

Bazykin捕食系统的平衡点和余维2 Bogdanov-Takens分支：全局渐近稳定性

王双特, 于恒国

温州大学数理学院, 浙江 温州
Email: wangshuangte@163.com

收稿日期: 2021年4月25日; 录用日期: 2021年5月8日; 发布日期: 2021年5月28日

摘要

本文从一个全局渐近稳定性定理出发讨论了Bazykin捕食系统, 并在特定参数条件下给出若干内平衡点和一个余维2 BT分支, 包括重数为1的多重焦点、余维2尖点和余维3 Bogdanov-Takens奇点(焦点或中心)。最后, 结合数值类比, 系统经历相应的余维2 Bogdanov-Takens分支。

关键词

Bazykin捕食系统, Holling II型功能反应, 平衡点, Bogdanov-Takens分支, 全局渐近稳定性

Equilibria and Bogdanov-Takens Bifurcation of Codimension 2 of the Bazykin's Predator-Prey System: Global Asymptotic Stability

Shuangte Wang, Hengguo Yu

College of Mathematics and Physics, Wenzhou University, Wenzhou Zhejiang
Email: wangshuangte@163.com

Received: Apr. 25th, 2021; accepted: May 8th, 2021; published: May 28th, 2021

Abstract

This paper discusses the Bazykin's predator-prey system from a globally asymptotically stable

theorem, and presents several interior equilibria and a Bogdanov-Takens bifurcation of codimension 2 under certain parameter conditions, including multiple focus of multiplicity one, cusp of codimension 2 and Bogdanov-Takens singularity of codimension 3 (focus or center). Finally, combining numerical simulations, this system undergoes the corresponding codimension 2 Bogdanov-Takens bifurcation.

Keywords

Bazykin's Predator-Prey System, Holling Type II Functional Response, Equilibrium, Bogdanov-Takens Bifurcation, Global Asymptotic Stability

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文考虑具有 Holling II 功能反应的 Bazykin 捕食系统[1] [2]:

$$\dot{x} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} \right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - m_1 x, \tag{1.1a}$$

$$\dot{y} = \frac{\alpha e xy}{a+x} - m_2 y - dy^2, \tag{1.1b}$$

这里 $x = x(t)$ 和 $y = y(t)$ 分别表示食饵和捕食者在时间 t 的种群密度, 初始条件为 $x(0), y(0) > 0$, 其它正的常数有其各自的生物学意义, 即: r_1 表示食饵 x 的内禀增长率, K_1 表示环境承载力常数, α 表示捕食者对食饵的捕获效率, a 是半饱和常数, e 是生物量转化系数, m_1 和 m_2 分别表示食饵和捕食者各自的死亡率, d 是捕食者的种间竞争系数. $r_1 \left(1 - \frac{x}{K_1} \right)$ 表示食饵在缺乏捕食者时的增长情况, dy^2 表示捕食者种间密度限制情况, $\frac{\alpha x}{a+x}$ 称为 Holling II 功能反应, 最初由 C.S. Holling 提出, 描述了捕食者如何将食饵转化为自身种群增长所需[3] [4] [5] [6]. 当 $d = 0$ 时, 系统退化为 Rosenzweig-MacArthur (R-M)模型[7] [8] [9]. 显然系统(1.1)满足上述初始条件的解是非负一致有界的, 因此第一象限是其正向不变集.

对于系统(1.1), 在一些文献中已经进行了深入研究. 如 A.D. Bazykin 在文献[2]中详细讨论了平衡点的稳定性, 极限环的全局存在性, 平衡点的全局吸引, Hopf 分支及余维 2 分支. 在[10]中, 作者通过特定变换研究该系统局部稳定性的解析描述和变化. 在文献[11]中, 作者研究了一个种群具有自我抑制的类似 Lotka-Volterra 系统的全局稳定性和极限环存在性:

$$\dot{x} = x(1 - k_1 x - k_2 x^2) - \frac{xy}{1+ax}, \tag{1.2a}$$

$$\dot{y} = \frac{rxy}{1+ax} - y(\delta_0 + \delta_1 y), \tag{1.2b}$$

并利用 Poincare-Bendixson 理论的思想详细且定性地证明了至少存在两个极限环. 显然, 除去某些参数外系统(1.2)在 $k_2 = 0$ 时将简化为上述系统, 而这又在文献[12]及[13]中分析了平衡点的稳定性, Hopf 分支, 全局吸引和余维 2 分支. 文献[14]则研究了系统(1.1)的全局行为. 在[15]中考虑了带有常数反馈 m 的

修正 Holling II 功能反应 $\frac{\beta(x-m)}{1+\alpha(x-m)}$, 作者给出了关于内平衡点全局稳定性及稳定极限环存在唯一性的充分性条件。

本文将从一个全局渐近稳定性定理出发重新考虑 Bazykin 捕食系统(1.1), 安排如下。首先给出内平衡点的存在性条件, 如重数为 1 的多重焦点, 余维 2 尖点和余维 3 BT 奇点(焦点或中心), 其次讨论了取特定参数条件下一类余维 2 Bogdanov-Takens (BT)分支, 最后是总结和讨论。此外, 相应的数值类比支持了本文的结论。

2. 平衡点的分析

2.1. 预备工作: 一个全局渐近稳定性定理

本节首先通过构造一个定正 Lyapunov 函数 $V(x, y) = \left(x - x_* - x_* \ln \frac{x}{x_*} \right) + \frac{a+x_*}{ae} \left(y - y_* - y_* \ln \frac{y}{y_*} \right)$ 来说明内平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$ 的全局渐近稳定性[16]。

定理 1: 若系统(1)存在唯一的内平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$, 且参数满足 $\frac{\alpha y_*}{a(a+x_*)} < \frac{r_1}{K_1}$, 则 E_* 是全局渐近稳定的(双曲型焦点或结点)。

对于一般性条件 $\frac{\alpha y_*}{a(a+x_*)} \leq \frac{r_1}{K_1}$, 则 E_* 是局部渐近稳定的焦点或结点。引入参数变换 $m_2 = \lambda \alpha e$, $K_1 = \frac{\mu a r_1}{\alpha e}$ 和控制变量 $\lambda \in (0, 1)$, $\mu > 0$, $\rho \in (0, 1]$, 得到相应的内平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$ 和参数限制条件:

$$x_* = \frac{a[\mu(r_1 - m_1) - \alpha \rho e]}{\alpha e}, y_* = \frac{[\mu(r_1 - m_1) + \alpha e(1 - \rho)] \rho a}{\mu \alpha}, \quad (2.1a)$$

$$d = \frac{\alpha^2 e \mu [(1 - \lambda)(r_1 - m_1) \mu + \alpha e((\rho - 1)\lambda - \rho)]}{a \rho [\alpha e(1 - \rho) + \mu(r_1 - m_1)]^2}, \quad (2.1b)$$

这要求 $\mu(r_1 - m_1) > \alpha e \left(\rho + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \right)$ 。取参数值为 $r_1 = 0.6$, $m_1 = 0.2$, $m_2 = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $a = 1.5$, $K_1 = 20$, $e = 0.6$ 和 $\rho = 0.9$, 图 1 描述了一个全局渐近稳定结点。

本文将进一步考虑 $\rho > 1$ 的情形, 此时内平衡点 $E_* = (x_*, y_*)$ 形式上仍不变。系统(1.1)在 E_* 处 Jacobi 矩阵 $J(E_*)$ 的迹, 行列式和判别式分别记为 $A_1 = \text{tr} J(E_*)$, $A_2 = \det J(E_*)$ 和 $\Delta_* = A_1^2 - 4A_2$ 。对于一般的双曲型奇点 E_* , 其稳定性和类型已经由一次线性近似理论确定, 不做详述。

2.2. 多重焦点(中心 - 焦点问题)

对于条件(2.1), 为使得 Jacobi 矩阵 $J(E_*)$ 具有一对共轭纯虚的零实部本征值, 令 $A_1 = 0$, 即

$$\lambda = \lambda^H := \frac{[\alpha \rho e + \mu(m_1 - r_1)][(\alpha e - m_1 + r_1)\mu - \alpha e(2\rho - 1)]}{[\alpha e(\rho - 1) + \mu(m_1 - r_1)]\alpha e \mu}, \quad (2.2)$$

相应的平衡点表达式(2.1a)形式不变, 而参数条件(2.1b)为

$$d = \frac{\alpha [\alpha e(2\rho - 1) + \mu(m_1 - r_1)][\mu(r_1 - m_1) - \alpha \rho e]}{a \rho [\alpha e(1 - \rho) + \mu(r_1 - m_1)]^2}. \quad (2.3)$$

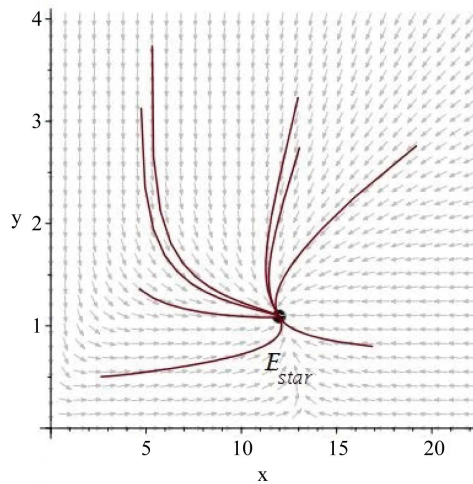


Figure 1. A globally asymptotically stable node
图 1. 一个全局渐近稳定的结点

此时 $A_2 = \frac{\mu(r_1 - m_1) - \alpha\rho e}{[\mu(r_1 - m_1) - \alpha e(\rho - 1)]^2 \mu^2} \varphi_{A_2}(\mu, \rho)$, 其中辅助函数

$$\begin{aligned} \varphi_{A_2}(\mu, \rho) &= (m_1 - r_1)^3 \mu^3 + \alpha e(5\rho - 2)(m_1 - r_1)^2 \mu^2 + \alpha^2 e^2 \\ &\quad [\alpha e\rho + (2\rho - 1)(4\rho - 1)(m_1 - r_1)]\mu + \alpha^3 e^3 \rho(2\rho - 1)^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

如果 $A_2 < 0$, 则 E_* 是鞍点。如果 $A_2 > 0$, 矩阵 $J(E_*)$ 具有一对共轭纯虚本征值, 化为中心 - 焦点问题, 此时利用变换 $x = u + x_*$, $y = v + y_*$ 将点 E_* 平移至原点 O , 再取变量变换 $u = -dy_*X + \beta Y$, $v = -\frac{\alpha e a y_*}{(a + x_*)^2} X$, 其中 $\beta = \sqrt{A_2(E_*)} > 0$, 将系统(1.1)化为标准形式:

$$\dot{X} = -\beta Y + \sum_{i+j=2}^3 a_{ij} X^i Y^j + O(|X, Y|^4), \quad Y = \beta X + \sum_{i+j=2}^3 b_{ij} X^i Y^j + O(|X, Y|^4). \tag{2.5}$$

按照[17] [18] [19], 上述系统的第一 Lyapunov 数为

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{3\pi}{2\beta} \left\{ 3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - \frac{1}{\beta} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})] \right\} \\ &= \frac{3\pi\alpha^5 e^5 \rho [\alpha\rho e + \mu(m_1 - r_1)] \varphi_\sigma(\mu, \rho)}{2\mu^2 a^2 \beta [\alpha e(\rho - 1) + \mu(m_1 - r_1)]^5 \varphi_{A_2}(\mu, \rho)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中辅助函数 $\varphi_\sigma(\mu, \rho) = \sum_{k=0}^5 A_{\sigma,k}(\rho) \mu^k$, 系数 $A_{\sigma,k} = A_{\sigma,k}(\rho)$ 为

$$\begin{aligned} A_{\sigma,0} &= \alpha^5 e^5 \rho^2 (2\rho^2 - 6\rho + 3)(2\rho - 1), \\ A_{\sigma,1} &= \alpha^4 e^4 \rho [18(m_1 - r_1)\rho^3 + 4(\alpha e - 11m_1 + 11r_1)\rho^2 + (28m_1 - 28r_1 - 3\alpha e)\rho + 5(r_1 - m_1)], \\ A_{\sigma,2} &= \alpha^3 e^3 (m_1 - r_1) [32(m_1 - r_1)\rho^3 + (53r_1 - 53m_1 + 9\alpha e)\rho^2 + (22m_1 - 22r_1 - 7\alpha e)\rho + 2\alpha e + 2r_1 - 2m_1], \\ A_{\sigma,3} &= \alpha^2 e^2 (r_1 - m_1)^2 [28(m_1 - r_1)\rho^2 + (7\alpha e + 29r_1 - 29m_1)\rho + 6m_1 - 6r_1 - 4\alpha e], \\ A_{\sigma,4} &= 2\alpha e (r_1 - m_1)^3 [6(m_1 - r_1)\rho + 3(r_1 - m_1) + \alpha e], \end{aligned}$$

$$A_{\sigma,5} = 2(m_1 - r_1)^5.$$

利用变换 $u = \beta X + dy_* Y$, $v = \frac{\alpha e a y_*}{(a + x_*)^2} Y$ 也可得到公式(2.6)中的 σ 。显然 σ 的符号由函数 $\varphi_\sigma(\mu, \rho)$ 决定。

当 $\sigma < 0 (> 0)$ 时, E_* 是重数为 1 的稳定(不稳定)多重焦点, 相应的非退化 Hopf 分支是超临界(次临界)的, 并且由此临界平衡点分支出的极限环是稳定(不稳定)的。当 $\sigma = 0$ 时, 需进一步计算第二 Lyapunov 系数, 可能出现 Bautin 分支(广义 Hopf 分支)。

例 1: 首先取参数值为 $r_1 = 0.7$, $m_1 = 0.2$, $a = 1.5$, $\alpha = 0.5$, $e = 0.6$ 和 $\mu = 8$, 结合图 2(a)中函数 $\varphi_\sigma(\mu, \rho)$ 的图象, 分别取 $\rho = 8$ 和 $\rho = 8.5$ 得到稳定和不稳定的多重焦点, 详见图 3。注意当变量 ρ 较大时, 如 $\rho = 19$, 上述 $\lambda^H (< 0)$ 不存在。当 $\rho = \rho_\sigma \approx 8.350246$ 时 $\sigma = 0$, 此时出现一条半稳定极限环, 见图 2(b)。

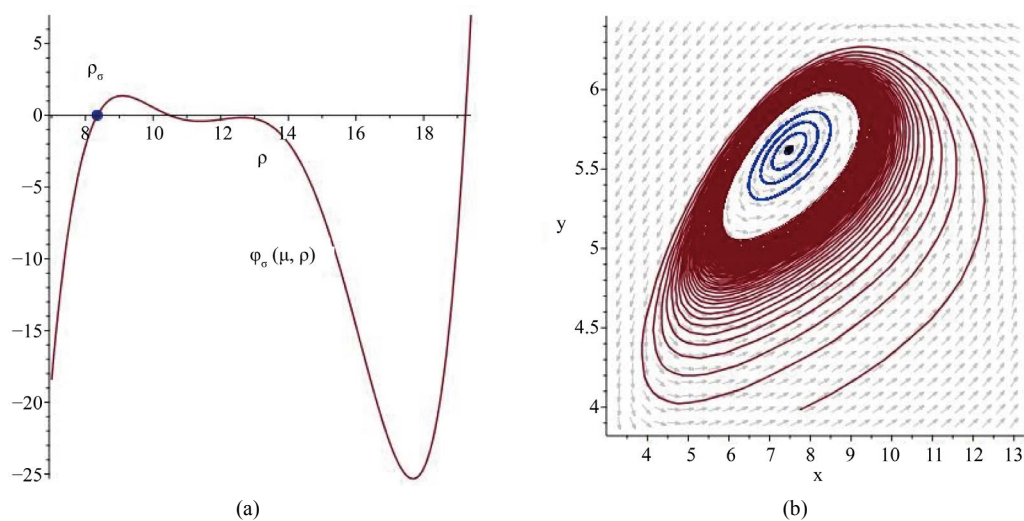


Figure 2. (a) Curve of function $\varphi_\sigma(\mu, \rho)$; (b) A semi-stable limit cycle

图 2. (a) 函数 $\varphi_\sigma(\mu, \rho)$ 的图象; (b) 半稳定极限环

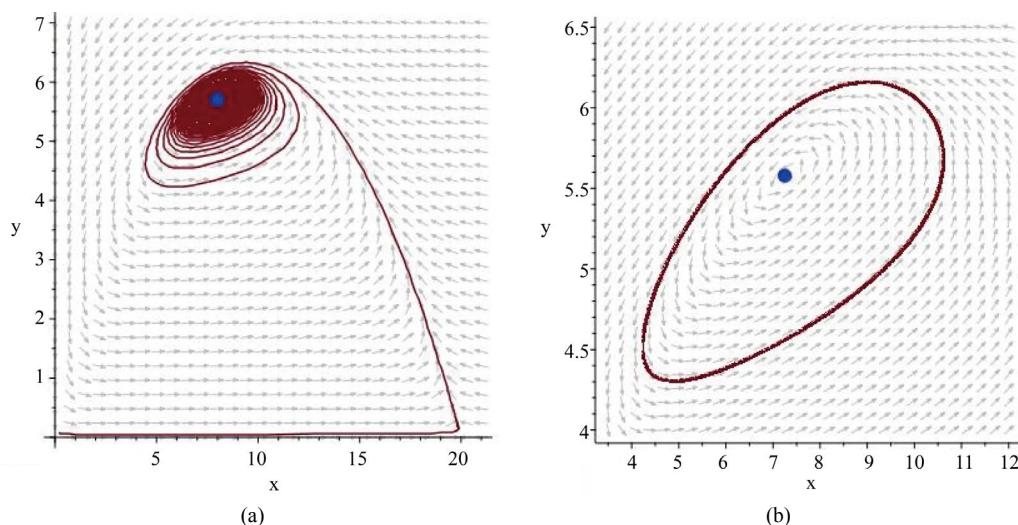


Figure 3. Multiple foci with multiplicity one: (a) stable; (b) unstable: limit cycle

图 3. 重数为 1 的多重焦点: (a) 稳定; (b) 不稳定: 极限环

2.3. 余维 2 和余维 3 尖点

对于上一小节中 $A_1 = 0$ 的情形, 如果还有 $A_2 = 0$, 即由(2.4)得到方程 $\varphi_{A_2}(\mu, \rho) = 0$ 及临界值 μ^{BT} 。

在上述参数条件下先取变换(I): $x = X + x_*$, $y = Y + y_*$, 将系统(1.1)化为

$$\dot{X} = F_1(X, Y), \dot{Y} = G_1(X, Y), \tag{2.7}$$

再取变换

$$(II): u = Y, v = \frac{-(m_1 - r_1)^2 \mu^2 Y - \alpha e \mu (3\rho - 1)(m_1 - r_1) Y - \alpha^2 e^2 \rho ((2\rho - 1) Y + e X)}{[\alpha e (\rho - 1) + \mu (m_1 - r_1)] \mu},$$

将上述系统化化为标准形式

$$\dot{u} = F_2(u, v) = v + a_{20} u^2 + a_{11} u v + a_{02} v^2 + O(|u, v|^3), \tag{2.8a}$$

$$\dot{v} = G_2(u, v) = b_{20} u^2 + b_{11} u v + b_{02} v^2 + O(|u, v|^3). \tag{2.8b}$$

利用[20]中的引理1或通过一系列变换, 系统(2.8)拓扑等价于

$$\dot{x} = y, \dot{y} = d_1 x^2 + d_2 x y + O(|x, y|^3), \tag{2.9}$$

其中 $d_1 = b_{20}$ 和 $d_2 = b_{11} + 2a_{20}$ 为相应的判别式, 即

$$d_1 = \frac{\alpha [\mu (r_1 - m_1) - \alpha e \rho] [(m_1 - r_1) \mu + \alpha e (2\rho - 1)] \varphi_{d_1}(\mu, \rho)}{a \mu^2 [\alpha e (\rho - 1) + \mu (m_1 - r_1)]^3}, \tag{2.10a}$$

$$d_2 = \frac{\varphi_{d_2}(\mu, \rho)}{a \mu \rho e [\alpha e (\rho - 1) + \mu (m_1 - r_1)]^2}, \tag{2.10b}$$

其中辅助函数 $\varphi_{d_1}(\mu, \rho) = \sum_{k=0}^2 A_{d_1, k}(\rho) \mu^k$, $\varphi_{d_2}(\mu, \rho) = \sum_{k=0}^3 A_{d_2, k}(\rho) \mu^k$, 系数 $A_{d_l, k} = A_{d_l, k}(\rho)$, $l = 1, 2$ 为

$$A_{d_1, 0} = \alpha^2 e^2 \rho (2\rho - 1)(1 - \rho),$$

$$A_{d_1, 1} = \alpha e [3(r_1 - m_1) \rho^2 + (\alpha e + 4m_1 - 4r_1) \rho - m_1 + r_1],$$

$$A_{d_1, 2} = (m_1 - r_1) [2\alpha e + (1 - \rho)(m_1 - r_1)],$$

$$A_{d_2, 0} = 2\alpha^3 e^3 \rho (2\rho - 1)(\rho^2 - 3\rho + 1),$$

$$A_{d_2, 1} = 2\alpha^2 e^2 [3(m_1 - r_1) \rho^3 + (\alpha e - 12m_1 + 12r_1) \rho^2 + (7m_1 - 7r_1 - \alpha e) \rho + r_1 - m_1],$$

$$A_{d_2, 2} = \alpha e (m_1 - r_1) [2(m_1 - r_1) \rho^2 + (\alpha e - 12m_1 + 12r_1) \rho - \alpha e + 4m_1 - 4r_1],$$

$$A_{d_2, 3} = (r_1 - m_1)^2 (\alpha e - 2m_1 + 2r_1).$$

当 $d_1 d_2 \neq 0$ 时, E_* 是余维2尖点。进一步的, 如果令 $d_1 = 0$, 不难得到内平衡点 $E_* = \left(\frac{(\rho - 2)a}{2}, \frac{4ae\rho}{\rho - 2} \right)$

和参数条件为

$$\lambda^{BT} = \frac{\rho - 6}{\rho}, \mu^{BT} = \frac{1}{8} \rho (\rho - 2), r_1 = \frac{m_1 \rho^2 + (12\alpha e - 2m_1) \rho - 8\alpha e}{\rho (\rho - 2)}, d = \frac{(\rho - 2) \alpha}{a \rho^2}. \tag{2.11}$$

此时 $d_2 = \frac{(14-5\rho)\alpha}{a\rho^2} \neq 0$, 因 $\rho > 6$ 。这样 E_* 是余维3尖点。事实上, 通过下列变换

$$(II): u = -\frac{54(\rho-2)X}{\alpha a(3\rho-2)^2} - \frac{18(\rho-2)Y}{a\alpha e(3\rho-2)^2}, v = -\frac{72eX}{\rho a(3\rho-2)} + \frac{18(\rho-2)Y}{\rho a(3\rho-2)},$$

$$(III): u = p, v = q - a_{20}p^2 - a_{02}q^2,$$

$$(IV): p = w + \frac{1}{2}d_{02}w^2, q = d_{02}wz + z.$$

系统(2.7)最终化为标准形式

$$\dot{w} = z + \sum_{i+j=3} e_{ij}w^i z^j + O(|w, z|^4), \quad (2.12a)$$

$$\dot{z} = f_{11}wz + \sum_{i+j=3} f_{ij}w^i z^j + O(|w, z|^4), \quad (2.12b)$$

其中 $f_{11} = b_{11} + 2a_{20} \neq 0$, $f_{30} < 0$ 及

$$5f_{30}(f_{21} + 3e_{30}) - 3f_{11}(f_{40} - e_{30}f_{11}) = \frac{32\alpha^7 e^3 (3\rho-2)^4 (5\rho^2 + 12\rho - 28)}{6561\rho^7 (\rho-2)^2} \neq 0,$$

$$f_{11}^2 + 8f_{30} = -\frac{4\alpha^4 e^2 (3\rho-2)^2 (7\rho^2 + 12\rho - 68)}{81\rho^4 (\rho-2)^2} < 0,$$

因此 E_* 是余维3 BT奇点(焦点或中心) [21]。

定理2: 在参数条件(2.11)下, 相应的平衡点 E_* 是余维3 BT奇点(焦点或中心)。 ■

例2: 这里取 $m_1 = r_1 - \frac{3}{4}\alpha e$, $\rho = \frac{15}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}$, $\lambda^H = \frac{5\sqrt{21}-21}{4}$, $\mu^{BT} = 12 + \frac{8}{3}\sqrt{21}$, 以保证关于 μ 的三

次方程 $\varphi_{A_2}(\mu, \rho) = 0$ 仅有两个实根, 则 $d_1 = \frac{3(19\sqrt{21}-87)\alpha^2 e}{8a}$, $d_2 = \frac{(35\sqrt{21}-159)\alpha}{6a}$, 平衡点

$E_*^{(2)} = \left(\frac{(3+\sqrt{21})a}{2}, \frac{3(3+\sqrt{21})ae}{8} \right)$ 是余维2尖点, 另一个平衡点 $E_*^{(1)} = \left((\sqrt{21}+4)a, \frac{(3+\sqrt{21})ae}{2} \right)$ 是渐近稳

定的双曲型结点。见图4(a), 其中参数取值为 $r_1 = 1$, $\alpha = 0.5$, $a = 1.5$ 及 $e = 0.6$ 。

对于余维3 BT奇点情形, 取参数值为 $m_1 = 0.2$, $\rho = 7$, $\alpha = 0.5$, $a = 1.5$ 及 $e = 0.6$, 图4(b)给出相应的相图。

3. 余维2 Bogdanov-Takens 分支

在上一节例2的基础上, 本节考虑相应的 Bogdanov-Takens 分支。选取 m_2 和 d 为 BT 分支参数, 并引入充分小参数矢量 $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, 考虑如下开折系统:

$$\dot{x} = r_1 x \left(1 - \frac{x}{K_1} \right) - \frac{\alpha xy}{a+x} - m_1 x, \quad (3.1a)$$

$$\dot{y} = \frac{\alpha xy}{a+x} - (m_2 + \delta_1)y - (d + \delta_2)y^2. \quad (3.1b)$$

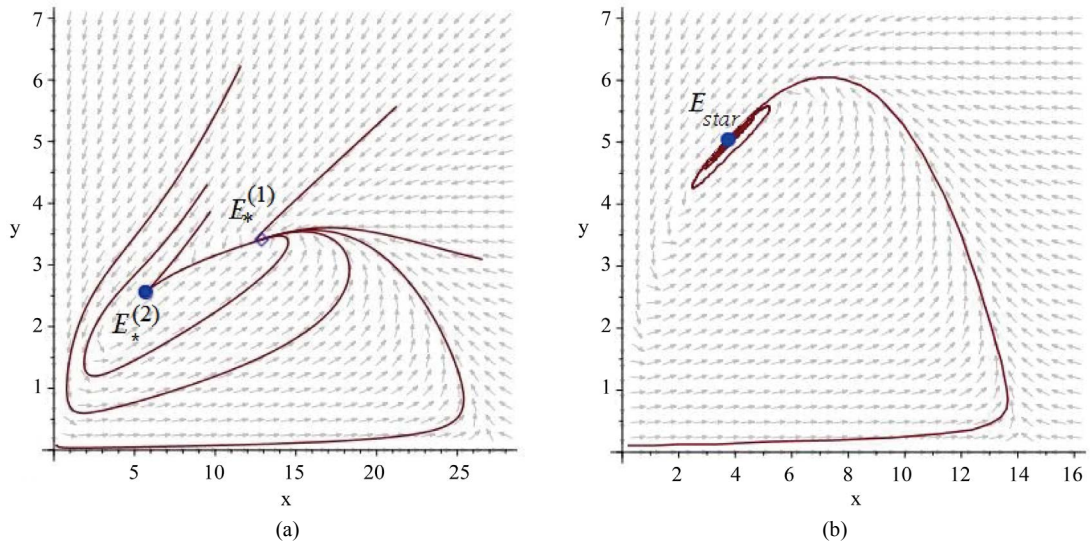


Figure 4. (a) A cusp of codimension 2 $E_*^{(2)}$ and an asymptotic stable node $E_*^{(1)}$; (b) A BT singularity of codimension 3

图4. (a) 余维2尖点 $E_*^{(2)}$ 和渐近稳定结点 $E_*^{(1)}$; (b) 余维3 BT奇点(焦点)

首先取线性变换将平衡点移至原点 O :

$$\dot{X} = F_1(X, Y) = \sum_{i+j=0}^2 a_{ij}(\delta) X^i Y^j + O(|X, Y|^3), \tag{3.2a}$$

$$\dot{Y} = G_1(X, Y) = \sum_{i+j=0}^2 b_{ij}(\delta) X^i Y^j + O(|X, Y|^3), \tag{3.2b}$$

再取变换(II): $u = X, v = F_1(X, Y)$, 上述系统化为

$$\dot{u} = F_2(u, v) = v, \tag{3.3a}$$

$$\dot{v} = G_2(u, v) = \sum_{i+j=0}^2 d_{ij}(\delta) u^i v^j + O(|u, v|^3), \tag{3.3b}$$

然后取变换(III): $p = u + \frac{d_{01}(\delta)}{d_{11}(\delta)}, q = v$, 又有以下系统:

$$\dot{p} = F_3(p, q) = q, \tag{3.4a}$$

$$\dot{q} = G_3(p, q) = \sum_{i+j=0}^2 f_{ij}(\delta) p^i q^j + O(|p, q|^3). \tag{3.4b}$$

令变换(IV)为: $w = p, z = (1 - f_{02}(\delta)p)q, dt = (1 - f_{02}(\delta)p)d\tau$, 并将符号 τ 记为 t , 得到新的系统

$$\dot{w} = F_4(w, z) = z, \tag{3.5a}$$

$$\dot{z} = G_4(w, z) = \sum_{i+j=0}^2 h_{ij}(\delta) w^i z^j + O(|w, z|^3). \tag{3.5b}$$

注意 $h_{20}(0, 0) > 0$ 且 $h_{11}(0, 0) = d_{11}(0, 0) \neq 0$, 因此当 δ 在原点的某个小邻域内变化时 $h_{20}(\delta) > 0$ 且 $h_{11}(\delta) \neq 0$.

最后, 构造变换(V): $x_1 = \frac{h_{11}(\delta)^2}{h_{20}(\delta)} w, y_1 = \frac{h_{11}(\delta)^3}{h_{20}(\delta)^2} z, dt = \frac{h_{11}(\delta)}{h_{20}(\delta)} d\tau$, 并且仍将符号 τ 写为 t , 则上述系统化为

$$\dot{x}_1 = F_5(x_1, y_1) = y_1, \quad (3.6a)$$

$$\dot{y}_1 = G_5(x_1, y_1) = d_1(\delta) + d_2(\delta)x_1 + x_1^2 + x_1y_1 + O(|x_1, y_1|^3), \quad (3.6b)$$

其中

$$d_1 = d_1(\delta) = \frac{8(1375 + 28\sqrt{21})}{81\alpha e} \delta_1 + \frac{(4713 + 1459\sqrt{21})a}{27\alpha} \delta_2 + O(|\delta_1, \delta_2|^2), \quad (3.7a)$$

$$d_2 = d_2(\delta) = -\frac{4(170 + 41\sqrt{21})}{27\alpha e} \delta_1 - \frac{(401 + 83\sqrt{21})a}{6\alpha} \delta_2 + O(|\delta_1, \delta_2|^2), \quad (3.7b)$$

以及

$$\left. \frac{-1}{\frac{\partial d_1}{\partial \delta_1}} \cdot \frac{\partial(d_1, d_2)}{\partial(\delta_1, \delta_2)} \right|_{\delta=0} = -\frac{4(35 + 3\sqrt{21})}{27\alpha e} < 0, \quad (3.8)$$

因此系统(3.1)在余维2尖点处是generic family开折的, 并且有展开至二阶项的分支曲线局部近似表示 [22], 而原点处近似直线的斜率为 $k_{BT} = \frac{2(3 - \sqrt{21})}{9\alpha e} < 0$ 。

(i) 鞍 - 结分支(SN)曲线为

$$\begin{aligned} SN &= \left\{ \delta \mid d_1 = \frac{1}{4}d_2^2 \right\} \\ &= \left\{ \delta \mid \frac{8(1375 + 28\sqrt{21})}{81\alpha e} \delta_1 + \frac{(4713 + 1459\sqrt{21})a}{27\alpha} \delta_2 - \frac{4(5791 + 12422\sqrt{21})}{729\alpha^2 e^2} \delta_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(125897 + 33987\sqrt{21})a}{81\alpha^2 e} \delta_1 \delta_2 + \frac{(414325 + 88561\sqrt{21})a^2}{72\alpha^2} \delta_2^2 + O(|\delta_1, \delta_2|^3) = 0 \right\}; \end{aligned} \quad (3.9)$$

(ii) Hopf分支(Hopf)曲线为

$$\begin{aligned} Hopf &= \left\{ \delta \mid d_1 = 0, d_2 < 0 \right\} \\ &= \left\{ \delta \mid \frac{8(1375 + 28\sqrt{21})}{81\alpha e} \delta_1 + \frac{(4713 + 1459\sqrt{21})a}{27\alpha} \delta_2 + \frac{88(885 + 23\sqrt{21})}{243\alpha^2 e^2} \delta_1^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(132765 + 32269\sqrt{21})a}{81\alpha^2 e} \delta_1 \delta_2 + \frac{(141765 + 30461\sqrt{21})a^2}{18\alpha^2} \delta_2^2 + O(|\delta_1, \delta_2|^3) = 0 \right\}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

(iii) 同宿分支(HL)曲线为

$$\begin{aligned}
 HL &= \left\{ \delta \mid d_1 = -\frac{6}{25}d_2^2, d_2 < 0 \right\} \\
 &= \left\{ \delta \mid \frac{8(1375+28\sqrt{21})}{81\alpha e} \delta_1 + \frac{(4713+1459\sqrt{21})a}{27\alpha} \delta_2 + \frac{8(500179+62085\sqrt{21})}{6075\alpha^2 e^2} \delta_1^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2(4994721+1173337\sqrt{21})a}{2025\alpha^2 e} \delta_1 \delta_2 + \frac{37(120555+25979\sqrt{21})a^2}{450\alpha^2} \delta_2^2 + O(|\delta_1, \delta_2|^3) = 0 \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

定理 3: 对于系统(3.1)及例 2 中的参数条件, 如果取分支参数为 m_2 和 d , 对于平衡点 $E_*^{(2)}$, 当参数 δ 在原点的某个小邻域内变化时, 存在某些参数值使得系统(3.1)出现余维 2 Bogdanov-Takens 分支。 ■

例 3: 按照 2.2 小节中的例取参数值, 有如下鞍 - 结(红色), Hopf(绿色)及同宿(蓝色)分支曲线图(见图 5), 并将该邻域划分为若干子区域, 使得在每个子区域上系统(3.1)展示出不同的动力学行为。叙述如下。

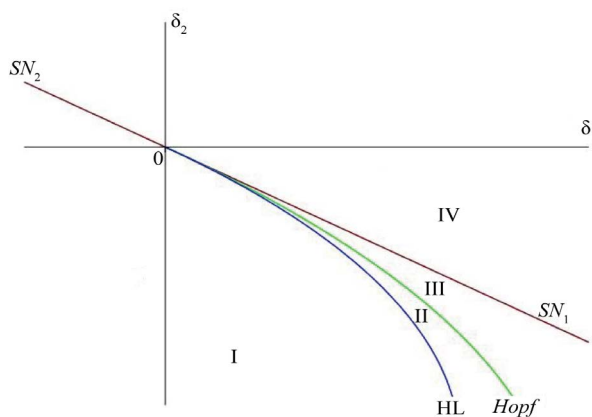


Figure 5. Curves of saddle-node (red), Hopf (green) and homoclinic (blue) bifurcations

图 5. 鞍 - 结(红色), Hopf(绿色)及同宿(蓝色)分支曲线

- (i) 当 $\delta = 0$ 时, 存在一个余维 2 尖点 $E_*^{(2)}$ 和一个渐近稳定的结点 $E_*^{(1)}$, 见 2.2 节例 2;
 - (ii) 当 $\delta = (0.0001, -1.953216 \times 10^{-5})$, 即参数 δ 落在区域 I 上时, 存在一个不稳定焦点, 一个鞍点和一个稳定结点, (iii)中的同宿环破缺;
 - (iii) 当参数 δ 落在同宿分支曲线上时, 存在一个不稳定的焦点, 一个鞍点和一个稳定结点, 以及一条同宿环;
 - (iv) 当 $\delta = (0.0001, -3.906377 \times 10^{-5})$, 即参数 δ 落在区域 II 上时, 存在一个不稳定的焦点, 一个鞍点和一个稳定结点;
 - (v) 当参数 δ 落在 Hopf 分支曲线上时, 存在一个鞍点和一个稳定结点, 以及一个非双曲点(具有一对共轭纯虚本征值);
 - (vi) 当 $\delta = (0.0001, -3.906266 \times 10^{-5})$, 即参数 δ 落在区域 III 上时, 存在一个稳定的焦点, 一个鞍点和一个稳定结点, 结合(iv)知这保证了 Hopf 分支;
 - (vii) 当 $\delta_1 = 0.0001, \delta_2 = 0$, 即参数 δ 落在区域 IV 上时, 存在唯一的稳定结点;
 - (viii) 当参数 δ 落在鞍 - 结分支曲线 SN_1 上时, 存在三个内平衡点;
 - (ix) 当参数 δ 落在鞍 - 结分支曲线 SN_2 上时, 存在唯一的稳定结点。
- 最后考虑取参数条件(2.2)~(2.4)时系统(3.1)的非退化 Hopf 分支存在曲线, 引入 $x = x_* + w, |w| \ll 1$,

计算 $A_1 = 0$ 及 $A_2 > 0$ 可得 $\delta_1(w)$ 和 $\delta_2(w)$, 即

$$\delta_1 = \frac{w\alpha e}{\mu a [e(\rho-1)\alpha + \mu(m_1 - r_1)] [((\rho-1)a - w)e\alpha + \mu a(m_1 - r_1)]} \tag{3.12a}$$

$$\left[\left((2\rho^2 + \mu - 4\rho + 1)a - 2w(\rho-1) \right) e^2 \alpha^2 + 4\mu \left((\rho - 3/4)a - (1/2)w \right) (m_1 - r_1) e\alpha + 2a\mu^2 (m_1 - r_1)^2 \right],$$

$$\delta_2 = \frac{-1}{a [e(\rho-1)\alpha + \mu(m_1 - r_1)]^2 \rho(a\rho - w) [((\rho-1)a - w)e\alpha + \mu a(m_1 - r_1)]^2} \tag{3.12b}$$

$$\left[2w\alpha \left(\left((\rho^2 - \rho)a - w(\rho - 1/2) \right) \rho(a\rho - w) e^4 \alpha^4 + 3\mu \left((\rho^2 - (2/3)\rho + 1/3)a - w(\rho - 1/3) \right) \right. \right.$$

$$\left. \left((\rho - 1/2)a - (1/2)w \right) (m_1 - r_1) e^3 \alpha^3 + (7/2)\mu^2 (m_1 - r_1)^2 \right.$$

$$\left. \left((\rho^2 - (8/7)\rho + 3/7)a^2 - w(\rho - 4/7)a + (1/7)w^2 \right) e^2 \alpha^2 \right.$$

$$\left. + 2\mu^3 \left((\rho - 3/4)a - (1/2)w \right) a(m_1 - r_1)^3 e\alpha + (1/2)a^2 \mu^4 (m_1 - r_1)^4 \right].$$

因此系统(3.1)的 Hopf 分支存在曲线定义为

$$Hp = \{ \delta | (\delta_1, \delta_2) \text{ 满足(3.12), } A_2 > 0 \}, \tag{3.13}$$

并且曲线 Hp 在参数平面上原点 O 处某邻域内近似为一条直线, 其斜率为 $k_{Hp} = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{\delta_2(w)}{\delta_1(w)}$, 即

$$k_{Hp} = \frac{\left[(m_1 - r_1)^3 \mu^3 + \alpha e(3\rho - 2)(m_1 - r_1)^2 \mu^2 + \alpha^2 e^2 (4\rho^2 - 3\rho + 1)(m_1 - r_1) \mu + 2\alpha^3 e^3 \rho^3 \right] \mu}{ae\rho^2 \left[\alpha e(1 - \rho) + \mu(r_1 - m_1) \right] \left[2(m_1 - r_1)^2 \mu^2 + \alpha e(\alpha e + (4\rho - 3)(m_1 - r_1)) \mu + \alpha^2 e^2 (2\rho^2 - 4\rho + 1) \right]}. \tag{3.14}$$

显然在例2的参数条件下, 斜率 k_{Hp} 退化为 k_{BT} 。按例2的参数值, 图6是相应的Hopf分支存在曲线, 将参数平面划分为I, II两个区域。当参数 δ 分别落在区域I, II上时, 相应平衡点分别为稳定的焦点和不稳定焦点, 后者导致极限环产生。

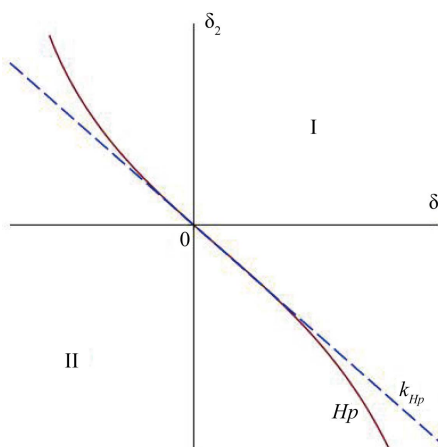


Figure 6. Hopf (Hp) bifurcation curve
图6. Hopf (Hp)分支曲线

4. 总结与讨论

对于一般复杂的非线性捕食生态模型, 往往难以求得内平衡点的解析表达式[19]。本文从一个全局渐近稳定性定理出发给出了特定参数条件下的一类内平衡点, 而不是首先从Jacobi矩阵本征值为零的角度出发进行求解。从代数学上看, 我们获得了平衡点所满足的代数方程的一类特殊解。通过计算又得到了余维3 BT奇点(焦点或中心), 这与用内平衡点分量 x_* 或 y_* 所满足三次方程的判别式或者直接使用等价系统判断 $d_1 d_2$ 相比较, 所得结果一致。这启示我们, 某种程度上表明了系统(1.1)中余维3尖点的唯一性, 以及余维 $N(\geq 4)$ 尖点的不存在性, 这是今后要考虑的问题(P1)。另外, 对于一般的非奇异变量变换, 系统(1.1)具有何种不变量或守恒量是一个需要深入思考的问题(P2), 如细焦点的Lyapunov系数或焦点量, 余维2尖点的“指标” $\text{sgn}(d_1 d_2) = \pm 1$, 等等。

对于一些复杂的临界情况暂未予以考虑, 如 $\sigma = 0$ 时的细焦点分析和退化Hopf分支, 一般 $d_1 d_2 \neq 0$ 时的余维2 BT分支曲线, 前者需进一步考虑更烦琐的高阶焦点量或Lyapunov系数, 但后者可以参考第3节的方法, 同时注意对余维2尖点进行分类。2.2小节表明了所得余维2尖点的存在性, 第3节表明了这一类余维2 BT分支的存在性。至于由2.2小节引出的余维3退化焦点型BT分支, 也可以得到, 如取 r_1 , K_1 和 d 为分支参数[6] [23]。第3节给出的Hopf分支存在曲线与斜率 k_{Hp} 似乎表明, 当 $\mu \rightarrow \mu^{BT}$ 时, BT分支是Hopf分支的极限情况, 这也是今后需要考虑的问题(P3)。最后本文所用方法对于其它捕食模型仍然具有参考意义, 如[19]。

致 谢

作者感谢编辑的细致工作, 感谢审稿人所提的宝贵建议, 感谢赵敏老师和戴传军老师。

基金项目

国家自然科学基金面上项目(31570364); 国家自然科学基金(61871293); 国家重点研发计划“政府间国际科技创新合作/港澳台科技创新合作”重点专项项目(2018YFE0103700)。

参考文献

- [1] Bazykin, A.D. (1998) *Nonlinear Dynamics of Interacting Populations*. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/2284>
- [2] Bazykin, A.D. (1976) *Structural and Dynamic Stability of Model Predator-Prey Systems*. RM-76-8 International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg.
- [3] Pei, Y.Z., Chen, L.S., Zhang, Q.R. and Li, C.G. (2005) Extinction and Performance of One-Prey Multi-Predators of Holling Type II Function Response System with Impulsive Biological Control. *Journal of Theoretical Biology*, **235**, 495-503. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2005.02.003>
- [4] Holling, C.S. (1965) The Functional Response of Predators to Prey Density and its Role in Mimicry and Population Regulation. *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, **97**, 3-60. <https://doi.org/10.4039/entm9745fv>
- [5] Misha, P. and Raw, S.N. (2019) Dynamical Complexities in a Predator-Prey System Involving Teams of Two Prey and One Predator. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **61**, 1-24. <https://doi.org/10.1007/s12190-018-01236-9>
- [6] Huang, J.C., Ruan, S.G. and Song, J. (2014) Bifurcation in a Predator-Prey System of Leslie Type with Generalized Holling Type III Functional Response. *Journal of Differential Equations*, **257**, 1721-1752. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2014.04.024>
- [7] Rosenzweig, M.L. and MacArthur, R. (1963) Graphical Representation and Stability Conditions of Predator-Prey Interactions. *The American Society of Naturalists*, **97**, 209-223. <https://doi.org/10.1086/282272>
- [8] Hsu, S.B. and Huang, T.W. (1995) Global Stability for a Class of Predator-Prey Systems. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **55**, 763-783. <https://doi.org/10.1137/S0036139993253201>
- [9] 陈兰荪, 井竹君. 捕食者-食饵相互作用中微分方程的极限环存在性和唯一性[J]. 科学通报, 1984, 9(3): 521-523.
- [10] Metzler, W. and Wischniewsky, W. (1985) Bifurcations of Equilibria in Bazykin's Predator-Prey Model. *Mathematical*

- Modelling*, **6**, 111-123. [https://doi.org/10.1016/0270-0255\(85\)90003-X](https://doi.org/10.1016/0270-0255(85)90003-X)
- [11] Wang, Y.Q., Jing, Z.J. and Chan, K.Y. (1999) Multiple Limit Cycles and Global Stability in Predator Prey Model. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, **15**, 206-219. <https://doi.org/10.1007/BF02720497>
- [12] Freedman, H.I. (1979) Stability Analysis of a Predator Prey System with Mutual Interference and Density Dependent Death Rate. *Bulletin of Mathematical Biology*, **41**, 67-78. [https://doi.org/10.1016/S0092-8240\(79\)80054-3](https://doi.org/10.1016/S0092-8240(79)80054-3)
- [13] Hainzl, J. (1988) Stability and Hopf Bifurcation in a Predator-Prey System with Several Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **48**, 170-190. <https://doi.org/10.1137/0148008>
- [14] Kazarinoff, N.D. and Driessche, P. Van Den. (1978) A Model Predator-Prey System with Functional Response. *Mathematical Biosciences*, **39**, 125-134. [https://doi.org/10.1016/0025-5564\(78\)90031-7](https://doi.org/10.1016/0025-5564(78)90031-7)
- [15] Qiu, X.X. and Xiao, H.B. (2013) Qualitative Analysis of Holling Type II Predator-Prey Systems with Prey Refuges and Predator Restricts. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **14**, 1896-1906. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2013.01.001>
- [16] Wang, S.T., Yu, H.G., Dai, C.J. and Zhao, M. (2020) The Dynamical Behavior of a Certain Predator-Prey System with Holling Type II Functional Response. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, **8**, 527-547. <https://doi.org/10.4236/jamp.2020.83042>
- [17] Perko, L. (2001) *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0003-8>
- [18] Kuznetsov, Y. (1998) *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 2nd Edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [19] Wang, S.T. and Yu, H.G. (2021) Complexity Analysis of a Modified Predator-Prey System with Beddington-DeAngelis Functional Response and Allee-Like Effect on Predator. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2021**, Article ID: 5618190. <https://doi.org/10.1155/2021/5618190>
- [20] Huang, J.C., Gong, Y.J. and Chen, J. (2013) Multiple Bifurcations in a Predator-Prey System of Holling and Leslie Type with Constant-Yield Prey Harvesting. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article ID: 1350164. <https://doi.org/10.1142/S0218127413501642>
- [21] Cai, L.L., Chen, G.T. and Xiao, D.M. (2013) Multiparametric Bifurcations of an Epidemicological Model with Strong Allee Effect. *Journal of Mathematical Biology*, **67**, 185-215. <https://doi.org/10.1007/s00285-012-0546-5>
- [22] Tang, B. and Xiao, Y.N. (2015) Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Model with Anti-Predator Behavior. *Chaos, Solitons and Fractals*, **70**, 58-68. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2014.11.008>
- [23] Huang, J.C., Xia, X.J., Zhang, X.N. and Ruan, S.G. (2016) Bifurcation of Codimension 3 in a Predator-Prey System of Leslie Type with Simplified Holling Type IV Functional Response. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **26**, Article ID: 1650034. <https://doi.org/10.1142/S0218127416500346>