) Uber Die Beste Annaherung Von Funktionen Einer Gegebenen Funktioneklasse. *Annals of Mathematics*, **37**, 107-111. https://doi.org/10.2307/1968691

[2] Pinkus, A. (1985) n-Widths in Approximation Theory. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1

[3] Stechkin, S.R. (1954) On Best Approximation of Given Classes of Functions by Arbitrary Polynomials. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, **9**, 133-134. (In Russian)

[4] Tikhomirov, V.M. (1976) `Some Topics in Approximation Theory. Moscow State University, Moscow.

[5] Devore, R., Howard, R. and Micchelli, C. (1989) Optimal Non-Linear Approximation. *Manuscripta Mathematica*, **63**, 469-478. https://doi.org/10.1007/BF01171759

[6] Devore, R., Kyriazis, G., Leviatan, D. and Tikhomirov, V. (1993) Wavelet Compression and Non-Linear N-Widths. *Advances in Computational Mathematics*, **1**, 194-214. https://doi.org/10.1007/BF02071385

[7] Devore, R. (1998) Nonlinear Approximation. *Acta Numerica*, **7**, 51-150. https://doi.org/10.1017/S0962492900002816

[8] Temlyakov, V.N. (1993) Approximation of Periodic Functions. Nova Science, New York.

[9] Babenko, K.I. (1960) Approximation by Trigonometric Polynomials in a Certain Class of Periodic Functions of Several Variables. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **1**, 982-985.

[10] Micchelli, C.A. (1984) Orthogonal Projections Are Optimal Algorithms. *Journal of Approximation Theory*, **40**, 101-110. https://doi.org/10.1016/0021-9045(84)90018-2