

# 基于CUDA的多导体传输线方程迭代QR分解的并行算法

罗建书, 张冲\*

湖南交通工程学院, 湖南 衡阳  
Email: jshluo@126.com, \*307649360@qq.com

收稿日期: 2021年7月26日; 录用日期: 2021年8月19日; 发布日期: 2021年8月31日

## 摘要

基于电报方程发展的多导体传输线方程, 随着导线的数量和复杂性的增加, 导体的特征阻抗矩阵和导纳矩阵以及加上外部激励分布源向量的维数变得很大, 从而使得求解由多导体传输线组成的电缆上的电压或电流的计算量和内存开销很大。本文考虑了有损导体和有损介质的一般情况, 给出了基于CUDA的特征阻抗矩阵和导纳矩阵的迭代QR方法的并行化方法。为了证明我们的方法的有效性, 我们评估了三种不同类型的实现类型: 传统的单线程C++, 使用OpenMP加速的C++和NvidiaCUDA。评估结果表明, 当问题的维度达到数百个时, CUDA的GPU实现明显比单线程C++和OpenMP的CPU实现更有效。

## 关键词

多导体传输线, 迭代QR方法, CUDA

# Parallelization of QR Decomposition Algorithm in Multiconductor Transmission Line Equation Based on CUDA

Jianshu Luo, Chong Zhang\*

Hunan Traffic Engineering College, Hengyang Hunan  
Email: jshluo@126.com, \*307649360@qq.com

Received: Jul. 26<sup>th</sup>, 2021; accepted: Aug. 19<sup>th</sup>, 2021; published: Aug. 31<sup>st</sup>, 2021

## Abstract

Based on the multi-conductor transmission line equation developed from the telegraph equation, \*通讯作者。

as the number and complexity increase, the characteristic impedance matrix and conduction matrix and the dimension of the external excitation distribution source vector become large, resulting in the computational amount and memory overhead of solving the voltage or current on the cable composed of multi-conductor transmission lines. In this paper, we consider the general case of lossy conductor and lossy dielectric, and present the parallelization of iterative QR method for a matrix multiplied by the characteristic impedance matrix and admittance matrix based on CUDA. To prove the effectiveness of our method, we evaluate three different types of implementations: traditional single-thread C++, C++ accelerated with OpenMP and NvidiaCUDA. The evaluation result suggests that when the dimensions of problem reach hundreds, GPU implementation of CUDA is significantly more effective than CPU implementations of single-thread C++ and OpenMP.

## Keywords

Multi-Conductor Transmission Line, Iterative QR Method, CUDA

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

具有  $N$  条平行导体和一条与之平行的参考导体组成的  $N$ -线多导体传输线, 是组成复杂电子系统的基本电路单元形式之一。求解这样的多导体传输线上传播的电压波与电流, 有许多学者进行了研究。Carl E. Baum、T. K. Liu 与 F. M. Tesche 在文献[1]中以正实矩阵的特征模展开方法给出了有损导体与有耗介质一般情形下的解法, 但没有给出特征值与特征向量的具体计算方法。文献[2]给出了多导体传输线问题的一种数值解方法。C. R. Paul 在[3]中详细讨论了在没有外加激励源情形下多导体传输线电压与电流传播方程在导体无损与有损, 介质无耗与有耗情形下的解, 而对于导体有损与介质有耗的一般情形, 只详细讨论了导体循环对称排列的特殊情形。F. M. Tesche 与 M. V. Ianoz 和 T. Karlsson 详细介绍了在无耗介质情形下的多导体传输线上电压与电流传播方程的解[4]。F. M. Tesche、J. Keen 和 C. M. Butler 在[5]中给出了用 BLT 方程计算电磁场传播与耦合的实例。L. Paletta、J.-P. Parmantier 等在文献[6]中将电磁场 - 传输线耦合模型应用于大型电缆系统分析。

多导体传输线上控制电压与电流传播的方程基于双导线的电报方程发展而来。但多导体传输线与双导体传输线有两个不同之处: 一是在双导体传输线中为消除终端反射, 只需使终端负载阻抗等于导体的特征阻抗即可。但在多导体传输线问题中, 必需考虑特征阻抗矩阵, 且一般为非对角矩阵。二是  $N$  条导体与参考导体之间的电容和电导也形成矩阵关系, 因此, 在有损导体与有耗介质情形导纳矩阵也是非对角矩阵。随着导体的数量增加, 使得多导体传输线方程中特征阻抗矩阵和导纳矩阵的维数变得很大。而求解多导体传输线方程, 需要计算导纳矩阵与特征阻抗矩阵的乘积的特征值与特征向量。对于高维的导纳矩阵与特征阻抗矩阵的乘积矩阵, 尤其是对于有损导体和有耗介质的情形, 两类矩阵均为复数矩阵, 且与频率有关。因此, 计算其特征值与特征的向量的计算量与内存开销是相当大的。从而使得求解由多导体传输线组成的电缆上的电压波或电流的计算量与内存开销变得很大。本文针对有损导体与无耗介质和有损导体与有耗介质的一般情形, 采用文献[7]中迭代 QR 方法计算导纳矩阵和特征矩阵的乘积矩阵的特征值, 再采用迭代算法计算特征向量, 约简了求解多导体传输线方程的计算量与内存开销。最后给出了具体算例。

现在, 求解 MTL 方程最常见的方法是 QR 算法。但传统的 QR 算法, 仍然需要重复矩阵的数百万次甚至数千万次的乘法。因此, 需要实现 QR 算法的并行化, 以减少计算时间。本文根据文献[8]中介绍的一般方法, 提出了一种并行的 QR 分解算法来求解 MTL 方程。我们还提供了并行算法和串行算法之间的时间的比较。

## 2. $N$ 线多导体传输线方程的导出

对于由  $N$  条均匀平行细导体和一条参考导体组成的  $N$ -线多导体传输线, 考虑导体是有损的, 电介质也是有耗的。设导体平行于  $z$  轴, 假设外加于第  $n$  条导体的激励电压源为  $v_n^{(s)}(z, \omega)$ , 激励电流源为  $i_n^{(s)}(z, \omega)$ , 则控制  $N$ -线多导体传输线上电压与电流传播的方程为

$$\frac{d}{dz} i_n(z, \omega) + \sum_{m=1}^N y'_{nm}(\omega) v_m(z, \omega) = i_n^{(s)}(z, \omega), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} v_n(z, \omega) + \sum_{m=1}^N z'_{nm}(\omega) i_m(z, \omega) = v_n^{(s)}(z, \omega), \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (2)$$

其中  $y'_{nm}(z, \omega)$  为对应于频率  $\omega$  的第  $n$  条均匀导体相对于第  $m$  条均匀导体每单位长度上的导纳, 与  $z$  无关,  $z'_{nm}(z, \omega)$  为相应的特征阻抗。以向量  $\mathbf{I}(z, \omega), \mathbf{V}(z, \omega)$  分别记  $N$ -线传输线上的电流向量与电压向量, 以矩阵  $\mathbf{Y}'(\omega) = (y'_{nm}(\omega)), \mathbf{Z}'(\omega) = (z'_{nm}(\omega))$  分别记  $N$ -线传输线上导纳与特征阻抗, 以向量  $\mathbf{I}^{(s)}(z, \omega), \mathbf{V}^{(s)}(z, \omega)$  分别记外加激励源的电流与电压向量, 则  $N$ -线多导体传输线方程(1)、(2)可表示为

$$\frac{d}{dz} \mathbf{I}(z, \omega) + \mathbf{Y}'(\omega) \mathbf{V}(z, \omega) = \mathbf{I}^{(s)}(z, \omega) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz} \mathbf{V}(z, \omega) + \mathbf{Z}'(\omega) \mathbf{I}(z, \omega) = \mathbf{V}^{(s)}(z, \omega) \quad (4)$$

方程(3)、(4)是带激励源的  $N$ -线多导体传输线方程的一般形式, 其中激励源可分为天线模与传输线模, 而因天线模在传输终端为零, 一般只考虑传输线终端的响应, 故常忽略天线模。这里考虑的是正弦型激励源。

在有损导体与有耗介质的情形下,  $\mathbf{Y}'(\omega)$  与  $\mathbf{Z}'(\omega)$  均为复矩阵, 为解方程(3)、(4), 希望去掉  $\mathbf{I}(z, \omega)$  与  $\mathbf{V}(z, \omega)$  之间的耦合。为此, 用非奇异矩阵  $\mathbf{T}(\omega) = (t_{nm})_{N \times N}$  左乘方程(3)的两边, 再与(4)的两边相加, 得

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} [\mathbf{T}(\omega) \mathbf{I}(z, \omega) + \mathbf{V}(z, \omega)] \\ &= -[\mathbf{T}(\omega) \mathbf{Y}'(\omega) \mathbf{V}(z, \omega) + \mathbf{Z}'(\omega) \mathbf{I}(z, \omega)] + [\mathbf{T}(\omega) \mathbf{I}^{(s)}(z, \omega) + \mathbf{V}^{(s)}(z, \omega)] \end{aligned} \quad (5)$$

令

$$\mathbf{V}_T(z, \omega) = \mathbf{T}(\omega) \mathbf{I}(z, \omega) + \mathbf{V}(z, \omega) \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_T^{(s)}(z, \omega) = \mathbf{T}(\omega) \mathbf{I}^{(s)}(z, \omega) + \mathbf{V}^{(s)}(z, \omega) \quad (7)$$

则方程组(5)可表示为

$$\frac{d}{dz} \mathbf{V}_T(z, \omega) = -[\mathbf{T}(\omega) \mathbf{Y}'(\omega) \mathbf{V}(z, \omega) + \mathbf{Z}'(\omega) \mathbf{I}(z, \omega)] + \mathbf{V}_T^{(s)}(z, \omega) \quad (8)$$

令

$$\mathbf{T}(\omega) \mathbf{Y}'(\omega) \mathbf{V}(z, \omega) + \mathbf{Z}'(\omega) \mathbf{I}(z, \omega) = \mathbf{B}(\omega) \mathbf{V}_T(z, \omega) \quad (9)$$

则要求同时成立

$$B(\omega)T(\omega) = Z'(\omega), \quad B(\omega) = T(\omega)Y'(\omega) \quad (10)$$

于是, 由(10)的后一式, 有

$$T(\omega) = B(\omega)(Y'(\omega))^{-1} \quad (11)$$

代入(10)式的前一式, 有

$$B^2(\omega) = Y'(\omega)Z'(\omega)$$

如果  $Y'(\omega)Z'(\omega)$  能够对角化, 即存在酉矩阵  $U(\omega)$ , 使得

$$B^2(\omega) = U^*(\omega)Y'(\omega)Z'(\omega)U(\omega) = \text{diag}(\gamma_1^2, \gamma_2^2, \dots, \gamma_N^2) \quad (12)$$

取  $\gamma_k = q(\gamma^2)^{1/2}, k = 1, 2, \dots, N$ , 则

$$Y'(\omega)Z'(\omega) = U(\omega) = (U(\omega)q\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N))^* (U(\omega)q\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)), q = \pm 1 \quad (13)$$

从而可取

$$B_q(\omega) = U(\omega)q\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N), q = \pm 1 \quad (14)$$

由(10)的第二式知

$$T_q(\omega) = U(\omega)q\text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)[Y'(\omega)]^{-1}, q = \pm 1 \quad (15)$$

于是方程(8)可表示为

$$\frac{d}{dz} \mathbf{V}_{T,q}(z, \omega) = -B_q(\omega)\mathbf{V}_{T,q}(z, \omega) + \mathbf{V}_{T,q}^{(s)}(z, \omega), q = \pm 1 \quad (16)$$

其中  $q = +1$  对应着沿  $z$  轴正向的波,  $q = -1$  对应于沿  $z$  轴负向的波, 而称  $\mathbf{V}_{T,q}(z, \omega), q = \pm 1$  为组合电压波。

从方程组(15)求得组合电压波  $\mathbf{V}_{T,q}(z, \omega), q = \pm 1$  后, 则可从下两式求得  $\mathbf{I}_q(z, \omega)$  与  $\mathbf{V}_q(z, \omega)$ ,

$$\mathbf{I}_q(z, \omega) = T_q^{-1}(\omega)(\mathbf{V}_{T,q}(z, \omega) - \mathbf{V}_q(z, \omega)) \quad (17)$$

$$\mathbf{V}_q(z, \omega) = Z_q(\omega)\mathbf{I}_q(z, \omega) \quad (18)$$

其中

$$Z_q(\omega) = B_q^{-1}(\omega)Z'(\omega) \quad (19)$$

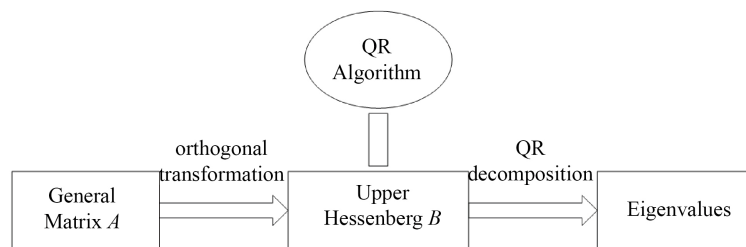
文献[1]采用正实矩阵的特征展开方法讨论  $Y'(\omega)Z'(\omega)$  的对角化问题和方程组(16)的解, 但没有给出  $Y'(\omega)Z'(\omega)$  的特征值与特征向量的具体计算方法。而且, 对于无损导体与无耗介质以及有损导体与无耗介质的情形,  $Y'(\omega)Z'(\omega)$  的对角化的变换矩阵与频率  $\omega$  无关, 因此用特征模展开方法对角化  $Y'(\omega)Z'(\omega)$  增加了计算量和内存开销。

因此, 如果我们想解决这个问题, 实现矩阵对角化是必要的。因此, 我们的工作是将这个串行过程转换为并行算法。

### 3. QR 算法

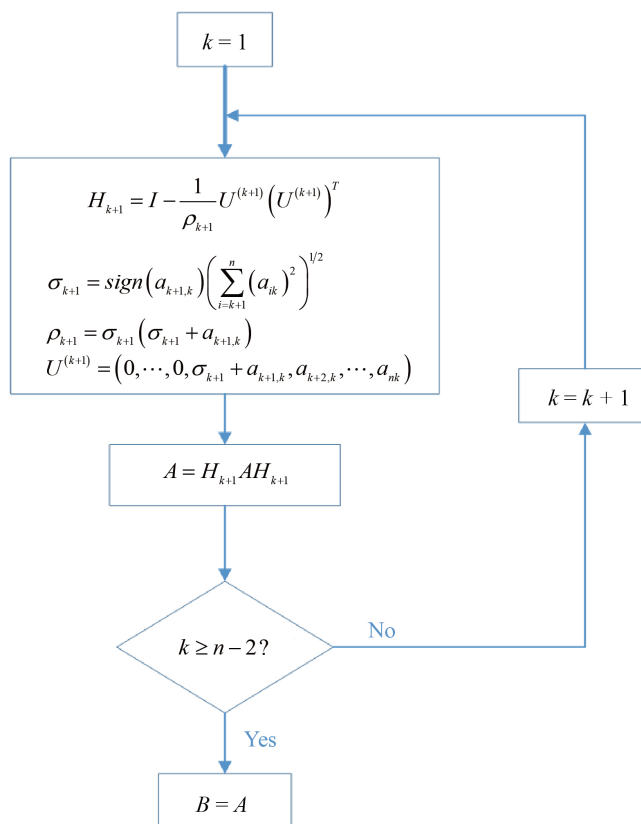
从图 1 中可以看出, QR 算法可以分为两部分。

第一部分是建立 Householder 矩阵  $H$ , 并进行正交变换, 将一般矩阵  $A$  变为上 Hessenberg 矩阵  $B$ 。具体步骤如下。



**Figure 1.** Flow chart for QR algorithm  
**图 1.** QR 算法流程图

第二部分是利用给定的变换对上 Hessenberg 矩阵进行 QR 分解。具体步骤如图 2 所示。



**Figure 2.** The steps of turning a general matrix into an upper Hessenberg matrix  
**图 2.** 将一般矩阵变换为上 Hessenberg 矩阵的步骤

按图 2 所示过程进行迭代，将得到主对角线矩阵的特征值的数值解。

#### 4. QR 算法的并行化

QR 算法如图 4 所示。其中第二部分，是 QR 分解，是迭代的，很难解耦。因此，我们选择第一部分来实现其并行性。

在第一部分中，可以看到矩阵乘法消耗了大部分时间。因此，我们在 CUDA 中的矩阵乘法函数的基础上开发了一个并行算法。并行算法的过程如图 3 所示。

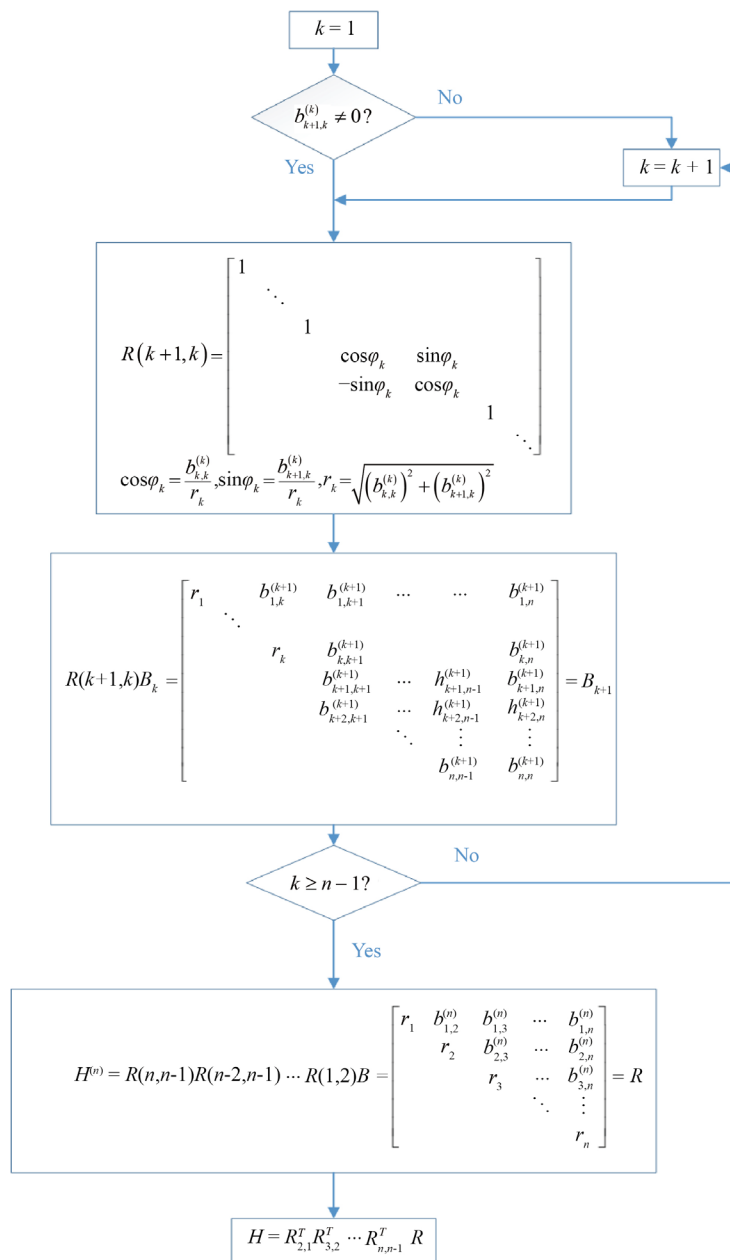


Figure 3. The steps of QR decomposition over the upper Hessenberg matrix  
 图 3. 上 Hessenberg 矩阵上的 QR 分解步骤

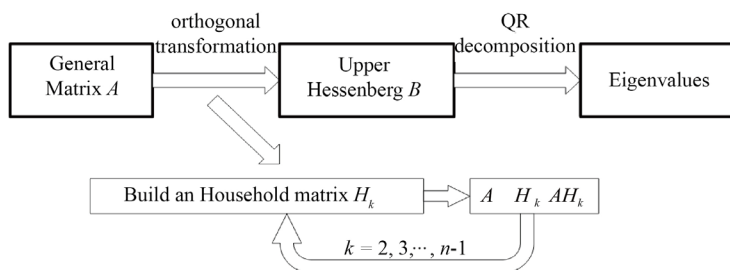


Figure 4. Flow chart for QR algorithm  
 图 4. QR 算法的流程

首先, 在 GPU 上申请一个内存块, 然后将初始矩阵从 CPU 传递给 GPU。从而, 如图 2 所示, 只需计算 GPU 的计算时间。在图 4 所示的每个计算周期中, 我们构建了一个 Household 矩阵。由于矩阵乘法的并行化方法是很成熟的, 可将每个乘法实现并行法。我们构建了一个并行算法来将一般矩阵转换为上 Hessenberg 矩阵。

从图 5 可以看出, 对于小维问题, CUDA 比 C++慢。事实上, 诸如 OpenMP 这样的并行实现并没有多大好处。然而, 对于大规模的问题, 并行实现显著加快了计算速度。CUDA 是最快的实现, 运行时间小于 C++的 10%。

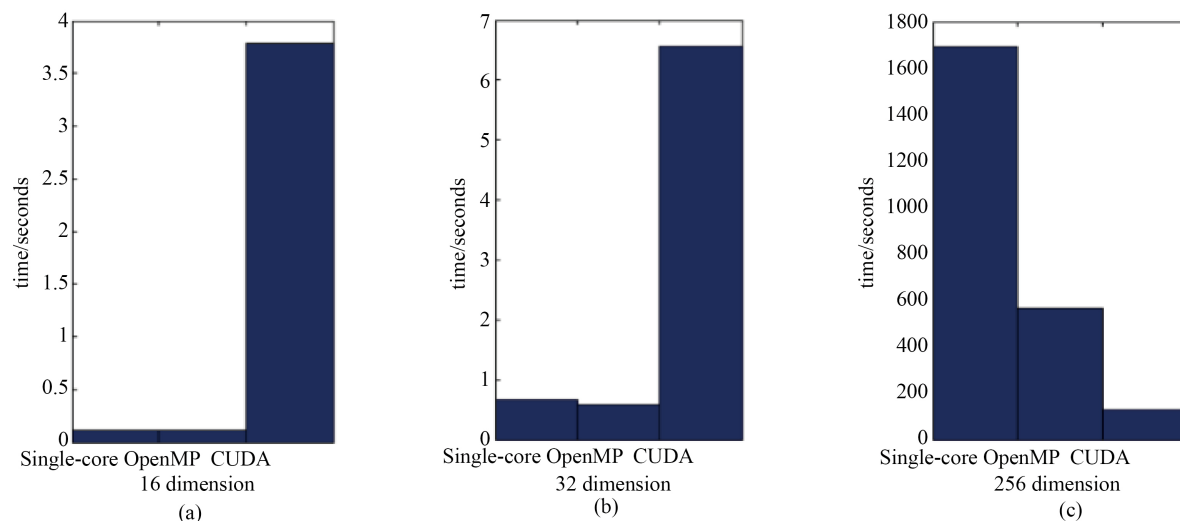


Figure 5. Comparison of three algorithms in three dimensions

图 5. 三种算法的三维比较

## 5. 试验结果

我们在不同的平台上实现了该算法: C++语言中的串行算法, 支持 OpenMP 的并行算法和 CUDA 上的并行算法。由于一根电缆通常由 16 或 32 或 256 根线组成, 所以我们选择 16 阶、32 阶和 256 阶矩阵来测试这些算法。结果如表 1 所示。

Table 1. Running time of different algorithms

表 1. 不同算法的运行时间

Matrix Dimension	C++	OpenMP	CUDA
16	0.112s	<b>0.109s</b>	3.785s
32	0.662s	<b>0.582s</b>	6.556s
256	1691.884s	566.767s	<b>128.19s</b>

从上述数据可以看出, 对于大型矩阵, 并行算法比串行算法具有很大的优势。当矩阵足够大时, CUDA 可以节省更多的计算时间。然而, 当矩阵的阶数不够高时, OpenMP 会更好。

## 6. 结论

本文提出了一种基于 CUDA 的并行化方法, 实现了 QR 算法来求解 MTL 方程。为了说明方法的有

效性, 实现了三种不同类型的算法: 传统的单线程 C++, 使用 OpenMP 加速的 C++ 和 NvidiaCUDA。结果表明, 当问题的维度达到数百个时, CUDA 的 GPU 实现明显比单线程 C++ 和 OpenMP 的 CPU 实现更有效。

## 基金项目

本研究由湖南省衡阳市科技创新平台计划(重点实验室)项目“大数据交通应急管理实验室”资助, 批准号 202010041588。

本研究由国家自然科学基金项目 11271370 资助。

## 参考文献

- [1] Baum, C.E., Liu, T.K. and Tesche, F.M. (1978) On the Analysis of General Multiconductor Transmission Line Networks. Kirtland AFB, Albuquerque, NM, Interaction Note 350.
- [2] Baum, C.E., Liu, T.K., Tesche, F.M. and Chang, S.K. (1977) Numerical Results for Multiconductor Transmission-Line Networks. Interaction Note 322, Air Force Weapons Laboratory, Albuquerque, NM, September 1977.
- [3] Paul, D.R. (1994) Analysis of Multiconductor Transmission Lines. Wiley, New York.
- [4] Tesche, F.M., Ianoz, M.V. and Karlsson, T. (1997) EMC Analysis Methods and Computational Models. Wiley, New York.
- [5] Tesche, F.M., Keen, J. and Butler, C.M. (2004) Example of the Use of the BLT Equation for EM Field Propagation and Coupling Calculations. Kirtland AFB, Albuquerque, NM, Interaction Note 591, 16 August 2004.
- [6] Paletta, L., Parmantier, J.-P., Issac, F., Dumtas, P. and Alliot, J.-C. (2002) Susceptibility Analysis of Wiring in a Complex System Combining a 3-D Solver and a Transmission-Line Network Simulation. *IEEE Transactions on EMC*, **44**, 309-317. <https://doi.org/10.1109/TEMC.2002.1003395>
- [7] Kincaid, D.R. and Cheney, E.W. (2001) Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing. American Mathematical Society, Providence.
- [8] Shane Cook. CUDA 并行程序设计: GPU 编程指南[M]. 苏统华, 李东, 李松泽, 译. 北京: 机械工业出版社, 2014.