

红松鼠种群保护状态反馈脉冲控制 第二类模型研究

王烁烁

北京建筑大学, 北京

收稿日期: 2021年10月5日; 录用日期: 2021年10月26日; 发布日期: 2021年11月8日

摘 要

英国本土红松鼠因外来灰松鼠的入侵而面临灭绝危机, 为了保护红松鼠的生存量, 英国政府提出既保护了英国本土红松鼠达到人们所希望的数量而灰松鼠也能保留人们所希望的种群规模, 针对目前的情况, 文章根据疱疹病毒对两种松鼠影响程度的差异, 建立非Lotka-Volterra竞争模型, 详细分析了无脉冲时的正平衡点的情况, 建立带有状态反馈的脉冲模型。利用后继函数法和微分方程的有关理论, 研究了系统阶一周解的存在性和稳定性。所得结论为红松鼠的保护工作提供了一定的理论依据。

关键词

状态反馈脉冲, 后继函数, 阶一周解, 红松鼠, 灰松鼠

Study on the Second Model of State Feedback Impulsive Model of Red Squirrel Protection

Shuoshuo Wang

Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Beijing

Received: Oct. 5th, 2021; accepted: Oct. 26th, 2021; published: Nov. 8th, 2021

Abstract

Native red squirrels in the UK are facing the danger of extinction due to the invasion of alien grey squirrels. In order to protect the stock of red squirrels, the British government proposed that the

number of native red squirrels in the UK could be protected to the desired number while the population size of grey squirrels could be retained. In view of the present situation, according to the difference of herpes virus influence degree on two squirrels, the non-Lota-Volterra competition model is established, and the positive equilibrium point is analyzed in detail under the condition of no pulse, and the pulse model with state feedback is established. The existence and stability of first-order periodic solutions of the system are studied by using the method of successive functions and the theory of differential equations. The conclusions provided a theoretical basis for the conservation of red squirrels.

Keywords

Impulsive, Successor Function, Order-1 Periodic Solution, Red Squirrels, Grey Squirrels

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 背景

对红松鼠的保护刻不容缓[1], 利用数学模型研究红松鼠保护引起了学者的兴趣。近年来, 灰松鼠种群增长比较快, 而红松鼠受灰松鼠身上的疱疹病毒传染, 红松鼠死亡率增高, 而病毒对灰松鼠伤害较小[2], 因此灰松鼠种群增长比较快。英国本土红松鼠因外来灰松鼠的入侵而面临灭绝危机[3], 为了保护红松鼠的生存量, 英国政府提出捕杀灰松鼠的方法限制灰松鼠的增长, 这样就产生了一个问题: 我们每年要捕杀多少灰松鼠, 才能既保护了英国本土红松鼠达到人们所希望的数量而灰松鼠也能保留人们所希望的种群规模[4]。

本文考虑疱疹病毒建立状态脉冲模型[5]。

2. 模型建立

由于疱疹病毒对红松鼠影响较大, 对灰松鼠影响较小, 我们首先建立非 Lota-Volterra 竞争模型[6]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right) \end{cases}, y \neq y^* \quad (1)$$

$$\begin{cases} \Delta x = 0 \\ \Delta y = -\delta y, y = y^* \end{cases}$$

其中, x 和 y 分别表示红松鼠和灰松鼠在 t 时刻的密度, 系统(2)中微分方程组即为系统(1)两种群相互作用模型, k_1 和 k_2 分别表示红松鼠和灰松鼠的环境容纳量, α 表示每个灰松鼠占用红松鼠环境容纳量的数量, β 表示每个红松鼠占用灰松鼠环境容纳量的数量, r 表示每个灰松鼠身上的病毒使红松鼠种群产生的死亡率。 y^* 表示允许灰松鼠保存的密度, 也就是说在这个密度以内不会危及红松鼠的生存, δ 表示灰松鼠生存的密度达到 y^* 时, 人们开始捕杀灰松鼠时的捕杀率, 系统(1)中的: $\Delta x = x(t^+) - x(t)$, $\Delta y = y(t^+) - y(t)$, $\Delta x = 0$ 表示在捕杀灰松鼠时不要伤害红松鼠[7]。

3. 无脉冲模型分析

模型(1)对应的无脉冲模型为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry \right) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right) \end{cases} \quad (2)$$

其中, x 和 y 分别表示红松鼠和灰松鼠在 t 时刻的密度, k_1 和 k_2 分别表示红松鼠和灰松鼠的环境容纳量, α 表示每个灰松鼠占用红松鼠环境容纳量的数量, β 表示每个红松鼠占用灰松鼠环境容纳量的数量, r 表示每个灰松鼠身上的病毒使红松鼠种群产生的死亡率. αy 表示灰松鼠 t 时刻占用红松鼠环境容纳量的数量.

3.1. 模型的向量场与一致有界性

定理 1: 系统(2)所有界最终一致有界。

证明: 根据 $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ 得到水平等倾线为: $y = K_2 - \beta x$, 为直线。

得到垂直等倾线为: $x = K_1 \alpha y^2 + (rK_1 - \alpha)y + K_1$, 为抛物线。

设直线 $x = \frac{k_2}{\beta}$ 与等倾线交于一点 A , G 与 x 轴交于 A_1 , 过 A 作直线 L , 设 L 与 y 轴交于点 B , 直线 L 记为[8]: 见图 1。

$$L = ax + y - c = 0, a > 0, c > 0$$

直线段 AA_1 , AB , BO 和 OA_1 , 围成一个闭区域 G , 见图 2。

$$\frac{dL}{dt} = a \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = ax \left[1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} \right] + y \left[1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right]$$

$$\left. \frac{dL}{dt} \right|_{L=0} < 0$$

$$\frac{dx}{dt} = x \left[1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry \right] > 0$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left[1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right] < 0$$

这说明轨线与线段 L 相交[9], 必进入区域 G 。

因此, 我们有: 系统(2)所有界最终一致有界。

3.2. 系统的平衡点分析

系统(2)存在四个平衡点: $E_0(0,0)$, $E_1(0, K_2)$, $E_2(K_1, 0)$, $E^*(x^*, y^*)$

系统(2)对应的雅各比矩阵:

$$J = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2x}{K_1 - \alpha y} - ry & \frac{-\alpha x^2}{(K_1 - \alpha y)^2} - rx \\ \frac{-\beta y^2}{(K_2 - \beta x)^2} & 1 - \frac{2x}{K_2 - \beta x} \end{pmatrix}$$

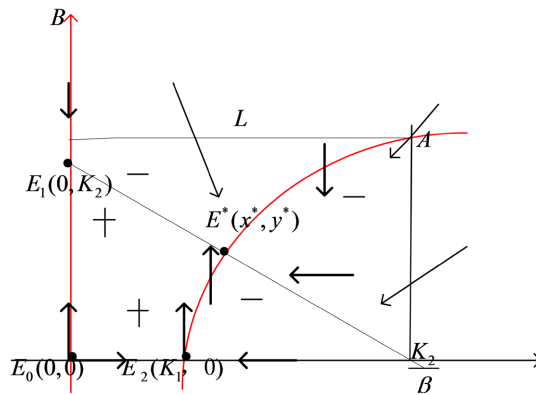


Figure 1. Vector field
图 1. 向量场

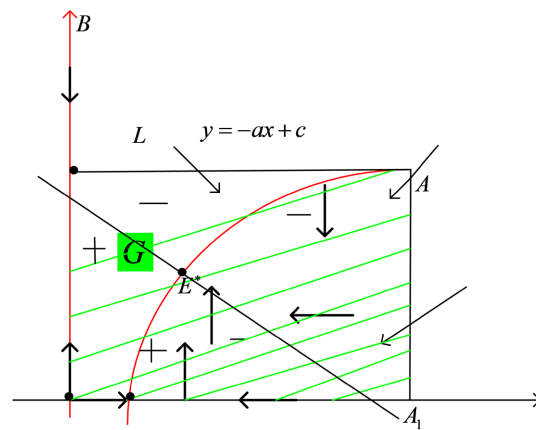


Figure 2. Vector field
图 2. 向量场

$$\text{由于} \begin{cases} 1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry = 0 \\ 1 - \frac{y}{K_2 - \beta y} = 0 \end{cases}$$

得到方程:

$$\alpha\beta^2 x^2 + (\alpha\beta + r\beta K_1 - 2K_1\beta\alpha r - 1) + \alpha r K_2^2 - \alpha K_2 - r K_1 K_2 + K_1 = 0$$

其中:

$$a = \alpha r \beta^2$$

$$b = \alpha\beta + r\beta K_1 - 2K_1\beta\alpha r - 1$$

$$c = \alpha r K_2^2 - \alpha K_2 - r K_1 K_2 + K_1 = (\alpha K_2 - K_1)(r K_2 - 1)$$

$$\Delta = (\alpha\beta + r\beta K_1 - 2K_1\beta\alpha r - 1)^2 - 4\alpha r \beta^2 (\alpha K_2 - K_1)(r K_2 - 1)$$

$$1) \text{ 当 } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0, \quad \Delta = 0,$$

$$M_1: \alpha\beta + r\beta K_1 - 2K_1\beta\alpha r - 1 < 0, \quad \alpha\beta + r\beta K_1 < 2K_1\beta\alpha r + 1$$

$$M_2: (\alpha K_2 - K_1)(r K_2 - 1) > 0, \quad \alpha K_2 - K_1 > 0, \quad r K_2 - 1 > 0$$

$$M_3: (\alpha K_2 - K_1)(rK_2 - 1) > 0, \quad \alpha K_2 - K_1 < 0, \quad rK_2 - 1 < 0$$

$$M_4: (\alpha\beta + r\beta K_1 - 2K_1\beta\alpha r - 1)^2 = 4\alpha r\beta^2 (\alpha K_2 - K_1)(rK_2 - 1)$$

$$\text{系统(2)有一个正平衡点 } E^*(x^*, y^*)。 \quad y^* = K_2 - \beta x^*, \quad x^* = \frac{2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1}{2\alpha r\beta^2}$$

此时系统的稳定性:

结论一: $E_0(0,0)$ 为不稳定的结点。

$$\text{证明: } E_0(0,0), \quad J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D=1, \quad T=2, \quad \Delta=T^2-4D=0$$

由 $\Delta=T^2-4D=0$ 可知说明平衡点是结点。

所以 E_0 是不稳定的结点。

结论二: $E_1(0, K_2)$ 为鞍点。

$$\text{证明: 平衡点, } J_{(0, K_2)} = \begin{pmatrix} 1-rK_2 & 0 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$$

考虑 M_3 成立

$$D=rK_2-1 < 0, \quad T=-rK_2, \quad \Delta=T^2-4D=(rK_2-2)^2$$

所以 E_2 是鞍点。

结论三: $E_2(K_1, 0)$ 为鞍点。

$$\text{证明: 平衡点 } E_2(K_1, 0), \quad J_{(K_1, 0)} = \begin{pmatrix} -1 & -\alpha - rK_1 \\ 0 & 1 - \frac{2K_1}{K_2 - \beta K_1} \end{pmatrix}$$

$$D=-1 < 0, \quad T=0, \quad \Delta=T^2-4D=4$$

所以 E_2 是鞍点。

结论四: $E^*(x^*, y^*)$ 为稳定的结点。

$$\text{证明: 平衡点 } E^*(x^*, y^*), \quad J_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} ry^* - 1 & -\alpha(1-ry^*)^2 - rx^* \\ -\beta & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \beta(\alpha - \alpha ry^* + rx^*), \quad T = ry^* - 2$$

$$\Delta = T^2 - 4D = (ry^* - 2)^2 - 4\beta(\alpha - \alpha ry^* + rx^*)$$

考虑 M_1, M_2, M_3, M_4 成立

$$\begin{aligned} D &= 1 - ry_* - \alpha\beta(1-ry_*)^2 - r\beta x_* \\ &= 1 - r(K_2 - \beta x_*) - \alpha\beta(1-r(K_2 - \beta x_*))^2 - r\beta x_* \\ &= 1 - r(K_2 - \beta x_*) - \alpha\beta(1-rK_2 + r\beta x_*)^2 - r\beta x_* \\ &= 1 - rK_2 + r\beta x_* - \alpha\beta[(1-rK_2)^2 + r^2\beta^2 x_*^2 + 2(1-rK_2)r\beta x_*] - r\beta x_* \\ &= 1 - rK_2 + r\beta x_* - \alpha\beta(1-rK_2)^2 - \alpha r^2 \beta^3 x_*^2 - 2\alpha r\beta^2(1-rK_2)x_* - r\beta x_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - rK_2 - \alpha\beta(1 + r^2K_2^2 - 2rK_2) - \alpha r^2\beta^3x_*^2 - 2\alpha r\beta^2(1 - rK_2)x_* \\
&= 1 - rK_2 - \alpha\beta - \alpha\beta r^2K_2^2 + 2\alpha\beta rK_2 - \alpha r^2\beta^3x_*^2 - 2\alpha r\beta^2(1 - rK_2)x_* \\
&= 1 - rK_2 + \alpha\beta rK_2 - \alpha\beta r^2K_2^2 + \alpha\beta rK_2 - \alpha\beta - \alpha r^2\beta^3x_*^2 - 2\alpha r\beta^2(1 - rK_2)x_* \\
&= (1 - rK_2) + \alpha\beta rK_2(1 - rK_2) - \alpha\beta(1 - rK_2) - 2\alpha r\beta^2x_*(1 - rK_2) - \alpha r^2\beta^3x_*^2 \\
&= (1 - rK_2)(1 + \alpha\beta rK_2 - \alpha\beta - 2\alpha r\beta^2x_*) - \alpha r^2\beta^3x_*^2 \\
&= (1 - rK_2)(1 - \alpha\beta + \alpha\beta rK_2 - 2\alpha r\beta^2x_*) - \alpha r^2\beta^3x_*^2 \\
&= (1 - rK_2)(1 - \alpha\beta(1 - rK_2) - 2\alpha r\beta^2x_*) - \alpha r^2\beta^3x_*^2 \\
&= (1 - rK_2) - \alpha\beta(1 - rK_2)^2 - 2\alpha r\beta^2x_*(1 - rK_2) - \alpha r^2\beta^3x_*^2 \\
&= (1 - rK_2) - \alpha\beta(1 - rK_2)^2 - 2\alpha r\beta^2 \frac{2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1}{2\alpha r\beta^2} (1 - rK_2) - \alpha r^2\beta^3 \left(\frac{2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1}{2\alpha r\beta^2} \right)^2 \\
&= (1 - rK_2) - \alpha\beta(1 - rK_2)^2 - (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1)(1 - rK_2) - \alpha r^2\beta^3 \left(\frac{2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1}{2\alpha r\beta^2} \right)^2 \\
&= (1 - rK_2) - \alpha\beta(1 - rK_2)^2 - (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1)(1 - rK_2) - \frac{1}{4\alpha\beta} (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1)^2 \\
&= (1 - rK_2) \left[1 - \alpha\beta(1 - rK_2) - (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1) \right] - \frac{1}{4\alpha\beta} (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1)^2 \\
&= (1 - rK_2) (1 - \alpha\beta + \alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta K_1 + \alpha\beta - 1) - \frac{1}{4\alpha\beta} (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1)^2 \\
&= (1 - rK_2) (\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta K_1) - \frac{1}{4\alpha\beta} (2K_1\beta\alpha r - r\beta K_1 - \alpha\beta + 1)^2 \\
&= (1 - rK_2) (\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta K_1) - \frac{4\alpha r\beta^2 (\alpha K_2 - K_1) (rK_1 - 1)}{4\alpha\beta} \\
&= (1 - rK_2) (\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta K_1) - r\beta (\alpha K_2 - K_1) (rK_1 - 1) \\
&= (1 - rK_2) (\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta K_1) + r\beta (\alpha K_2 - K_1) (1 - rK_1) \\
&= (1 - rK_2) \left[(\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta K_1) + r\beta \alpha K_2 - r\beta K_1 \right] \\
&= (1 - rK_2) (\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r + r\beta \alpha K_2) \\
&= (1 - rK_2) (2\alpha\beta rK_2 - 2K_1\beta\alpha r) \\
&= 2\alpha\beta r (1 - rK_2) (K_2 - K_1) \\
&= 2\alpha\beta r (rK_2 - 1) (K_1 - K_2) \\
&> 0
\end{aligned}$$

所以 $E_*(x_*, y_*)$ 是稳定的结点。

3.3. 系统极限环不存在性

定理 2: 系统(1)在第一象限不存在极限环。

证明: 我们用 DuLac 极限环的存在性定理, 记 $B(x, y) = \frac{1}{xy}$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry \right) = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right) = g(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

$$f_1(x, y) = B(x, y)f(x, y) = \frac{1}{y} - \frac{x}{y(K_1 - \alpha y)} - r$$

$$g_1(x, y) = B(x, y)g(x, y) = \frac{1}{x} - \frac{y}{x(K_1 - \alpha y)}$$

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{y} = -\frac{1}{y(K_1 - \alpha y)} - \frac{1}{x(K_2 - \beta x)} < 0$$

因此, 由 DuLac 定理得到结论, 系统(1)在第一象限不存在极限环[10]。

定理 3: 平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 为全局渐近稳定。

证明: 由结论 4 可知 $E^*(x^*, y^*)$ 为稳定的焦点, 而且 $E^*(x^*, y^*)$ 是区域 G 中唯一的平衡点。又由定理

2: 系统(2)在第一象限不存在极限环。再由定理 1: 系统(1)所有界最终一致有界[11]。

由此, 我们就可以得出结论: 平衡点 $E^*(x^*, y^*)$ 为全局渐进稳定[12]。

3.4. 全局稳定性

通过构造 V 函数证明无控制系统的全局稳定性[13]。我们构造 V 函数:

$$V(x, y) = \left[(x - x^*) - x^* \ln\left(\frac{x}{x^*}\right) \right] + c \left[(y - y^*) - y^* \ln\left(\frac{y}{y^*}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{x - x^*}{x} \frac{dx}{dt} + c \frac{y - y^*}{y} \frac{dy}{dt} \\ &= \left(\frac{x - x^*}{x} \right) \left(x - \frac{x^2}{K_1 - \alpha y} - rxy \right) + c \left(\frac{y - y^*}{y} \right) \left(y - \frac{y^2}{K_2 - \beta x} \right) \\ &= (x - x^*) \left(1 - \frac{x}{K_1 - \beta y} - ry \right) + c (y - y^*) \left[1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right] \end{aligned}$$

考虑到平衡点方程:

$$\begin{cases} 1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry = 0 \\ 1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (x - x^*) \left[1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry - 1 + \frac{x^*}{K_1 - \alpha y^*} + ry^* \right] \\ &\quad + c (y - y^*) \left[1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} - 1 + \frac{y^*}{K_2 - \beta x^*} \right] \\ &= (x - x^*) \left[-\frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry + \frac{x^*}{K_1 - \alpha y^*} + ry^* \right] \\ &\quad + c (y - y^*) \left[-\frac{y}{K_2 - \beta x} + \frac{y^*}{K_2 - \beta x^*} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x-x^*) \left[r(y-y^*) + \frac{K_1(x^*-x) + x\alpha(y^*-y)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} \right] \\
&\quad + c(y-y^*) \left[\frac{K_2(y^*-y) + \beta(x^*y - xy^*)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \right] \\
&= r(y-y^*)(x-x^*) + (x-x^*) \left[\frac{K_1(x^*-x) + x\alpha(y^*-y)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} \right] \\
&\quad + c(y-y^*) \left[\frac{K_2(y^*-y) + \beta(x^*y - xy^*)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \right] \\
&= r(y-y^*)(x-x^*) + \frac{K_1(x-x^*)(x^*-x)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} + \frac{x\alpha(x-x^*)(y^*-y)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} \\
&\quad + \left[\frac{cK_2(y-y^*)(y^*-y) + c\beta(y-y^*)(x^*y - xy^*)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \right] \\
&= r(y-y^*)(x-x^*) - \frac{K_1(x-x^*)^2}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} - \frac{x\alpha(x-x^*)(y-y^*)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} \\
&\quad + \frac{cK_2(y-y^*)(y^*-y)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} + \frac{c\beta(y-y^*)(x^*y - xy^*)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \\
&= r(y-y^*)(x-x^*) - \frac{K_1(x-x^*)^2}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} - \frac{x\alpha(x-x^*)(y-y^*)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} \\
&\quad - \frac{cK_2(y-y^*)^2}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} + \frac{c\beta(y-y^*)(x^*y - xy^*)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \\
&= r(y-y^*)(x-x^*) + \frac{c\beta(y-y^*)(x^*y - xy^*)}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \\
&\quad - \frac{K_1(x-x^*)^2}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} - \frac{x\alpha(x-x^*)(y-y^*)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} - \frac{cK_2(y-y^*)^2}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)}
\end{aligned}$$

当 $c = \frac{r(x-x^*)(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)}{\beta(xy^* - x^*y)}$ 时,

$$\frac{dV}{dt} = - \left[\frac{K_1(x-x^*)^2}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} + \frac{x\alpha(x-x^*)(y-y^*)}{(K_1-\alpha y^*)(K_1-\alpha y)} + \frac{cK_2(y-y^*)^2}{(K_2-\beta x)(K_2-\beta x^*)} \right] < 0$$

因为 $\frac{dV}{dt}$ 在第一象限内是定负的, 所以在 $E^*(x^*, y^*)$ 平衡点处是全局渐近稳定的[14]。

4. 脉冲模型分析

4.1. 阶一周期解的存在性

定理 4: 系统(1)存在阶一周期解。

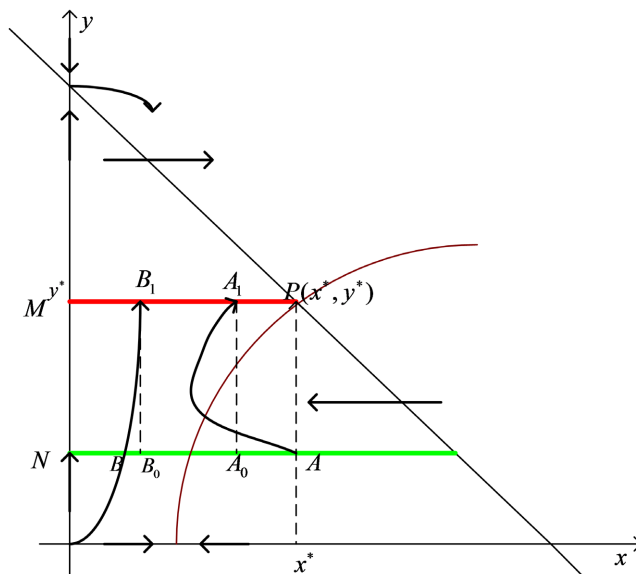


Figure 3. Successor function
图 3. 后继函数

证明：脉冲集 $M: y = y^*$ ，相集 $N: y = (1-\delta)y^*$ ，直线 $x = x^*$ 与相集交于一点 A ，过 A 点的轨线与脉冲集 M 交于一点 A_1 ，由向量场可以看出轨线 AA_1 的形状如图 3 所示，脉冲到相集上一点 A_0 ，这说明 A_0 为 A 的后继点[15]，同样可知从原点出来的一条轨线 BB_1 ，有 B_0 为 B 的后继点，在相集上建立坐标系，以 N 与 Y 轴的交点为坐标原点，分别设点 A 的坐标为 a ，点 B 的坐标为 b ，分别设点 A_0 的坐标为 a_0 ， B_0 点的坐标为 b_0 ，后继函数[16]：

$$f(A) = a_0 - a < 0, \quad f(B) = b_0 - b > 0$$

这样，由文[17]的后继函数判别法证明了定理 4，即脉冲状态反馈控制系统(1)存在阶一周解 CC_1 。如图 4。

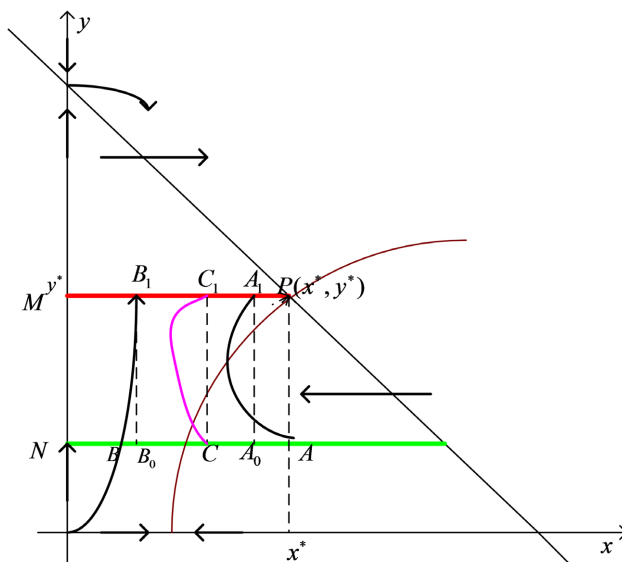


Figure 4. First order periodic solution
图 4. 阶一周期解

4.2. 阶一周解的稳定性

定理 5: 系统(1)的阶一周解是稳定的。

证明: 由定理 2 的证明知系统(2)中 DuLac 函数 $B(x, y)$ 变换后得系统(3)。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \left(1 - \frac{x}{K_1 - \alpha y} - ry \right) = B(x, y) f(x, y) = f_1(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = y \left(1 - \frac{y}{K_2 - \beta x} \right) = B(x, y) g(x, y) = g_1(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

由定理 2 的证明中的计算有:

$$\frac{\partial(Bf)}{\partial x} + \frac{\partial(Bg)}{y} = -\frac{1}{y(K_1 - \alpha y)} - \frac{1}{x(K_2 - \beta x)} < 0$$

又系统(1)的轨线与系统(3)的轨线是完全相同的, 由文献[17]即证明了阶一周解 CC_1 是稳定的。

参考文献

- [1] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法(第二版), 生物数学丛书, 第 19 卷[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [2] 马知恩, 周义仓, 李承治. 常微分方程稳定性与稳定性方法[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2015.
- [3] Liu, Q., Zhang, M. and Chen, L.S. (2019) State Feedback Impulsive Therapy to SIS Model of Animal Infectious Disease. *Physica A*, **516**, 222-232. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.09.161>
- [4] Lakshmikantham, V., Bainov, D. and Simeonov, P. (1989) Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/0906>
- [5] Wang, L.M., Liu, Z.J., et al. (2007) Impulsive Diffusion in Single Species Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **33**, 1213-1219. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.01.102>
- [6] Liu, K.Y. and Chen, L.S. (2007) Harvesting Control for a Stage-Structured Predator-Prey Model with Ivlev's Functional Response and Impulsive Stocking on Prey. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2007**, Article ID: 086482.
- [7] 陈兰荪. 害虫治理与半连续动力系统几何理论[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2011, 12(1): 1-9.
- [8] 陈兰荪. “半连续动力系统”理论及应用[J]. 玉林师范学院学报, 2013, 34(2): 2-10.
- [9] Wang, T.Y. and Chen, L.S. (2011) Nonlinear Analysis of a Microbial Pesticide Model with Impulsive State Feedback Control. *Nonlinear Dynamics*, **65**, 1-10. <https://doi.org/10.1007/s11071-010-9828-x>
- [10] 陈兰荪. 半连续动力系统理论及应用[J]. 玉林师范学院学报, 2013, 34(2): 1-9.
- [11] 桂占吉, 王凯华, 陈兰荪. 病虫害防治的数学理论与计算[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
- [12] 叶彦谦, 等. 极限环论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984.
- [13] Zhang, M., Chen, L.S. and Li, Z.Y. (2019) Homoclinic Bifurcation of a State Feedback Impulsive Controlled Prey-Predator System with Holling-II Functional Response. *Nonlinear Dynamics*, **98**, 929-942. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05235-8>
- [14] Fu, J.-B. and Chen, L.-S. (2018) Modelling and Qualitative Analysis of Water Hyacinth Ecological System with Two State-Dependent Impulse Controls. *Complexity*, **2018**, Article ID: 4543976. <https://doi.org/10.1155/2018/4543976>
- [15] Liu, Q., Zhang, M. and Chen, L.S. (2019) State Feedback Impulsive Therapy to SIS Model of Animal Infectious Diseases. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **516**, 222-232. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.09.161>
- [16] Zhang, M., Liu, K.Y., Chen, L.S. and Li, Z.Y. (2018) State Feedback Impulsive Control of Computer Worm and Virus with Saturated Incidence. *Mathematical Biosciences & Engineering*, **15**, 1465-1478. <https://doi.org/10.3934/mbe.2018067>
- [17] Chen, L.S., Liang, X.Y. and Pei, Y.Z. (2018) The Periodic Solution of the Impulsive State Feedback Dynamical System. *Communication in Mathematical Biology and Neuroscience*, **2018**, Article No. 14.