Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, **2021, 10(9), 3217-3224**
Published Online September 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.109336

Hans汉斯

浅谈几种求逆矩阵的方法

徐晓静

沈阳师范大学，辽宁 沈阳
Email: 1748691725@qq.com

收稿日期：2021年8月26日；录用日期：2021年9月15日；发布日期：2021年9月27日

摘　要

矩阵求逆作为线性代数的一个重要研究内容，在通信工程、计算机、物理学等领域有着广泛的应用。矩阵是大学数学中很重要的一个内容，在《高等代数》中我们学习了矩阵的一些基本知识及应用，而矩阵求逆的方法是矩阵中一个很重要的部分，那么如何判断一个矩阵是否可逆，怎样快速的去求解矩阵的逆，前人也总结了一些非常实用的方法。本文结合自身所掌握的知识，结合一些有代表性的例子进行说明，为了更便捷地解决求矩阵的逆，本文根据不同矩阵的不同特点简单介绍了几种求逆矩阵的方法：定义法、伴随矩阵法、初等变换法、分块矩阵法，同时也找出了一类特殊矩阵求逆的方法。

关键词

矩阵的逆，初等变换，伴随矩阵，分块矩阵，
初等循环矩阵

Discussion on Several Methods of Finding Inverse Matrix

Xiaojing Xu

Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning
Email: 1748691725@qq.com

Received: Aug. 26th, 2021; accepted: Sep. 15th, 2021; published: Sep. 27th, 2021

文章引用：徐晓静. 浅谈几种求逆矩阵的方法[J]. 应用数学进展, 2021, 10(9): 3217-3224.
DOI: 10.12677/aam.2021.109336

Abstract

As an important research content of linear algebra, matrix inverse is widely used in communication engineering, computer, physics and other fields. Matrix is an important content in university mathematics, in the "advanced algebra", we learned some basic knowledge and application of matrix, the matrix inversion method is a very important part of the matrix, so how to determine whether a matrix is reversible, how to quickly to solve the inverse of the matrix, predecessors also summarize some very practical method. The text is explained in combination with its own knowledge and some representative examples. In order to solve the inverse matrix more conveniently, this paper simply introduces several methods of inverse matrix according to the different characteristics of different matrices: definition method, adjoint matrix method, elementary transformation method, partition matrix method. At the same time, the inverse method of a special kind of matrix is found.

Keywords

Matrix Inverse, Elementary Transformation, Adjoint Matrix, Partitioned Matrix, Elementary Cyclic Matrix

1. 逆矩阵的概念[1]

n 阶方阵 A 是可逆的，如果存在数域 P 上的 n 阶方阵 B，使得 $AB = BA = E$，这里的 E 是 n 阶单位阵。当 A 可逆时，逆矩阵由 A 唯一确定，记为 A^{-1}。

2. 利用初等变换求矩阵的逆[1]

初等变换法：

1. $(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$

对于阶数 $(n \geq 3)$ 的矩阵一般采用初等行变换，但需要注意用上述方法求矩阵的逆只可以用初等行变换。

2. 可以利用 $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$。

3. 特别的当 A 是可逆的，可以用 $(A \mid B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1}B)$，$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix}$

快速求出 $A^{-1}B$ 和 CA^{-1}。

例 1：

求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

解：利用 $(A \mid E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E \mid A^{-1})$

$$
(A\mid E)=\begin{pmatrix}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\2&2&3&1&0&0\\-1&2&1&0&0&1\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3+r_1]{}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&4&3&1&-2&0\\0&1&1&0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\\0&4&3&1&-2&0\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_3-4r_2]{}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&-1&1&-6&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&1&0&2&1\\0&1&1&0&1&1\\0&0&1&-1&6&4\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[r_1-r_3]{}\xrightarrow{r_2-r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{pmatrix}=\left(E\mid A^{-1}\right)
$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}$。

例 2 求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

解利用 $\begin{pmatrix}A\\E\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{初等列变换}}\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}$

$$
\left(\begin{array}{ccc}1&1&-1\\2&1&0\\1&-1&0\\\hline 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+r_1}\left(\begin{array}{ccc}1&1&0\\2&1&2\\1&-1&1\\\hline 1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-1&2\\1&-2&1\\\hline 1&-1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&2\\0&-2&1\\\hline 0&-1&1\\0&1&0\\-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_3+2r_2}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&-2&-3\\\hline 0&-1&-1\\0&1&2\\-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+\left(-\frac{2}{3}\right)r_3}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-3\\\hline 0&-\frac{1}{3}&-1\\0&-\frac{1}{3}&2\\-1&-\frac{2}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2\times(-1)}\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E\\A^{-1}\end{pmatrix}
$$

故 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$。

3. 利用伴随矩阵求矩阵的逆[2]

伴随矩阵法：$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$

对于阶数比较低($n\le 3$)的矩阵或元素的代数余子式易于计算的矩阵可用此方法求逆矩阵。特别的对于 2 阶方阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为 $A^{*}=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$，即可以概括为主对角元素互换，次对角元素变号。

例 3 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

解：$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}=1$

各个元素的代数余子式分别为：$A_{11}=-2$，$A_{12}=0$，$A_{13}=1$，$A_{21}=0$，$A_{22}=-3$，$A_{23}=2$，$A_{31}=1$，$A_{32}=4$，$A_{33}=-3$，故有伴随矩阵 $A^{*}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$，有公式 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$，故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}。$$

4. 利用哈密顿－凯莱定理求逆矩阵[3]

定理：设 A 是数域 P 上的 n 阶方阵，则 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 是 A 的特征多项式，$f(A)=A^{n}-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})A^{n-1}+\cdots+(-1)^{n}AE=0$，

记 $f(A)=A^{n}+a_{1}A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_{n}E=0$

可以得到 $A^{-1}=\frac{1}{a_{n}}\left(A^{n-1}+a_{1}A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}E\right)$

注：此种方法适用于阶数不多的矩阵求逆。

例 4 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1}

解：A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda^{3}-3\lambda^{2}+2\lambda-2$，由哈密顿－凯莱定理有 $f(A)=A^{3}-3A^{2}+2A-2E=0$，所以得到

$$A^{-1}=\frac{A^{2}-3A+2E}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 利用分块矩阵求矩阵的逆

分块矩阵多适用于高阶矩阵求逆。

对于分块的对角矩阵或次对角交矩阵可以有公式一、公式二成立[4]；

公式一 $\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_n & & \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} & & A_n^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}$，其中每个 $A_i\left(i=1,2,\cdots\right)$ 均为可逆矩阵。

例 5 已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}

将 A 分块如下 $=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$，其中，$A_1=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，对于二阶矩阵可求得，$A_1^{-1}=\frac{1}{|A_1|}A_1^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\frac{1}{|A_2|}A_2^*=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，所以有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

可见对于矩阵分块可以简化高阶矩阵求逆，将其转化为容易求逆的低阶矩阵，进而在求逆。

设矩阵 $X=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$，其中 $ABCD$ 均为方阵。

方法一[1]：

则可以利用初等变换

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & B & E & \\ C & D & & E \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+BD^{-1}r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} A-BD^{-1}C & 0 & E & E-BD^{-1} \\ C & D & & E \end{array}\right) \xrightarrow{r_2+C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}Er_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A-BD^{-1}C & 0 & E & -BD^{-1} \\ 0 & D & -C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}E & E+C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1\times\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}} \xrightarrow{r_2\times D^{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}E & -\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \\ 0 & E & -D^{-1}C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}E & D^{-1}+D^{-1}C\left(A-BD^{-1}C\right)^{-1}BD^{-1} \end{array}\right)$$

方法二：利用 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 进行初等行变换或者初等列变换：

1. 进行行初等变换得到 $P_1P_2\cdots P_n\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$，$\left(P_1P_2\cdots P_n\right)$ 为初等矩阵

[1] 李扬高等代数强化讲义[Z]. 2021。

2. 进行列初等变换得到$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_n = \begin{pmatrix} E & \\ & E \end{pmatrix}$，$(Q_1Q_2\cdots Q_n)$为初等矩阵

有$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = P_1P_2\cdots P_n = Q_1Q_2\cdots Q_n$

3. 或者同时进行行列的初等变换

$P_1P_2\cdots P_s\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} Q_1Q_2\cdots Q_t = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}$，其中每个$A_i\,(i=1,2,\cdots)$均为可逆的对角矩阵，

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = P_s^{-1}\cdots P_2^{-1}P_1^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix} Q_1^{-1}Q_2^{-1}\cdots Q_t^{-1}$，

则$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = Q_1Q_2\cdots Q_t\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix}^{-1} P_1P_2\cdots P_s$

利用上面的分块矩阵的初等变换的步骤很容易算出，$\begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix},\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix},\begin{pmatrix} O & B \\ C & D \end{pmatrix},\begin{pmatrix} A & B \\ C & O \end{pmatrix}$，这四类分块矩阵的逆矩阵了。

例 6 已知$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$

将$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix}$，其中$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，则有$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}B$。

利用方法一：

$$\left(\begin{array}{cc|cc} B & B & E & \\ B & -B & & E \end{array}\right) \xrightarrow{r_1+r_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 2B & 0 & E & E \\ B & -B & & E \end{array}\right) \xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}B^{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ B & -B & & E \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times B^{-1}} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ E & -E & & B^{-1} \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-r_1} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ 0 & -E & -\frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc} E & 0 & \frac{1}{2}B^{-1} & \frac{1}{2}B^{-1} \\ 0 & E & \frac{1}{2}B^{-1} & -\frac{1}{2}B^{-1} \end{array}\right) = \left(E \mid A^{-1}\right) \to A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A$$

利用方法二：

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \frac{1}{2}E \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

故 $\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \frac{1}{2}E \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -E & E \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix} = \frac{1}{4}A$。

6. 利用初等循环矩阵进行求逆

A 为 $n\times n$ 阶循环矩阵，如果存在多项式，$f(x)=\sum_{i=1}^{i=n} a_i x^i$ 满足 $f(P)=\sum_{i=1}^{i=n} a_i P^i$，称多项式 $f(x)$ 为 A 的关联多项式，这里的系数 $a_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 正好是第一行元素。

初等循环矩阵定义：A 的行和为 $s=\sum_{i=1}^{i=n} a_i$，则

(i) $AE_n = sE_n$

(ii) 当 A 可逆，且 $s\neq 0$，则有 $A^{-1}E_n=\frac{1}{s}E_n$。

证明：$AE_n=\left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i P^i\right)E_n=\sum_{i=1}^{i=n}\left(a_i P^i E_n\right)=sE_n$，两边取逆 $E_n^{-1}A^{-1}=\frac{1}{s}E_n^{-1}$。

定理[5]：设 A 为 $n\times n$ 阶循环矩阵且可逆，则可以证明下列结论成立

(i) $\left(A+cE_n\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{c}{s(s+cn)}E_n$

(ii) 证明：$\left(A+cE_n\right)^{-1}\left(A+cE_n\right)=I$，所以有 $\left(A+cE_n\right)^{-1}A=I-c\left(A+cE_n\right)^{-1}$，$A$ 的逆右乘两端得：$\left(A+cE_n\right)^{-1}=A^{-1}-\frac{c}{s}c\left(A+cE_n\right)^{-1}E_n$，化简移项得：$\left(A+cE_n\right)^{-1}\left(AE_n+cE_n^2\right)E_n=E_n$，所以有 $\left(A+cE_n\right)^{-1}E_n=A^{-1}-\frac{c}{s(s+cn)}E_n$ 成立。

结论：通过(i)我们知道，如果可用 $A+cE_n$ 来表示一个初等循环矩阵 B，其中 A 是一个初等循环矩阵并且 A 的逆矩阵易求。

例 7 设 $B=\begin{pmatrix} 7 & 11 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 11 \\ 11 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$，求 B^{-1}。

解：$B=4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}+7\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，设 $A=4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$s=4$，$c=7$，$n=4$

则有 $B^{-1}=A^{-1}-\frac{c}{s(s+cn)}E_4=\frac{1}{128}\begin{pmatrix} -7 & -7 & 25 & -7 \\ 25 & -7 & -7 & -7 \\ -7 & -7 & -7 & 25 \\ -7 & 25 & -7 & -7 \end{pmatrix}$。

推论：通过构造初等循环矩阵，利用一个公式就能轻松地求出一个较为复杂的矩阵的逆。同时我们还可以与上面的分块矩阵求逆相结合，把一个求高阶的循环矩阵变成求低阶的循环矩阵。

7. 总结

本篇文章利用矩阵的初等变换，分块矩阵的初等变换以及哈密顿－凯莱定理对矩阵求逆的方法，进行了总结分析。以上求逆矩阵的方法只是一些初步认识，通过归纳总结可以看出，在求逆矩阵的过程中，必须熟练掌握运用相关的可逆矩阵定理和性质，同时运用恰当的技巧可使计算更加简便。但是文章最后

我们用了初等循环矩阵求逆，这是针对一类特殊类型的矩阵求逆，所以我们能看到矩阵求逆的方法多种多样，对于其他类型的矩阵求逆，则需要继续深入研究。

参考文献

[1] 徐仲. 高等代数考研教案[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 2006.
[2] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M]. 第5版. 北京: 高等教育出版社, 2019.
[3] 张家宝. 浅谈求逆矩阵的几种方法[J]. 数学学习与研究, 2020(10): 4-5.
[4] 钱吉林. 高等代数题解精粹[M]. 修订版. 北京: 中央民族大学出版社, 2005.
[5] 朱亚培, 薛娇. 关于循环矩阵求逆方法的研究[J]. 现代经济信息, 2017(12): 388+391.