Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2021, 10(10), 3592-3600
Published Online October 2021 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2021.1010379

双圈图中Hitting Time的极值问题

史玉妙[1]，桂雪瑶[1]，王华平[2]

[1]浙江师范大学数学与计算机科学学院，浙江 金华
[2]江西师范大学数学与统计学院，江西 南昌

收稿日期：2021年9月25日；录用日期：2021年10月20日；发布日期：2021年10月27日

摘 要

设 $H_G(x,y)$ 是图G上的随机游走中，从顶点x到顶点y的步数的期望值。本文主要研究一类双圈图G中$\varphi(G)$的极值问题，其中$\varphi(G)=\max\{H_G(x,y):x,y\in V(G)\}$。利用有效电阻，刻画出了在这类双圈图中，$\varphi(G)$达到极值时，相应的极图以及两点在图中的位置。

关键词

Hitting Time，有效电阻，双圈图

Extremal Problems on the Hitting Time of Bicyclic Graphs

Yumiao Shi[1], Xueyao Gui[1], Huaping Wang[2]

[1]College of Mathematics and Computer Science, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang
[2]School of Mathematics and Statistics, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi

Received: Sep. 25th, 2021; accepted: Oct. 20th, 2021; published: Oct. 27th, 2021

Abstract

Let $H_G(x,y)$ be the expected steps from vertex x to vertex y on random walk on graph G. In this paper, we will consider the extremal values of $\varphi(G)$ in bicyclic graphs G, where $\varphi(G)=\max\{H_G(x,y):x,y\in V(G)\}$. By using effective resistance, we characterize the corresponding extremal graph and the position of two vertices in the graph when $\varphi(G)$ reaches the extremum.

文章引用: 史玉妙, 桂雪瑶, 王华平. 双圈图中 Hitting Time 的极值问题[J]. 应用数学进展, 2021, 10(10): 3592-3600.
DOI: 10.12677/aam.2021.1010379

Keywords

Hitting Time, Effective Resistance, Bicyclic Graph

1. 引言

本文只考虑简单连通图$G=(V(G),E(G))$，其中$V(G)$是 G 的顶点集，$E(G)$是 G 的边集。对两个点$x,y\in V(G)$，x 和 y 之间的距离用$d_G(u,v)$表示。对于任意点$x\in V(G)$，与 x 相关联的边的数目叫做 x 在 G 的度，记作$d_G(x)$。

在[1]中，Klein 和 Randić 提出了一个图上的新的距离函数——有效电阻。把图 G 中的每条边看作电阻值为 1 的电阻，点 x 和 y 之间的电阻值，叫做点 x 和 y 之间的有效电阻，记为$r(x,y)$。显然，当图 G 是树时，$r(x,y)=d(x,y)$。我们把$R^w(x)=\sum_{y\in V(G)}d(y)r(x,y)$叫做点 x 的 weighted resistance centrality [2]。

给定一个图 G，通常将 G 上的随机游走定义为马尔可夫链。图 G 上的随机游走中，顶点 x 跳到邻点的概率为$1/d(x)$，那么 G 中从顶点 x 到顶点 y 的 hitting time [3] $H_G(x,y)$是随机游走中步数的期望值。图 G 的 hitting time 定义为

$$\varphi(G)=\max\{H_G(x,y):x,y\in V(G)\}。$$

Zhang 和 Li [4]得到了树中$\varphi(G)$的上界和下界，并且表明星图达到下界以及路径达到上界。此外，Zhu 和 Zhang [5] [6]得到了单圈图中$\varphi(G)$的上界和下界，并且确定了极图。本文将继续研究有关问题。我们将刻画双圈图中$\varphi(G)$的上界和下界所对应的极值图。

2. 预备知识

双圈图 G 是满足$|E(G)|=|V(G)|+1$的简单连通图。本文只考虑基本型为∞-型$B(p,l,q)$的双圈图。设$B(p,l,q)$是一个双圈图，其两个圆C_p和C_q之间有一条长为l的路径。当$l\ge 2$时，路径P_l和圆C_p和C_q的交点分别为 u 和 v。当 $l=1$ 时，我们仍然使用 $u=v$ 来表示圆C_p和C_q的交点。

图簇$\mathcal{B}_n(p,l,q)$被定义为阶数为 n 的图的集合，这些图是由在$B(p,l,q)$顶点处悬挂树得到的。在本文中，我们使用$\{v_1,v_2,\cdots,v_{p+q+l-2}\}$来表示$B(p,l,q)$的顶点，每个挂在顶点$v_i$的树用$T_i$表示，其点的个数用$n_i$表示，图 G 可用$B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})$表示，其中$n_1+\cdots+n_{p+q+l-2}=n$。请注意，我们将使用$T_u(T_v)$表示悬挂在$u(v)$点的树。

我们现在列出以下重要引理。

引理 2.1. [2]设 T 是 n 个点的树，对任意的两个点$x,y\in V(T)$，有$1\le H_T(x,y)\le(n-1)^2$。

引理 2.2. [7]设 G 是边数为 m 的简单连通图。那么，对于$x,y\in V(G)$，有

$$H(x,y)=mr(x,y)+\frac{1}{2}R^w(y)-R^w(x)。$$

引理 2.3. [8]设 G 是一个 n 个点的简单连通图，点$x,y\in V(G)$。如果存在唯一的一条路径$P=v_0v_1\cdots v_k$，其中$v_0=x$和$v_k=y$，且对于$i=0,\cdots,k$，m_i是$G-\{v_{i-1}v_i,v_{i+1}\}$包含v_i的部分的边数，

$v_{-1}v_0=\varnothing$ 和 $v_kv_{k+1}=\varnothing$，那么有 $H(x,y)=k^2+2\sum_{i=0}^{k-1}m_i(k-i)$。

引理 2.4. [1]设 z 是连通图 G 的割点，x，y 是 G-z 的不同部分中的两个顶点。那么有 $H(x,y)=H(x,z)+H(z,y)$。而且，如果 G 中存在一条唯一的路径 $P=xv_1\cdots v_{k-1}$，那么有 $H(x,y)=H(x,v_1)+H(v_1,v_2)+\cdots+H(v_{k-1},y)$。

引理 2.5. [5]设 G 是圈长为 g 且点数为 n 的单圈图，那么 $\varphi(G)\le\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left(q-\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\right)+n^2-q^2$。

引理 2.6. [9] 设 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$ 和 $x\in V(T_k)$。那么 $R^w(x)=2R(x)+2d(x,v_k)+r(x,u)+r(x,v)-(n-p-q-l+2)$。

令 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$，对任意的 $x\in V(T_i)$，$y\in V(T_j)$，由引理 2.2 和 2.6，显然有

$$\begin{aligned}H(x,y)=&(n+1)r(x,y)+R(y)-R(x)+d(y,v_j)-d(x,v_i)\\&+\frac{1}{2}\big(r(y,u)+r(y,v)-(r(x,u)+r(x,v))\big).\end{aligned}\tag{1}$$

3. $\varphi(G)$的最大值

引理 3.1. 令 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$。如果 $V(G)$ 中存在两个顶点 x，y，使得 $\varphi(G)=H(x,y)$，则 x 和 y 要么是 $V(G)$ 中的悬挂点，要么是 $V(B(p,q,l))$ 中度为 2 的点。

证明： 假设 $V(G)$ 中的点 y 既不是 $V(G)$ 中的悬挂点，也不是 $V(B(p,q,l))$ 中度为 2 的点，那么它一定是一个割点。由引理 2.4，则存在点 $z\sim y$ 使得 $H(x,z)=H(x,y)+H(y,z)>H(x,y)$。因此，$H(x,y)$ 不是最大的，这与条件相矛盾。因此，y 要么是 $V(G)$ 中的悬挂点，要么是 $V(B(p,q,l))$ 中度为 2 的点。类似地，我们可以证明 x 要么是 $V(G)$ 中的悬挂点，要么是 $V(B(p,q,l))$ 中度为 2 的点。

引理 3.2. 设 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$ 和 $G'=B(T_1',T_2',\cdots,T_{p+q+l-2}')\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$，如果 $T_i=T_i'$ 和 $T_j=T_j'$，其中 $i\ne j$，$x\in V(T_i)$，$y\in V(T_j)$，且 $|T_r|=|T_r'|$，$r=1,2,\cdots,p+q+l-2$，那么 $H(x,y)=H_{G'}(x,y)$。

证明： 在不失一般性的前提下，假设 $2<i<j<p+q+l-2$。由引理 2.4，我们有 $H(x,y)=H(x,v_i)+H(v_i,v_j)+H_{G'}(x,v_i)$ 和 $H_{G'}(x,y)=H_{G'}(x,v_i)+H_{G'}(v_i,v_j)+H_{G'}(v_j,y)$。显然，由引理 2.3，有 $H(x,v_i)=H_{G'}(x,v_i)$ 和 $H_{G'}(x,v_i)=H_{G'}(v_j,y)$。那么由式子(1)，我们有 $H(v_i,v_j)-H_{G'}(v_i,v_j)=R(v_j)-R_{G'}(v_j)+R_{G'}(v_i)-R(v_i)=0$。

这就得出了我们要的结论。

引理 3.3. 设 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$。如果 $V(T_p)$ 中存在一个悬挂点 w，其中 G' 是从 G 中删除 w 的关联边并添加一条连接点 w 和 T_i 中的一个顶点的边而得到的图，那么对于任意的两个点 $x\in V(T_i)$ 和 $y\in V(T_j)$ 且 $i,j\ne p$，有 $H_{G'}(x,y)\ge H(x,y)$。

证明： 假设在 G' 中 $w\sim z_1$。由式子(1)，我们有

$$\begin{aligned}H(x,y)-H_{G'}(x,y)&=R(y)-R(x)-(R_{G'}(y)-R_{G'}(x))\\&=r(v_j,v_p)-r(v_j,v_i)-r(v_i,v_p)+r(x,z_1)-r(x,v_i)-r(v_i,z_1)\le 0\end{aligned}$$

这就得出了我们要的结论。

引理 3.4. 设 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$，存在两个点 $x\in V(T_i)$ 和 $y\in V(T_j)$，$i\ne j$，且有 $\varphi(G)=H(x,y)$。设 $G_1=B(T_1^1,T_2^1,\cdots,T_{p+q+l-2}^1)\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$，且 $T_i^1=P_i$，$|V(T_i)|=|V(P_i)|$，对于 $r\ne i$，有 $T_r^1=T_r$。设 $G_1'=B(T_1',T_2',\cdots,T_{p+q+l-2}')\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$，且 $T_j'=P_j$，$|V(T_j)|=|V(P_j)|$，对于 $r\ne j$，有 $T_r'=T_r$。假设点 x 和 y 分别在 P_i 和 P_j 上，那么它们要不是悬挂点，要不 $V(B_{p,q,l})$ 中度为 2 的点，且有

$H_{G_1}(x,y)\ge H(x,y)$ 和 $H_{G_1'}(x,y)\ge H(x,y)$。

证明： 由引理 3.1，我们知道 x 和 y 要不是 $V(G)$ 中的悬挂点，要不是 $V(B_{p,q,l})$ 中度为 2 的点。我们考虑下面这三种情况。

情况 1. x 和 y 都是 $V(B_{p,q,l})$ 中度为 2 的点。

由引理 3.2，我们有 $H_{G_1}(x,y)=H(x,y)$ 和 $H_{G_1'}(x,y)=H(x,y)$。

情况 2. 假设 $|V(T_i)|\ge 2$， $x\in V(T_i)$ 是一个悬挂点和 $y\in V(T_j)$。

此外，我们有 $x\in V(P_i)$ 是 $V(G_1)$ 中的一个悬挂点。由引理 2.4，我们有 $H(x,y)=H(x,v_i)+H(v_i,v_j)+H(v_j,y)$ 和 $H_{G_1}(x,y)=H_{G_1}(x,v_i)+H_{G_1}(v_i,v_j)+H_{G_1}(v_j,y)$。根据 hitting time 的定义和引理 2.1，我们有 $H(x,v_i)=H_{T_1}(x,v_i)\le(n_i-1)^2=H_{G_1}(x,v_i)$。此外，由引理 3.2，我们有 $H(v_i,v_j)=H_{G_1}(v_i,v_j)$。此外，由定理 2.3，很容易看出， $H(v_j,y)=H_{G_1}(v_j,y)$。因此，$H_{G_1}(x,y)\ge H(x,y)$。

情况 3. 假设 $|V(T_j)|\ge 2$， $y\in V(T_j)$ 是一个悬挂点和 $x\in V(T_i)$。

此外，我们有 $y\in V(P_j)$ 是 $V(G_1')$ 中的一个悬挂点。由引理 2.4，我们有 $H_{G_1'}(x,y)=H_{G_1'}(x,v_i)+H_{G_1'}(v_i,v_j)+H_{G_1'}(v_j,y)$。显然， $H_{G_1'}(x,v_i)=H_{T_1}(x,v_i)=H(x,v_i)$ 和 $H_{G_1'}(v_i,v_j)=H(v_i,v_j)$。因此，我们只需要比较 $H_{G_1'}(v_j,y)$ 和 $H(v_j,y)$。设 P 是从点 v_j 到点 y 的唯一路径，且 $P=v_0v_1\cdots v_k$， $v_0=v_j$ 和 $v_k=y$。对于 $i=0,\cdots,k$， 设 G_i^* 是 G 中删除 $v_{i-1}v_i$ 和 v_iv_{i+1} 且包含点 v_i 的子图，其中 $v_{-1}v_0=\varnothing$ 和 $v_kv_{k+1}=\varnothing$。设 m_i^* 是 G_i^* 的边数，那么 $m_0^*+m_1^*+\cdots+m_{k-1}^*+k-1=n$。由引理 2.3，我们有 $H(v_j,y)=k^2+2\sum_{i=0}^{k-1}m_i^*(k-i)$ 和 $H_{G_1'}(v_j,y)=(n_j-1)^2+2(n-n_j+2)(n_j-1)=-(n_j-1)^2+2(n+1)(n_j-1)$。因此，

$$
\begin{aligned}
&H_{G_1'}(v_j,y)-H(v_j,y)\\
&=-(n_j-1)^2+2(n+1)(n_j-1)-\left(k^2+2\sum_{i=0}^{k-1}m_i^*(k-i)\right)\\
&=(n_j-k-1)(2n-k-n_j+3)+2\sum_{i=0}^{k-1}m_i^*i\ge 0,
\end{aligned}
$$

其中 $1\le k\le n_j-1$。如果 $|V(T_i)|=1$，那么 x 是 $V(B(p,q,l))$ 中度为 2 的一个点。因此 $H_{G_1'}(x,y)\ge H(x,y)$。

设 $G=B(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2})\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$，那么对于 $i\ne j$， G 中存在两个顶点 $x\in V(T_i)$ 和 $y\in V(T_j)$，使得 $\varphi(G)=H(x,y)$。

设 $G_2=B(T_1^2,T_2^2,\cdots,T_{p+q+l-2}^2)\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$ 中有 $T_i^2=P_i$ 和 $T_j^2=P_j$， 且有 $|V(P_i)|=|V(T_i)|$ 和 $|V(P_j)|=|V(T_j)|$，对于 $r\ne i,j$， 有 $T_r^2=T_r$。

设 $G_3=B(T_1^3,T_2^3,\cdots,T_{p+q+l-2}^3)\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$ 中有 $T_i^3=P_i$， 且对于 $i=1,\cdots,p+q+l-2$，有 $|V(P_i)|=|V(T_i)|$。

设 $G_4=B(T_1^4,T_2^4,\cdots,T_{p+q+l-2}^4)\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$ 中有 $T_i^4=P_i$， $T_j^4=P_j$， 且对于 $r\ne i,j$， 有 $|V(T_r^4)|=1$。

设 $G_5=B(T_1^5,T_2^5,\cdots,T_{p+q+l-2}^5)\in\mathcal{B}_n(p,l,q)$ 中有一棵唯一的树， $T_i^5=P_i$ 或者 $T_j^5=P_j$， 并且对于 $r\ne i$ 或者 $r\ne j$， 有 $|V(T_r^5)|=1$。

推论 3.5. $H(x,y)\le\varphi(G)\le H_{G_2}(x,y)=H_{G_3}(x,y)\le\varphi(G_3)\le H_{G_4}(x,y)\le\varphi(G_4)$。

证明： 由引理 3.3，3.4，结论显然成立。

引理 3.6. 设 x 和 y 是 G_4 中的两个顶点，且有 $H_{G_4}(x,y)=\varphi(G_4)$， $x\in V(T_k)$， $y\in V(T_z)$。那么 $\varphi(G_4)\le H_{G_5}(x,y)$。

证明： 由引理 3.1，x 和 y 要么是悬挂点要么是圈上度为 2 的点。我们考虑以下四种情况。

情况 1. x 和 y 都是 G_4 的圈上度为 2 的点。由式子(1)，我们有

$$\begin{aligned}H_{G_4}(x,y)&=R_{B(p,q,l)}(y)-R_{B(p,q,l)}(x)+(n+1)r_{G_4}(x,y)\\&+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(y,u)+r_{G_4}(y,v)-r_{G_4}(x,u)-r_{G_4}(x,v)\right)\\&+(n_i-1)\left(r_{G_4}(y,v_i)-r_{G_4}(x,v_i)\right)+(n_j-1)\left(r_{G_4}(y,v_j)-r_{G_4}(x,v_j)\right).\end{aligned}$$

当 x 和 y 都固定时，

$$R_{B(p,q,l)}(y)-R_{B(p,q,l)}(x)+(n+1)r_{G_4}(x,y)+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(y,u)+r_{G_4}(y,v)-r_{G_4}(x,u)-r_{G_4}(x,v)\right)$$

也是个定值。因为

$$\begin{aligned}&(n_i+n_j-2)\max\left\{r_{G_4}(y,v_i)-r_{G_4}(x,v_i),r_{G_4}(y,v_j)-r_{G_4}(x,v_j)\right\}\\&\geq(n_i-1)\left(r_{G_4}(y,v_i)-r_{G_4}(x,v_i)\right)+(n_j-1)\left(r_{G_4}(y,v_j)-r_{G_4}(x,v_j)\right),\end{aligned}$$

所以我们有 $\varphi(G_4)\leq H_{G_5}(x,y)$。

情况 2. x 是 G_4 的悬挂点，记作 $x\in V(P_i^4)$，也就是 $i = k$，和 y 是 G_4 的圈上度为 2 的点。由式子(1)，我们有

$$\begin{aligned}H_{G_4}(x,y)&=(n+1)r_{G_4}(v_k,y)+R_{B(p,q,l)}(y)-R_{B(p,q,l)}(v_k)\\&+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(y,u)+r_{G_4}(y,v)-r_{G_4}(v_k,u)-r_{G_4}(v_k,v)\right)\\&+(n_k-1)\left(r_{G_4}(v_k,y)+n_k-1\right)+(n_j-1)\left(r_{G_4}(v_j,y)-r_{G_4}(v_k,v_j)\right).\end{aligned}$$

当 x 和 y 都固定时，

$$(n+1)r_{G_4}(v_k,y)+R_{B(p,q,l)}(y)-R_{B(p,q,l)}(v_k)+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(y,u)+r_{G_4}(y,v)-r_{G_4}(v_k,u)-r_{G_4}(v_k,v)\right)$$

也是个定值。但是

$$(n_i+n_j-2)\left(r_{G_4}(v_i,y)+n_i+n_j-2\right)>(n_i-1)\left(r_{G_4}(y,v_i)-r_{G_4}(x,v_i)\right)+(n_j-1)\left(r_{G_4}(y,v_j)-r_{G_4}(x,v_j)\right),$$

这与 G 的选择所矛盾，所以 $\varphi(G_4)\leq H_{G_5}(x,y)$。

情况 3. y 是 G_4 中的一个悬挂点，记作 $y\in V(P_j^4)$，也就是 $j = z$，和 x 是 G_4 的圈上度为 2 的点。由式子(1)，我们有

$$\begin{aligned}H_{G_4}(x,y)&=(n+1)r_{G_4}(v_k,v_j)+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(v_j,u)+r_{G_4}(v_j,v)-r_{G_4}(x,u)-r_{G_4}(x,v)\right)\\&+R_{B(p,q,l)}(v_j)-R_{B(p,q,l)}(x)+(n_i-1)\left(r_{G_4}(v_i,v_j)-r_{G_4}(v_k,v_i)\right)\\&+(n_j-1)\left(2n-n_j+3-r_{G_4}(v_k,v_j)\right).\end{aligned}$$

当 x 和 y 都固定时，

$$(n+1)r_{G_4}(v_k,v_j)+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(v_j,u)+r_{G_4}(v_j,v)-r_{G_4}(x,u)-r_{G_4}(x,v)\right)+R_{B(p,q,l)}(v_j)-R_{B(p,q,l)}(x)$$

也是个定值。但是

$$\begin{aligned}&(n_i+n_j-2)\left(2n-n_i-n_j+4-r_{G_4}(v_k,v_j)\right)\\&>(n_j-1)\left(2n-n_j+3-r_{G_4}(v_k,v_j)\right)+(n_i-1)\left(r_{G_4}(v_i,v_j)-r_{G_4}(v_k,v_i)\right),\end{aligned}$$

这与 G 的选择所矛盾，所以 $\varphi(G_4)\le H_{G_5}(x,y)$。

情况 4. $x\in V(P_i^4)$ 和 $y\in V(P_j^4)$ 都是 G_4 的悬挂点，也就是 $i=k$，$j=z$。由式子(1)，有

$$\begin{aligned}H_{G_4}(x,y)=&(n+1)\left(n_i+n_j+r_{G_4}(v_i,v_j)-2\right)+R_{B(p,q,l)}(v_j)-R_{B(p,q,l)}(v_i)\\&+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(v_j,u)+r_{G_4}(v_j,v)-\left(r_{G_4}(v_i,u)+r_{G_4}(v_i,v)\right)\right)\\&+(n_j-n_i)\left(n-n_i-n_j+3-r_{G_4}(v_i,v_j)\right).\end{aligned}$$

当 x 和 y 都固定时，

$$\begin{aligned}&(n+1)\left(n_i+n_j+r_{G_4}(v_i,v_j)-2\right)+R_{B(p,q,l)}(v_j)-R_{B(p,q,l)}(v_i)\\&+\frac{1}{2}\left(r_{G_4}(v_j,u)+r_{G_4}(v_j,v)-\left(r_{G_4}(v_i,u)+r_{G_4}(v_i,v)\right)\right)\end{aligned}$$

也是个定值。但是 $(n_i+n_j-2)\left(n-n_i-n_j+3-r_{G_4}(v_i,v_j)\right)>(n_j-n_i)\left(n-n_i-n_j+3-r_{G_4}(v_i,v_j)\right)$，这与 G 的选择所矛盾，所以 $\varphi(G_4)\le H_{G_5}(x,y)$。所以结论成立。

又一次令 $B_{n,v_k}(p,l,q)$ 是通过在 $B(p,l,q)$ 的 v_k 处连接 $P_{n-p-q-l+3}$ 的一个端点的图。设 $M=n^2-(p+q+l-2)^2$ 和

$$k_1=\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left(q-\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\right)+(q+l-1)^2-q^2+\frac{(2q+2l+p-2)\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil}{p},$$

$$k_2=\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left(p-\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right)+(p+l-1)^2-p^2+\frac{(2p+2l+q-2)\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil}{p},$$

$$k_3=(q+l-1)\left(\frac{3\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil-p\right)-1}{p}\right)+\frac{(q+l+p-1)\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil}{p},$$

$$k_4=(p+l-1)\left(\frac{3\left(\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil-q\right)-1}{p}\right)+\frac{(q+l+p-1)\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil}{p}.$$

定理 3.7. $\varphi\left(B_{n,v_k}(p,l,q)\right)\le\max\{k_1+M,k_2+M,k_3+M,k_4+M\}$。

证明： 设 x 和 y 是 $B_{n,v_k}(p,l,q)$ 中的两个点并且 $x\in V(T_i)$， $y\in V(T_j)$，那么 $\varphi\left(B_{n,v_k}(p,l,q)\right)=H_{B_{n,v_k}(p,l,q)}(x,y)$。由引理 3.1，点 x 和 y 要么是悬挂点，要么是圈上度为 2 的点。由推论 3.5，我们知道 x 或者 y 是悬挂点。如果 x 是一个悬挂点并且 $y=v_j$ 是 $B_{n,v_i}(p,l,q)$ 中的圈上度为 2 的点，那么假设 $y_1\in V(T_j)$ 是一个悬挂点且 $x_1=v_i$ 是 $B_{n,v_j}(p,l,q)$ 中的圈上度为 2 的点，就有

$$\begin{aligned}&H_{B_{n,v_i}(p,l,q)}(x,y)-H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)(x_1,y_1)\\&=R_{B(p,q,l)}(v_j)+(n_i-1)\left(r_{B(p,q,l)}(v_i,v_j)+1\right)+\sum_{i=1}^{n_i-2}i-\left(\sum_{i=1}^{n_i-2}i+(n_i-1)(n-n_i+1)+R_{B(p,q,l)}(v_j)\right)\\&\quad-\left(\sum_{i=1}^{n_i-2}i+(n_i-1)(n-n_i+1)+R_{B(p,q,l)}(v_i)-R_{B(p,q,l)}(v_i)-(n_i-1)\left(r_{B(p,q,l)}(v_i,v_j)+1\right)-\sum_{i=1}^{n_i-2}i\right)-4(n_i-1)\\&=2(n_i-1)\left(r_{B(p,q,l)}(v_i,v_j)+n_i-n\right)-4(n_i-1)<0\end{aligned}$$

所以，y 是一个悬挂点且 $x=v_i$ 是 $B_{n,v_j}(p,l,q)$ 中的圈上度为 2 的点，那么 $\varphi\left(B_{n,v_j}(p,l,q)\right)=H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)$。假设 $x\in V(C_p)$ 和 $v_j\in V(P_l)$，$d(u,v_j)=l_1$，$0\le l_1\le l-1$，那么有

$$H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)=l_1^2+(n+2+p-q-l)l_1+\frac{l^2-3l+2}{2}+(n+1)r_{B(p,q,l)}(x,u)$$
$$+(n_j-1)\left(n-\frac{n_j}{2}+3\right)+\frac{p^2-1}{6}+\frac{q^2-1}{6}+(q+1)(l-1).$$

设 $f(l_1)=l_1^2+(n+2+p-q-l)l_1$。由二次函数的性质，我们知道 $f(l_1)$ 取到它的最大值当且仅当 $l_1=0$ 或者 $l_1=l-1$，这如同 $H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)$。所以 v_j 是 $B_{n,v_j}(p,l,q)$ 中的圈上度为 2 的点，且 $\varphi\left(B_{n,v_j}(p,l,q)\right)=H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)$。对点 v_j 和 x 的具体位置，我们分以下几种情况讨论。

情况 1. $V_j\in V(C_p)$ 和 $x\in V(C_q)$。

由引理 2.5，有 $H_{U_{q+l-1,q}}(x,u)\le\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left(q-\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\right)+(q+l-1)^2-q^2$。所以我们有

$$H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)=\left\{H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,u)+H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(u,v_j)+H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(p,l,q)\right\}(v_j,y)$$
$$=\left\{H_{U_{q+l-1,q}}(x,u)+H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(u,v_j)+H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(p,l,q)\right\}(v_j,y)$$
$$\le\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left(q-\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\right)+(q+l-1)^2-q^2+(n+q+l-n_j+1)r_{B(p,q,l)}(v_j,u)+(n_j-1)^2+2(n-n_j+1)(n_j-1)$$
$$\le\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left(q-\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\right)+(q+l-1)^2-q^2+\frac{(2q+2l+p-2)\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil}{p}+M.$$

情况 2. $v_j\in V(C_q)$ 和 $x\in V(C_p)$。同情况 1 讨论类似，我们有

$$H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)\le\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left(p-\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\right)+(p+l-1)^2-p^2+\frac{(2p+2l+q-2)\left\lfloor\frac{q}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{q}{2}\right\rceil}{p}+M.$$

情况 3. v_j 和 x 都在 C_p 上。那么

$$H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,y)=H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(x,v_j)+H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}(v_j,y)$$
$$=(n-n_j+2)r_{B(p,q,l)(x,v_j)}+(q+l-1)\left(r_{B(p,q,l)}(u,v_j)-r_{B(p,q,l)}(x,u)\right)+(n_j-1)^2+2(n-n_j+1)(n_j-1)$$
$$\le\frac{(p+q+l-1)\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil}{p}+(q+l-1)\left(r_{B(p,q,l)}(u,v_j)-r_{B(p,q,l)}(x,u)\right)+M.$$

如果路径 x-u-v_j 的长度是 $\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor$ 和路径 u-x-v_j 的长度是 $p-p_1+2$，其中 $2\le p_1\le\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor-1$，那么

$$r_{B(p,q,l)}(u,v_j)-r_{B(p,q,l)}(x,u)=\frac{(p_1-1)(p-p_1+1)-\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor-p_1\right)\left(\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil+p_1-2\right)}{p}$$
$$\le\frac{\left(p-\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor+\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil\right)\left(\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor-1\right)-\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor\left(2-\left\lceil\frac{p}{2}\right\rceil\right)-p-1}{p}.$$

如果路径 $x\text{-}u\text{-}v_j$ 的长度是 $\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$ 和路径 $u\text{-}x\text{-}v_j$ 的长度是 $p-p_1+2$，其中 $2 \le p_1 \le \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil -1$，那么

$$r_{B(p,q,l)}\left(u,v_j\right)-r_{B(p,q,l)}\left(x,u\right)=\frac{\left(p_1-1\right)\left(p-p_1+1\right)-\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - p_1\right)\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + p_1 - 2\right)}{p}$$
$$\le \frac{\left(p-\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right)\left(\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil - 1\right) - \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\left(2-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) - p - 1}{p}.$$

因为

$$\frac{\left(p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right)\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - 1\right) - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\left(2-\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) - p - 1}{p} = \frac{\left(p-\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right)\left(\frac{p}{2} - 1\right) - \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\left(2-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\right) - p - 1}{p},$$

所以有

$$H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}\left(x,y\right) \le \left(q+l-1\right)\frac{\left(p-\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right)\left(\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor - 1\right) - \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\left(2-\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil\right) - p - 1}{p}$$
$$+\frac{\left(p+q+l-1\right)\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor\left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil}{p}+M.$$

情况 4. v_j 和 x 都在 C_q 上。同情况 3 讨论类似，我们有

$$H_{B_{n,v_j}(p,l,q)}\left(x,y\right) \le \left(p+l-1\right)\frac{\left(q-\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil\right)\left(\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor - 1\right) - \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor\left(2-\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil\right) - q - 1}{p}$$
$$+\frac{\left(p+q+l-1\right)\left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil}{q}+M.$$

4. $\varphi(G)$ 的最小值

引理 4.1. 设 $G=B\left(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2}\right)\in\mathcal{B}_n\left(p,l,q\right)$ 和 $G_s=B\left(T_1,\cdots,T_{i-1},K_{1,n_i-1},T_{i+1},\cdots,T_{p+q+l-2}\right)\in\mathcal{B}_n\left(p,l,q\right)$，如果 x 是 T_i 和 K_{1,n_i-1} 中的一个悬挂点，且 $j\ne i$ 时，y 是 T_j 中的一个悬挂点，那么 $H\left(x,y\right)\ge H_{G_s}\left(x,y\right)$ 和 $H\left(y,x\right)\ge H_{G_s}\left(y,x\right)$。

证明：如果 $\left|V\left(T_i\right)\right|\le 2$，那么结论成立。我们假设 $\left|V\left(T_i\right)\right|\ge 3$。由引理 2.4，我们有，$H\left(x,y\right)=H\left(x,v_i\right)+H\left(v_i,v_j\right)+H\left(v_j,y\right)$ 和 $H_{G_s}\left(x,y\right)=H_{G_s}\left(x,v_i\right)+H_{G_s}\left(v_i,v_j\right)+H_{G_s}\left(v_j,y\right)$。一方面，$H\left(x,v_i\right)\ge 1=H_{G_s}\left(x,v_i\right)$。另一方面，由引理 3.2 和引理 2.1，我们有，$H\left(v_i,v_j\right)=H_{G_s}\left(v_i,v_j\right)$。由引理 2.3，我们有，$H\left(v_j,y\right)=H_{G_s}\left(v_j,y\right)$。因此 $H\left(x,y\right)\ge H_{G_s}\left(x,y\right)$。

设 w 是 G 中 x 的唯一邻点。那么 $H\left(v_i,x\right)=H\left(v_i,w\right)+H\left(w,x\right)\ge H\left(w,x\right)=H_{G_s}\left(v_i,x\right)$。由引理 2.4，我们有，$H\left(y,x\right)=H\left(y,v_j\right)+H\left(v_j,v_i\right)+H\left(v_i,x\right)\ge H_{G_s}\left(y,x\right)$。所以结论成立。

引理 4.2. 设 G 和 G_s 是引理 4.1 中的图。那么 $\varphi\left(G_s\right)\le\varphi\left(G\right)$。

证明：设 x 和 y 是两个顶点且有 $\varphi\left(G_s\right)=H_{G_s}\left(x,y\right)$。由引理 3.1，$x$ 和 y 要么是 $V\left(G_s\right)$ 中的悬挂点，要么是 $V\left(B\left(p,q,l\right)\right)$ 中度为 2 的点。我们考虑以下这三种情况。

情况 1. 点 $x,y\notin V\left(K_{1,n_i-1}\right)$。由引理 3.2，很容易看出 $\varphi\left(G_s\right)=H_{G_s}\left(x,y\right)=H\left(x,y\right)\le\varphi\left(G\right)$。

情况 2. 点 $x,y\in V\left(K_{1,n_i-1}\right)$。由引理 2.3，我们有 $H_{G_s}\left(x,y\right)=2\left(n+1\right)$。不失一般性的情况下，我们假设 $x,y\in V\left(T_i\right)$ 都是 G 中的悬挂点。设 w 是 y 的唯一的邻点。由引理 2.4 和引理 2.3，我们有 $H\left(x,y\right)=H\left(x,w\right)+H\left(w,y\right)\ge 1+\left(2n+1\right)=\varphi\left(G_s\right)$。

情况 3. $x\in V\left(K_{1,n_i-1}\right)$ 或者 $y\in V\left(K_{1,n_i-1}\right)$。假设 $x\in V\left(K_{1,n_i-1}\right)$ 和 $y\in V\left(T_p\right)$，这里 $p\ne i$。不失一般性的情况下，我们假设 $x\in V\left(T_i\right)$ 和 $y\in V\left(T_p\right)$ 是 G 中对应的两个点。那么由引理 4.1，有 $H\left(x,y\right)\ge H_{G_s}\left(x,y\right)$，这表明 $\varphi\left(G\right)\ge H\left(x,y\right)\ge H_{G_s}\left(x,y\right)=\varphi\left(G_s\right)$。因此结论成立。

引理 4.3 设 $G=B\left(T_1,T_2,\cdots,T_{p+q+l-2}\right)\in\mathcal{B}_n\left(p,l,q\right)$ 和 $G'=B\left(K_{1,n_1-1},\cdots,K_{1,n_{p+q+l-2}-1}\right)\in\mathcal{B}_n\left(p,l,q\right)$，且对 $i=1,2,\cdots,p+q+l-2$，有 $\left|V\left(T_i\right)\right|=n_i$。那么 $\varphi\left(G'\right)\le\varphi\left(G\right)$。

证明： 设 x 和 y 是 G' 中的两个点，且 $\varphi\left(G'\right)=H_{G'}\left(x,y\right)$。由引理 3.1，$x$ 和 y 要么是 $V\left(G'\right)$ 中的悬挂点，要么是 $V\left(B\left(p,l,q\right)\right)$ 中度为 2 的点。我们考虑以下两种情况。

情况 1. 假设 $x,y\in V\left(K_{1,n_i-1}\right)$ 是 G' 中的两个悬挂点。不失一般性的情况下，我们假设 $x,y\in V\left(T_i\right)$。由引理 4.2 的情况 2，我们有 $H\left(x,y\right)\ge H_{G'}\left(x,y\right)$。因此 $\varphi\left(G\right)\ge H\left(x,y\right)\ge H_{G'}\left(x,y\right)=\varphi\left(G'\right)$。

情况 2. 假设 $x\in V\left(K_{1,n_i-1}\right)$ 和 $y\in V\left(K_{1,n_j-1}\right)$ 是 G' 中的两个点，这里 $1\le i\ne j\le p+q+l-2$。不失一般性的情况下，我们假设 $x\in V\left(T_i\right)$ 和 $y\in V\left(T_j\right)$ 是 G 中相对应的两个点，且有 $1\le i\ne j\le p+q+l-2$。由引理 2.4 和引理 4.1，我们有，$H\left(x,y\right)=H\left(x,v_i\right)+H\left(v_i,v_j\right)+H\left(v_j,y\right)\ge H_{G'}\left(x,y\right)$。因此 $\varphi\left(G\right)\ge H\left(x,y\right)\ge H_{G'}\left(x,y\right)=\varphi\left(G'\right)$。

令 $B_n^{v_1,\cdots,v_{p+q+l-2}}\left(p,l,q\right)$ 是通过在 $B\left(p,l,q\right)$ 的 $v_i\left(1\le i\le p+q+l-2\right)$ 处连接 n_i 个悬挂点的图。所以，对于任意的 $G\in\mathcal{B}_n\left(p,l,q\right)$，由定理 3.7 和引理 4.3，我们有

$$\varphi\left(B_n^{v_1,\cdots,v_{p+q+l-2}}\left(p,l,q\right)\right)\le\varphi\left(G\right)\le\varphi\left(B_{n,v_k}\left(p,l,q\right)\right)。$$

即双圈图 G 的 $\varphi\left(G\right)$ 达到它的上界时，当且仅当 G 中最多有一个非平凡的悬挂路径；达到它的下界时，当且仅当 G 中每一个悬挂树是个星图。

备注： 目前的方法还无法确定图簇 $\mathcal{B}_n\left(p,l,q\right)$ 中双圈图 G 的 $\varphi\left(G\right)$ 达到最小值时所对应的精确极图。

参考文献

[1] Klein, D.J. and Randić, M. (1993) Resistance Distance. *Journal of Mathematical Chemistry*, **12**, 81-95. https://doi.org/10.1007/BF01164627

[2] Georgakopoulos, A. and Wagner, S. (2017) Hitting Times, Cover Cost, and the Wiener Index of a Tree. *Journal of Graph Theory*, **84**, 311-326. https://doi.org/10.1002/jgt.22029

[3] Aldous, D.J. (1993) Reversible Markov Chains and Random Walks on Graphs. University of California, Berkeley.

[4] Zhang, H.H. and Li, S.C. (2020) Extremal Hitting Times of Trees with Some Given Paramaters. *Linear and Multilinear Algebra*. https://doi.org/10.1080/03081087.2020.1789538

[5] Zhu, X.M. and Zhang, X.D. (2019) The Hitting Time of Random Walk on Unicyclic Graphs. *Linear and Multilinear Algebra*, **69**, 573-592. https://doi.org/10.1080/03081087.2019.1611732

[6] Zhu, X.M. and Zhang, X.D. (2021) The Hitting Times of Random Walks on Bicyclic Graphs. *Graphs and Conbinatorrics*. https://doi.org/10.1007/s00373-021-02360-3

[7] Tetali, P. (1991) Random Walks and Effective Resistance of Networks. *Journal of Theoretical Probability*, **4**, 101-109. https://doi.org/10.1007/BF01046996

[8] Brightwell, G. and Winkler, P. (1990) Extremal Cover Times for Random Walks on Trees. *Journal of Graph Theory*, **14**, 547-554. https://doi.org/10.1002/jgt.3190140505

[9] Lu, J., Pan, X.F. and Liu, H.Q. (2021) Bicyclic Graphs with Extremal Cover Cost. *Applied Mathematics and Computation*, **405**, 126235. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126235