

# 流固振动Laplace模型的有限元局部并行方案

梁 杨

贵州师范大学数学科学学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2021年10月8日; 录用日期: 2021年10月29日; 发布日期: 2021年11月9日

---

## 摘 要

本文研究流固振动Laplace模型的局部和并行有限元算法, 首先给出流固振动Laplace模型的局部先验误差估计, 然后建立局部和并行有限元方案, 并给出局部方案的误差分析, 最后给出数值算例验证方案的有效性。

## 关键词

流固振动模型, 局部先验估计, 有限元局部和并行算法, 误差分析

---

# Local and Parallel Finite Element Algorithms to Solve Laplace Model for Fluid-Solid Vibrations

Yang Liang

School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 8<sup>th</sup>, 2021; accepted: Oct. 29<sup>th</sup>, 2021; published: Nov. 9<sup>th</sup>, 2021

---

## Abstract

In this paper, for the Laplace model for fluid-solid vibrations we establish the local finite element discretization scheme. We give the local *a priori* error estimate and the error analysis of the proposed scheme. We also provide the numerical experiment to show the efficiency of our scheme.

## Keywords

Fluid-Solid Vibration, Local *a priori* Error Estimate, Local Finite Element Discretization Scheme, Error Estimates

---



## 1. 引言

局部先验估计是有限元方法的基本研究内容, 基于局部先验估计的局部并行算法是求解偏微分方程的高效数值方法之一。2000 年许进超和周爱辉结合局部亏量校正技巧的二网格离散方法, 提出了有限元局部和并行算法, 并用于求解二阶非对称边值问题(参见文献[1])。之后, 许多学者发展该方法, 将之成功用于 Stokes 方程(参见[2] [3]), 量子特征值问题(参见[4]), 对流扩散方程(参见[5]), 定常不可压缩流问题(参见[6]), 二阶椭圆特征值问题(参见[7] [8]), Steklov 特征值问题(参见[9] [10])和传输特征值问题(参见[11])等。

流固振动 Laplace 模型问题来源于浸没在不可压缩流体中的一束平行管的振动, 在核工程中具有相当重要的意义(参见文献[12] [13] [14]), 其数值方法近年受到诸多学者的关注, 例如 Armentano 等研究了该问题的 hp 协调有限元法及自适应算法, 并给出了先验误差估计和后验误差估计(参见[15]), 张宇等用非协调有限元方法研究了流固振动特征值的可保证下界(参见[16])。本文研究流固振动 Laplace 模型的局部先验误差估计和有限元局部计算方法, 首先给出该问题的局部先验估计, 基于局部先验估计建立协调有限元局部计算方案, 接着对方案进行误差分析, 最后给出数值实验展示局部和并行方案的效率。

关于有限元法和谱逼近的基本理论参见文献[17] [18]。本文中字母  $C$  表示与网格尺寸无关的常数, 它在不同的地方所表示的值可能不同。为方便起见用符号  $a \lesssim b$  表示  $a \leq Cb$ 。

## 2. 预备知识

考虑下述流固振动 Laplace 模型(详见[12] [14] [19]): 求  $\omega > 0$  (振动频率),  $u \neq 0$  (流体压力)使得

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{在 } \Omega \text{ 中,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上,} \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\rho\omega^2}{\mu - m\omega^2} \left( \int_{\Gamma_i} u \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{n} & \text{在 } \Gamma_i \text{ 上, } i = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (2.1)$$

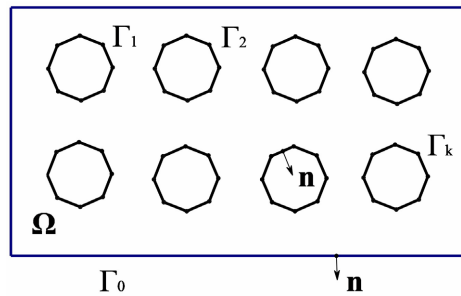
这里  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是由流体占据的有界多边形区域,  $\Gamma_0$  表示  $\Omega$  的外边界,  $\Gamma_i (i = 1, \dots, K)$  表示每个管与流体间的交界面, 管的硬度为  $\mu$ , 质量为  $m$ , 流体视为完全不可压缩且密度为  $\rho$ ,  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$  是  $\Omega$  边界上的单位外法向量。记  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_K$  (参见图 1)。

令  $H^t(\Omega)$  表示  $\Omega$  上通常  $t$  阶 Sobolev 空间, 其上范数和半范数分别为  $\|\cdot\|_{t,\Omega}$  和  $|\cdot|_{t,\Omega}$ ,  $H^0(\Omega) = L_2(\Omega)$ ,  $H^0(\Gamma) = L_2(\Gamma)$  装备范数  $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ 。令  $V := H^1(\Omega)/\mathbb{R}$ , 其上范数为  $|\cdot|_{1,\Omega}$ 。记  $\lambda := \rho\omega^2 / (\mu - m\omega^2)$ 。(2.1) 的弱形式为: 求  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u \in V$  满足

$$\begin{cases} a(u, v) = \lambda b(u, v) \quad \forall v \in V, \\ b(u, u) = 1, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v, \\ b(u, v) &= \sum_{i=1}^K \left( \int_{\Gamma_i} u \mathbf{n} \right) \cdot \left( \int_{\Gamma_i} v \mathbf{n} \right), \quad |u|_b = b(u, u)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



**Figure 1.** Schematic diagram of 2D area model  
**图 1.** 二维区域模型示意图

显然  $a(\cdot, \cdot)$  是  $V \times V$  上连续、对称、椭圆的双线性形式,  $b(\cdot, \cdot)$  是  $V \times V$  上非负、连续、对称的双线性形式。由文献[19]可知, (2.2)的解是由  $2K$  个特征对  $(\lambda_j, u_j)$  给出的序列, 其中特征值  $\lambda_j$  均为正, 假设特征值按递增排序:  $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{2K}$ 。相应于特征值  $\lambda_j$  的特征函数  $u_j \in V$  使得  $\{u_1, \dots, u_{2K}\}$  是一个线性无关集。

令  $\pi_h(\Omega)$  是  $\Omega$  的一族三角形剖分,  $h(x)$  是点  $x$  所在单元  $T$  的直径,  $h_\Omega = \max_{x \in \Omega} h(x)$  是剖分  $\pi_h(\Omega)$  的直径。令  $\varepsilon_h(\Gamma_i) = \{e\}$  表示  $\pi_h(\Omega)$  中位于边界  $\Gamma_i$  上的边组成的集合,  $\varepsilon_h(\Gamma) = \varepsilon_h(\Gamma_1) \cup \varepsilon_h(\Gamma_2) \cup \dots \cup \varepsilon_h(\Gamma_K)$ 。令  $S_h(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$  是定义在  $\pi_h(\Omega)$  上的分片  $m$  次多项式空间,  $V_h(\Omega) = S_h(\Omega)/\mathbb{R}$ 。

相应于(2.2)的离散特征值问题为: 求  $\lambda_h \in \mathbb{R}$  和  $u_h \in V_h(\Omega)$  满足

$$\begin{cases} a(u_h, v_h) = \lambda_h b(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in V_h(\Omega), \\ b(u_h, u_h) = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

由文献[19]可知, 离散问题(2.3)具有  $2K$  个正的特征值, 假设特征值按递增排序:  $0 < \lambda_{1,h} \leq \dots \leq \lambda_{2K,h}$ , 相应于特征值  $\lambda_{j,h}$  的特征函数  $u_{j,h} \in V_h(\Omega)$  使得  $\{u_{1,h}, \dots, u_{2K,h}\}$  是一个线性无关集。

相应于(2.2)的源问题与相应于(2.3)的近似源问题分别如下:

求  $w \in V$ , 使得

$$a(w, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V; \quad (2.4)$$

求  $w_h \in V_h(\Omega)$ , 使得

$$a(w_h, v) = b(f, v), \quad \forall v \in V_h(\Omega). \quad (2.5)$$

记

$$\tilde{f} = \left( \int_{\Gamma_i} f \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma_i, i=1, \dots, K; \quad \tilde{f} = 0 \quad \text{on } \Gamma_0,$$

经简单计算有

$$|f|_b \leq C \|f\|_{0,\Gamma}, \quad (2.6)$$

于是, 对  $f \in L^2(\Gamma)$  有

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \tilde{f}^2 ds &= \sum_{i=1}^K \int_{\Gamma_i} \left( \int_{\Gamma_i} f \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} \left( \int_{\Gamma_i} f \mathbf{n} \right) \cdot \mathbf{n} ds \\ &\leq C \sum_{i=1}^K \left( \int_{\Gamma_i} f \mathbf{n} \right) \cdot \left( \int_{\Gamma_i} f \mathbf{n} \right) ds \leq C |f|_b^2 \lesssim \|f\|_{0,\Gamma}^2, \end{aligned}$$

这表明  $\tilde{f} \in L^2(\Gamma)$ 。因此, 由 Neumann 问题先验估计(参见文献[20], 或文献[21]命题 4.4)可知, (2.4)的解  $w \in H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega)$  且满足

$$\|w\|_{H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega)/\mathbb{R}} \lesssim \|\tilde{f}\|_{0,\Gamma} \lesssim |f|_b \lesssim \|f\|_{0,\Gamma} \lesssim |f|_{1,\Omega}, \quad (2.7)$$

其中  $r < \frac{\pi}{\theta}$ ,  $\theta$  为区域  $\Omega$  的最大凹角。于是, 对所有  $r < \frac{\pi}{\theta}$ , (2.2)的特征函数  $u \in H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega)$ 。注意, 对于具有至少一个交界面  $\Gamma_i$  的多角形区域  $\Omega$ , 必有  $\theta > \pi$ , 因此  $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{\theta} < 1$ 。

根据 Lax-Milgram 定理可知, (2.4)和(2.5)分别存在唯一解, 于是可定义解算子  $T, T_h: V \rightarrow V$ :

$$\begin{cases} f \in V \mapsto Tf \in V, \\ a(Tf, v) = b(f, v) \quad \forall v \in V; \\ f \in V \mapsto T_h f \in V_h(\Omega) \subset V, \\ a(T_h f, v_h) = b(f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h(\Omega). \end{cases}$$

于是, (2.2)和(2.3)分别具有下述等价算子形式:

$$Tu = \mu u, \quad (2.8)$$

$$T_h u_h = \mu_h u_h, \quad (2.9)$$

其中  $\mu = \frac{1}{\lambda}, \mu_h = \frac{1}{\lambda_h}$ 。

由(2.7)可知  $\|Tf\|_{H^{1+\frac{r}{2}}(\Omega)/\mathbb{R}} \lesssim \|f\|_{0,\Gamma} \lesssim |f|_{1,\Omega}$ , 即算子  $T$  有界。

由(2.6)有

$$|T_h f|_{1,\Omega}^2 = a(T_h f, T_h f) = b(f, T_h f) \lesssim |f|_b |T_h f|_b \lesssim \|f\|_{0,\Gamma} |T_h f|_{1,\Omega},$$

从而  $|T_h f|_{1,\Omega} \lesssim \|f\|_{0,\Gamma} \lesssim |f|_{1,\Omega}$ , 即  $T_h$  也是有界算子。

令  $M(\lambda)$  表示所有相应于特征值  $\lambda$  的特征函数张成的空间。

定义 Ritz 投影  $P_h: V \mapsto V_h(\Omega)$  满足

$$a(w - P_h w, v) = 0 \quad \forall v \in V_h(\Omega).$$

显然有

$$|P_h w|_{1,\Omega} \leq |w|_{1,\Omega} \quad \forall w \in V.$$

容易证明  $T_h = P_h T$ 。

利用 Cea 引理和 Aubin-Nische 技巧可得以下结论。

**引理 2.1** 令  $w$  和  $w_h$  分别是(2.4)和(2.5)的解, 如果  $w \in H^{m+\sigma}(\Omega)$  ( $0 < \sigma \leq 1$ ), 则

$$|w - P_h w|_{1,\Omega} \leq Ch^{m+\sigma-1} \|w\|_{m+\sigma,\Omega}, \quad (2.10)$$

$$\|w - P_h w\|_{0,\Omega} \leq Ch^{\frac{r}{2}} |w - P_h w|_{1,\Omega}, \quad (2.11)$$

$$\|w - P_h w\|_{0,\Gamma} \leq Ch^{\frac{r}{2}} |w - P_h w|_{1,\Omega}. \quad (2.12)$$

**引理 2.2** 算子  $T$  是紧的, 且当  $h \rightarrow 0$  时

$$\|T_h - T\|_{0,\Gamma} \rightarrow 0.$$

证明: 可记  $w = Tf$ ,  $w_h = T_h f$ , 注意到  $T_h = P_h T$ , 由(2.10), (2.11)及(2.7)有

$$\begin{aligned} \|T_h - T\|_{0,\Gamma} &= \sup_{0 \neq f \in L^2(\Gamma)} \frac{\|T_h f - Tf\|_{0,\Gamma}}{\|f\|_{0,\Gamma}} \leq \sup_{0 \neq f \in L^2(\Gamma)} \frac{Ch^{\frac{r}{2}} |T_h f - Tf|_{1,\Omega}}{\|f\|_{0,\Gamma}} \\ &\leq \sup_{0 \neq f \in L^2(\Gamma)} \frac{Ch^r \|Tf\|_{1+\frac{r}{2}}}{\|f\|_{0,\Gamma}} \leq Ch^r \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

证毕。

由谱逼近理论(参见文献[17]和文献[15]中命题 3.1), 有以下引理。

**引理 2.3** 设  $M(\lambda) \subset H^{m+\sigma}(\Omega)$  ( $0 < \sigma \leq 1$ ), 对所有的  $r < \frac{\pi}{\theta}$ , 存在正常数  $C$  和  $\kappa$  使得当  $h < \kappa$  时有

$$|u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega} \lesssim h^{m+\sigma-1}, \tag{2.13}$$

$$|u_j - u_{j,h}|_b \lesssim h^{\frac{r}{2}} |u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega}, \tag{2.14}$$

$$\|u_j - u_{j,h}\|_{0,\Gamma} \lesssim h^{\frac{r}{2}} |u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega}, \tag{2.15}$$

$$|\lambda_j - \lambda_{j,h}| \lesssim |u_j - u_{j,h}|_{1,\Omega}^2. \tag{2.16}$$

**引理 2.4** 设  $(\lambda, u)$  是(2.2)的特征对, 则对任意  $v \in V$ ,  $b(v, v) \neq 0$ , 有

$$\frac{a(v, v)}{b(v, v)} - \lambda = \frac{|v - u|_{1,\Omega}}{b(v, v)} - \lambda \frac{b(v - u, v - u)}{b(v, v)}.$$

证明: 参见文献[17]引理 9.1。

### 3. 局部先验误差估计

对于  $D \subset G \subset \Omega$ , 我们用符号  $D \subset\subset G$  表示  $\text{dist}(\partial D \setminus \Gamma, \partial G \setminus \Gamma) > 0$ . 给定  $G \subset \Omega$ , 定义  $\pi_h(G)$  和  $V_h(G)$  分别表示  $\pi_h(\Omega)$  和  $V_h(\Omega)$  在  $G$  上的限制. 记  $\text{supp } v = \overline{\{x: v(x) \neq 0\}}$ ,  $V_h^0(G) = \{v \in V_h(\Omega): v|_{\partial G \setminus \Gamma} = 0\}$  和  $V_h^h(G) = \{v \in V_h(\Omega): (\text{supp } v \setminus \Gamma) \subset\subset G\}$ .

令  $\Omega_0 \subset \Omega$ , 假设本文的网格和有限元空间满足以下条件(参见文献[11]):

(A0) 存在  $\gamma \geq 1$ , 使得

$$h'_\Omega \lesssim h(x), \quad \forall x \in \Omega.$$

(A1) 对  $w \in H^{1+s}(\Omega)$ , 存在  $m \geq 1$ , 使得

$$\inf_{v \in V_h(\Omega)} \left( \|h^{-1}(w - v)\|_{0,\Omega} + |w - v|_{1,\Omega} \right) \lesssim h^s \|w\|_{1+s,\Omega} \quad 0 \leq s \leq m.$$

(A2) 对任意  $v \in V_h(\Omega_0)$ , 有

$$|v|_{1,\Omega_0} \lesssim \|h^{-1}(x)v\|_{0,\Omega_0}.$$

(A3) 对  $G \subset \Omega_0$ , 令  $\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$  且  $(\text{supp } \omega \setminus \Gamma) \subset\subset G$ . 对任意  $w \in V_h(G)$ , 存在  $v \in V_h^0(G)$  使得

$$\left| h^{-1}(x)(\omega w - v) \right|_{1,G} \lesssim |w|_{1,G}.$$

对  $G \subset \Omega$ ，考虑下述混合边值问题：

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= g \quad \text{in } G, \\ \psi &= 0 \quad \text{on } \partial G \setminus \Gamma, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \quad \text{on } \partial G \cap \Gamma. \end{aligned} \quad (3.1)$$

(3.1)的弱形式为：求  $\psi_g \in H_\Gamma^1(G) = \{v \in H^1(G) : v|_{\partial G \setminus \Gamma} = 0\}$  使得

$$a(v, \psi_g) = (g, v), \quad \forall v \in H_\Gamma^1(G),$$

其中  $(f, v) = \int_\Omega f v dx$ 。

对(3.1)，我们作下述假设。

$R(G)$ . 对任意  $g \in L_2(G)$ ，存在  $\psi_g \in H_\Gamma^{1+r}(G)$  满足

$$a(v, \psi_g) = (g, v), \quad \forall v \in H_\Gamma^1(G)$$

且

$$\|\psi_g\|_{1+r,G} \leq C \|g\|_{0,G}.$$

由文献[1] [10]，我们有下列引理。

**引理 3.1** 令  $D \subset \subset \Omega_0 \subset \Omega$ ， $\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ， $(\text{supp } \omega \setminus \Gamma) \subset \subset \Omega_0$ ，则有

$$a(\omega w, \omega w) \lesssim a(w, \omega^2 w) + \|w\|_{0,\Omega_0}^2, \quad \forall w \in H^1(\Omega).$$

**引理 3.2** 设(A0)，(A2)及(A3)成立，且  $D \subset \subset \Omega_0$ 。若  $\mathcal{F} \in H^{-1}(\Omega)$  和  $w \in V_h(\Omega_0)$  满足

$$a(w, v) = \mathcal{F}(v) \quad \forall v \in V_0^h(\Omega_0),$$

则有

$$|w|_{1,D} \lesssim \|w\|_{0,\Omega_0} + \|\mathcal{F}\|_{-1,\Omega_0}.$$

**定理 3.1** 设  $w \in V$ ， $D \subset \subset \Omega_0$ ，(A0)，(A1)，(A2)和(A3)成立，则

$$|P_h w|_{1,D} \lesssim |w|_{1,\Omega_0} + \|P_h w\|_{0,\Omega_0}.$$

证明：定义 Ritz 投影  $P_h^{\Omega_0} : V(\Omega_0) \mapsto V_h(\Omega_0)$  满足

$$a(w - P_h^{\Omega_0} w, v) = 0, \quad \forall v \in V_h(\Omega_0).$$

取  $D_1 \subset \Omega$  满足  $D \subset \subset D_1 \subset \subset \Omega_0$ ，并取  $\omega \in C^\infty(\bar{\Omega})$  使得在  $\bar{D}_1$  上  $\omega \equiv 1$  且  $(\text{supp } \omega \setminus \Gamma) \subset \subset \Omega_0$ 。令  $\tilde{w} = \omega w$ ，则对任意  $v \in V_0^h(D_1)$  有

$$a(P_h^{\Omega_0} \tilde{w} - P_h w, v) = a(P_h^{\Omega_0}(\omega w) - \omega w, v) - a(P_h w - \omega w, v) = 0.$$

于是，由引理 3.2 有

$$|P_h^{\Omega_0} \tilde{w} - P_h w|_{1,D} \lesssim \|P_h^{\Omega_0} \tilde{w} - P_h w\|_{0,D_1}.$$

因此，利用商空间等价模定理推出

$$\begin{aligned}
 |P_h w|_{1,D} &\lesssim |P_h^{\Omega_0} \tilde{w}|_{1,D} + |P_h^{\Omega_0} \tilde{w} - P_h w|_{1,D} \\
 &\lesssim |P_h^{\Omega_0} \tilde{w}|_{1,D} + \|P_h^{\Omega_0} \tilde{w} - P_h w\|_{0,D_1} \\
 &\lesssim |P_h^{\Omega_0} \tilde{w}|_{1,D_1} + \|P_h w\|_{0,D_1} + \|P_h^{\Omega_0} \tilde{w}\|_{0,D_1} \\
 &\lesssim |P_h^{\Omega_0} \tilde{w}|_{1,D_1} + \|P_h w\|_{0,D_1} + \|P_h^{\Omega_0} \tilde{w}\|_{1,D_1} \\
 &\lesssim |P_h^{\Omega_0} \tilde{w}|_{1,D_1} + \|P_h w\|_{0,D_1} + |P_h^{\Omega_0} \tilde{w}|_{1,D_1} \\
 &\lesssim |\tilde{w}|_{1,\Omega_0} + \|P_h w\|_{0,D_1} \lesssim |w|_{1,\Omega_0} + \|P_h w\|_{0,\Omega_0}.
 \end{aligned}$$

证毕。

**定理 3.2** 设  $w \in V$ ,  $D \subset\subset \Omega_0$ , (A0), (A1), (A2)和(A3)成立, 则

$$|w - P_h w|_{1,D} \lesssim \inf_{v \in V_h(\Omega)} |w - v|_{1,\Omega_0} + \|w - P_h w\|_{0,\Omega}.$$

证明: 对任意  $v \in V_h(\Omega)$ , 由定理 3.1 有

$$|P_h w - v|_{1,D} = |P_h w - P_h v|_{1,D} \lesssim |w - v|_{1,\Omega_0} + \|P_h w - v\|_{0,\Omega_0},$$

于是

$$\begin{aligned}
 |w - P_h w|_{1,D} &\lesssim |w - v|_{1,D} + |v - P_h w|_{1,D} \\
 &\lesssim |w - v|_{1,\Omega_0} + \|v - P_h w\|_{0,\Omega_0} \\
 &\lesssim |w - v|_{1,\Omega_0} + \|v - w\|_{0,\Omega_0} + \|w - P_h w\|_{0,\Omega_0} \\
 &\lesssim |w - v|_{1,\Omega_0} + \|v - w\|_{1,\Omega_0} + \|w - P_h w\|_{0,\Omega_0} \\
 &\lesssim |w - v|_{1,\Omega_0} + \|w - P_h w\|_{0,\Omega_0},
 \end{aligned}$$

因此

$$|w - P_h w|_{1,D} \lesssim \inf_{v \in V_h(\Omega)} |w - v|_{1,\Omega_0} + \|w - P_h w\|_{0,\Omega}.$$

证毕。

**定理 3.3** 在定理 3.2 的假设下, 令  $(\lambda_h, u_h)$  是(2.3)的第  $j$  个特征对,  $\lambda$  是(2.2)的第  $j$  个特征值, 则存在  $u \in M(\lambda)$  使得下列误差估计成立

$$|u - u_h|_{1,D} \lesssim \inf_{v \in V_h(\Omega)} |u - v|_{1,\Omega_0} + \|u - P_h u\|_{0,\Omega} + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Gamma}.$$

证明: 由(2.8)和(2.9)可推出

$$\begin{aligned}
 u - u_h &= \lambda T u - \lambda_h T_h u_h \\
 &= \lambda T u - \lambda T_h u + \lambda T_h u - \lambda_h T_h u_h \\
 &= u - \lambda P_h T u + T_h (\lambda u - \lambda_h u_h) \\
 &= u - P_h u + T_h (\lambda u - \lambda_h u_h),
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 |u - u_h|_{1,D} &\lesssim |u - P_h u|_{1,D} + |T_h (\lambda u - \lambda_h u_h)|_{1,D} \\
 &\lesssim |u - P_h u|_{1,D} + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Gamma}.
 \end{aligned}$$

利用定理 3.2 可得

$$\begin{aligned} |u - u_h|_{1,D} &\lesssim |u - P_h u|_{1,D} + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Gamma} \\ &\lesssim \inf_{v \in V_h(\Omega)} |u - v|_{1,\Omega_0} + \|u - P_h u\|_{0,\Omega} + \|\lambda u - \lambda_h u_h\|_{0,\Gamma}. \end{aligned}$$

证毕。

#### 4. 局部和并行有限元方案

设  $\pi_H(\Omega)$  是  $\Omega$  的一个形正规格, 网格直径  $H \in (0,1)$ ,  $D \subset \Omega$  是包含奇点的一个子域, 并设  $\Omega_0$  是一个比  $D$  稍大的子域(即  $D \subset \subset \Omega_0$ )。令  $\pi_k(\Omega)$  是在  $\pi_H(\Omega)$  基础上加密得到的全局中网格,  $\pi_h(\Omega_0)$  是在  $\pi_k(\Omega)$  基础上通过局部加密得到的局部细网格, 网格直径满足  $h \ll k \ll H$ 。

##### 方案 1 (局部计算方案):

步骤 1 在全局粗网格  $\pi_H(\Omega)$  上解(2.3): 求  $\lambda_H \in \mathbb{R}$ ,  $u_H \in V_H(\Omega)$  使得  $|u_H|_{1,\Omega} = 1$  且

$$a(u_H, v) = \lambda_H b(u_H, v), \quad \forall v \in V_H(\Omega).$$

步骤 2 在全局中网格  $\pi_k(\Omega)$  上解线性边值问题: 求  $u^k \in V_k(\Omega)$  使得

$$a(u^k, v) = \lambda_H b(u_H, v), \quad \forall v \in V_k(\Omega).$$

步骤 3 在局部加密细网格  $\pi_h(\Omega_0)$  上解线性边值问题: 求  $e^h \in V_h^0(\Omega_0)$  使得

$$a(e^h, v) = \lambda_H b(u_H, v) - a(u^k, v), \quad \forall v \in V_h^0(\Omega_0).$$

步骤 4 令

$$u^{k,h} = \begin{cases} u^k + e^h & \text{on } \bar{\Omega}_0 \\ u^k & \text{in } \Omega \setminus \bar{\Omega}_0 \end{cases}$$

计算 Rayleigh 商

$$\lambda^{k,h} = \frac{a(u^{k,h}, u^{k,h})}{b(u^{k,h}, u^{k,h})}.$$

**定理 4.1** 设  $u^{k,h}$  是由方案 1 计算所得, 且  $R(\Omega_0)$  和 A(0)~A(3) 成立。若  $M(\lambda) \subset H^1(\Omega) \cap H^{m+\sigma}(\Omega) \cap H^{m+1}(\Omega \setminus \bar{D})$  ( $1 < m + \sigma$  且  $0 \leq \sigma < 1$ ), 则

$$|u - u^{k,h}|_{1,\Omega} \lesssim h^{m+\sigma-1} + k^m + H^{m+\sigma-1+\frac{r}{2}}, \quad (4.1)$$

$$|\lambda - \lambda^{k,h}| \lesssim h^{2m+2\sigma-2} + k^{2m} + H^{2m+2\sigma-2+r}. \quad (4.2)$$

证明: 令  $G \subset \Omega$  满足  $D \subset \subset G \subset \subset \Omega_0$ 。由于

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega} \leq |P_h u - u^{k,h}|_{1,D} + |P_h u - u^{k,h}|_{1,G \setminus \bar{D}} + |P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega \setminus \bar{G}},$$

下面逐一估计  $|P_h u - u^{k,h}|_{1,D}$ ,  $|P_h u - u^{k,h}|_{1,G \setminus \bar{D}}$  和  $|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega \setminus \bar{G}}$ 。为此, 取  $F \subset \Omega$  使得  $D \subset \subset F \subset \subset G \subset \subset \Omega_0$ 。

首先, 由于

$$a(P_h u - u^k, v) = \lambda b(u, v) - \lambda_H b(u_H, v) \quad \forall v \in V_k(\Omega)$$

及

$$\lambda b(u, v) - \lambda_H b(u_H, v) = (\lambda - \lambda_H) b(u, v) + \lambda_H b(u - u_H, v), \quad (4.3)$$



取  $v = P_k u - u^k$ ，则可推出

$$\|P_k u - u^k\|_{1,\Omega} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma}. \quad (4.4)$$

根据方案 1 步骤 3，有

$$a(u^{k,h} - P_h u, v) = \lambda_H b(u_H, v) - \lambda b(u, v), \quad \forall v \in V_h^0(\Omega_0). \quad (4.5)$$

令  $\mathcal{F}(v) = \lambda_H b(u_H, v) - \lambda b(u, v)$ ，则对任意  $v \in V_h^0(\Omega_0)$  有

$$|\mathcal{F}(v)| = |(\lambda_H - \lambda)b(u, v) + \lambda_H b(u_H - u, v)| \lesssim (|\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma}) |v|_{1,\Omega_0},$$

于是

$$\|\mathcal{F}\|_{-1,\Omega_0} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma},$$

从而，由(4.3)，(4.5)和引理 3.2 有

$$\|P_h u - u^{k,h}\|_{1,D} \lesssim \|P_h u - u^{k,h}\|_{0,\Omega_0} + |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma}. \quad (4.6)$$

因为

$$\begin{aligned} \|P_h u - u^{k,h}\|_{0,\Omega_0} &\lesssim \|P_h u - u^k\|_{0,\Omega_0} + \|e^h\|_{0,\Omega_0} \\ &\lesssim \|P_h u - P_k u\|_{0,\Omega_0} + \|P_k u - u^k\|_{0,\Omega_0} + \|e^h\|_{0,\Omega_0} \\ &\lesssim \|P_h u - P_k u\|_{0,\Omega_0} + \|P_k u - u^k\|_{1,\Omega} + \|e^h\|_{0,\Omega_0} \\ &\lesssim \|P_h u - P_k u\|_{0,\Omega_0} + \|P_k u - u^k\|_{1,\Omega} + \|e^h\|_{0,\Omega_0}, \end{aligned}$$

联系(4.4)和(4.6)，便得

$$\|P_h u - u^{k,h}\|_{1,D} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + \|P_h u - P_k u\|_{0,\Omega} + \|e^h\|_{0,\Omega_0}. \quad (4.7)$$

下面利用 Aubin-Nitsche 共轭论证估计  $\|e^h\|_{0,\Omega_0}$ 。对任意  $\phi \in L^2(\Omega_0)$ ，存在  $w \in H_\Gamma^1(\Omega_0)$  满足

$$a(v, w) = (\phi, v) \quad \forall v \in H_\Gamma^1(\Omega_0).$$

设  $w_h^0 \in V_h^0(\Omega_0)$  和  $w_H^0 \in V_H^0(\Omega_0)$  满足方程

$$\begin{aligned} a(v, w - w_h^0) &= 0 \quad \forall v \in V_h^0(\Omega_0), \\ a(v, w - w_H^0) &= 0 \quad \forall v \in V_H^0(\Omega_0). \end{aligned}$$

则可推出

$$\begin{aligned} (e^h, \phi) &= a(e^h, w) = a(e^h, w_h^0) = a(u^{k,h} - u^k, w_h^0) = a(P_h u - u^k + u^{k,h} - P_h u, w_h^0) \\ &= a(P_h u - u^k, w_h^0 - w) + a(P_h u - u^k, w) + \lambda_H b(u_H, w_h^0) - \lambda b(u, w_h^0) \\ &= a(P_h u - u^k, w_h^0 - w) + a(P_h u - u^k, w - w_H^0) + a(P_h u - u^k, w_H^0) + \lambda_H b(u_H, w_h^0) - \lambda b(u, w_h^0) \\ &= a(P_h u - u^k, w_h^0 - w) + a(P_h u - u^k, w - w_H^0) + (\lambda - \lambda_H) b(u, w_H^0) \\ &\quad + \lambda_H b(u - u_H, w_H^0) - (\lambda b(u, w_h^0) - \lambda_H b(u_H, w_h^0)) \\ &= a(P_h u - u^k, w_h^0 - w) + a(P_h u - u^k, w - w_H^0) + (\lambda - \lambda_H) b(u, w_H^0 - w_h^0) + \lambda_H b(u - u_H, w_H^0 - w_h^0). \end{aligned}$$

由有限元误差估计和局部正则性假设  $R(\Omega_0)$ ，有

$$|w_H^0 - w|_{1,\Omega_0} \lesssim H^r \|\phi\|_{0,\Omega_0}, \quad |w_h^0 - w|_{1,\Omega_0} \lesssim h^r \|\phi\|_{0,\Omega_0}.$$

于是, 对任意  $\phi \in L^2(\Omega)$  有

$$|(e^h, \phi)| \lesssim \left( H^r |P_h u - u^k|_{1,\Omega} + |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} \right) \|\phi\|_{0,\Omega_0},$$

由此得

$$\|e^h\|_{0,\Omega_0} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + H^r |P_h u - u^k|_{1,\Omega}.$$

由(4.4)和三角不等式

$$|P_h u - u^k|_{1,\Omega} \lesssim |P_h u - P_k u|_{1,\Omega} + |P_k u - u^k|_{1,\Omega}$$

有

$$\|e^h\|_{0,\Omega_0} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + H^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega}. \quad (4.8)$$

利用 Aubin-Nitsche 共轭论证可得

$$\|P_h u - P_k u\|_{0,\Omega} \lesssim k^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega}.$$

将上述估计和(4.8)代入(4.7), 得

$$\begin{aligned} |P_h u - u^{k,h}|_{1,D} &\lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + H^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega} + k^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega} \\ &\lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + H^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

联系引理 2.1 和 2.3 便得

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,D} \lesssim H^{2(m+\sigma-1)} + H^{m+\sigma-1+\frac{r}{2}} + H^r k^{m+\sigma-1} \lesssim H^{m+\sigma-1+\frac{r}{2}}. \quad (4.9)$$

类似的, 由于  $(G \setminus \bar{D}) \subset \subset \Omega_0$ , 我们可以得到估计式

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,G \setminus \bar{D}} \lesssim H^{m+\sigma-1+\frac{r}{2}}. \quad (4.10)$$

下面估计  $|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega \setminus \bar{G}}$ . 由方案 1 可知

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} = |P_h u - u^k|_{1,\Omega \setminus \bar{\Omega}_0},$$

从而

$$\begin{aligned} |P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega \setminus \bar{G}} &\lesssim |P_h u - u^k|_{1,\Omega \setminus \bar{\Omega}_0} + |P_h u - u^k|_{1,\Omega_0 \setminus \bar{G}} + |e^h|_{1,\Omega_0 \setminus \bar{G}} \\ &\lesssim |P_h u - u^k|_{1,\Omega \setminus \bar{G}} + |e^h|_{1,\Omega_0 \setminus \bar{G}}, \end{aligned}$$

因此

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega \setminus \bar{G}} \lesssim |P_h u - u|_{1,\Omega \setminus \bar{G}} + |u - u^k|_{1,\Omega \setminus \bar{G}} + |e^h|_{1,\Omega_0 \setminus \bar{G}}. \quad (4.11)$$

经计算有

$$a(e^h, v) = \lambda_H b(u_H, v) - \lambda b(u, v) - a(u^k - u, v), \quad \forall v \in V_0^h(\Omega_0 \setminus \bar{F}). \quad (4.12)$$

取  $\mathcal{F}(v) = \lambda_H b(u_H, v) - \lambda b(u, v) - a(u^k - u, v)$ , 则可推出

$$\|\mathcal{F}\|_{-1,\Omega_0\setminus\bar{F}} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + |u^k - u|_{1,\Omega_0\setminus\bar{F}},$$

于是, 由(4.12)和引理 3.2 得

$$|e^h|_{1,\Omega_0\setminus\bar{G}} \lesssim \|e^h\|_{0,\Omega_0\setminus\bar{F}} + |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + |u^k - u|_{1,\Omega_0\setminus\bar{F}}, \quad (4.13)$$

从而

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega\setminus\bar{G}} \lesssim \|e^h\|_{0,\Omega_0} + |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + |u^k - u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}} + |P_h u - u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}}. \quad (4.14)$$

由(4.4)和三角不等式

$$|u^k - u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}} \lesssim |u - P_k u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}} + |P_k u - u^k|_{1,\Omega\setminus\bar{F}},$$

得

$$|u^k - u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}} \lesssim |u - P_k u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}} + |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma}.$$

于是, 将(4.8)代入(4.14)便得

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega\setminus\bar{G}} \lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + H^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega} + |u - P_h u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}} + |u - P_k u|_{1,\Omega\setminus\bar{F}}. \quad (4.15)$$

因为 $(\Omega \setminus \bar{F}) \subset\subset (\Omega \setminus \bar{D})$ , 由定理 3.2 有

$$\begin{aligned} |P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega\setminus\bar{G}} &\lesssim |\lambda - \lambda_H| + \|u - u_H\|_{0,\Gamma} + H^r |P_h u - P_k u|_{1,\Omega} + \inf_{v \in V_h(\Omega)} |u - v|_{1,\Omega\setminus\bar{D}} \\ &\quad + \|u - P_h u\|_{0,\Omega} + \inf_{v \in V_k(\Omega)} |u - v|_{1,\Omega\setminus\bar{D}} + \|u - P_k u\|_{0,\Omega}, \end{aligned}$$

则由引理 2.1 和 2.3 得

$$|P_h u - u^{k,h}|_{1,\Omega\setminus\bar{G}} \lesssim H^{m+\sigma-1+\frac{r}{2}} + k^m. \quad (4.16)$$

联系(4.16), (4.10), (4.9)和(2.10)便得(4.1).

利用引理 2.4, 并注意到(2.14), 便得(4.2)。证毕。

当孤立奇点个数大于 1 时, 可以设计局部计算方案 1 的并行版本。

## 5. 数值实验

本节将给出一些数值实验来展示局部和并行计算方案的效率。数值实验是在具有 2.6 GHz CPU 和 8 GB RAM 的 DESKTOP-81QI2IO PC 上, 在 MATLAB2015a 环境中借助软件包 IFEM (参见文献[22])进行的。我们在下述两个区域上计算(2.2)的近似特征值:

$\Omega_1$ : 方形腔 $(-4,4)^2$ , 中心有一个边长为 $2\sqrt{2}$ 的菱形管(见图 2);

$\Omega_2$ : 方形腔 $(-4,4)^2$ , 内部有两个边长为 2 的方形管(见图 4)。

对 $\Omega_1$ , 选取 $\Omega_1$ 中边长为 $2\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{2}$ 的菱形管之间的区域作为局部加密区域(见图 3)。对 $\Omega_2$ , 选取 $\Omega_4 = [(-3.5, -0.5) \times (-1.5, 1.5) / (-3, -1) \times (-1, 1)] \cup [(0.5, 3.5) \times (-1.5, 1.5) / (1, 3) \times (-1, 1)]$ 作为局部加密区域(见图 5)。我们用方案 1 分别计算 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 上的最小特征值的近似, 然后用并行计算方案分别计算 $\Omega_3$ 和 $\Omega_4$ 上的特征值的近似值。数值结果列在表 1~5 中, 表格中采用下述符号:

$N_H$ : 在粗网格 $\pi_H(\Omega)$ 上直接求解特征值问题的自由度;

$N_k$ : 在中网格 $\pi_k(\Omega)$ 上求解边值问题的自由度;

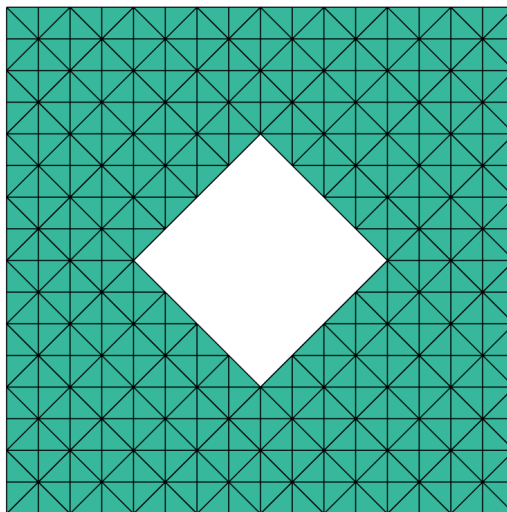
$N_h$ : 在局部细网格  $\pi_h(\Omega_0)$  上求解边值问题的自由度;

$\lambda_H$ : 通过方案 1 步骤 1 求得的近似特征值;

$\lambda^k = \frac{a(u^k, u^k)}{b(u^k, u^k)}$ , 其中  $u^k$  是由方案 1 步骤 2 求得的解;

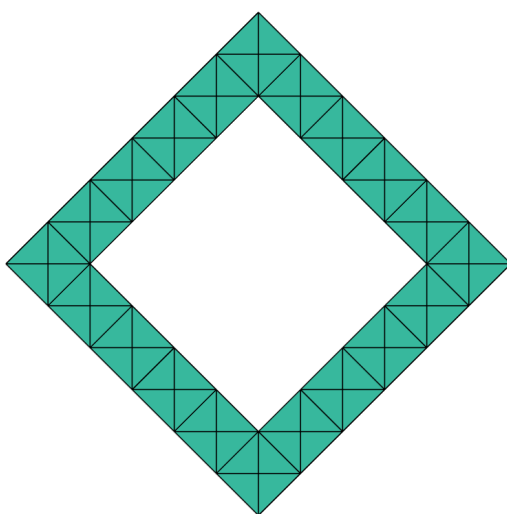
$\lambda^{k,h}$ : 由局部和并行计算方案求得的近似特征值。

文献[15]给出了问题(2.1)在区域  $\Omega_1$  上的最小特征值的参考值  $\lambda_1 \approx 0.07896$ , 其代数重数为 2。由表 1 可以看到, 利用局部计算方案 1 可以高效地计算出高精度的近似特征值。



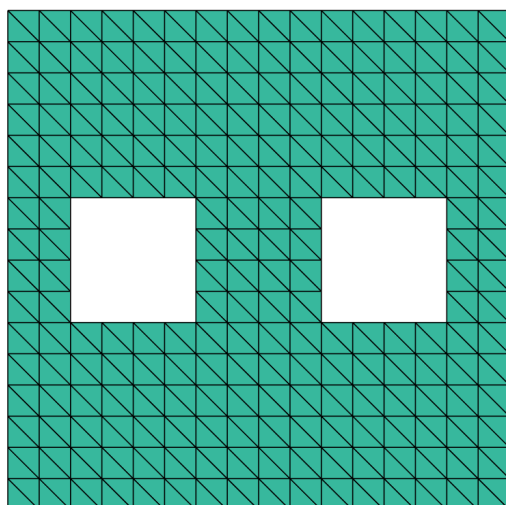
**Figure 2.**  $\Omega_1$ : a rhomboidal tube with edge side length  $2\sqrt{2}$  immersed in the square  $(-4,4)^2$

**图 2.**  $\Omega_1$ : 边长为  $2\sqrt{2}$  的菱形管浸没在方形腔  $(-4,4)^2$  中



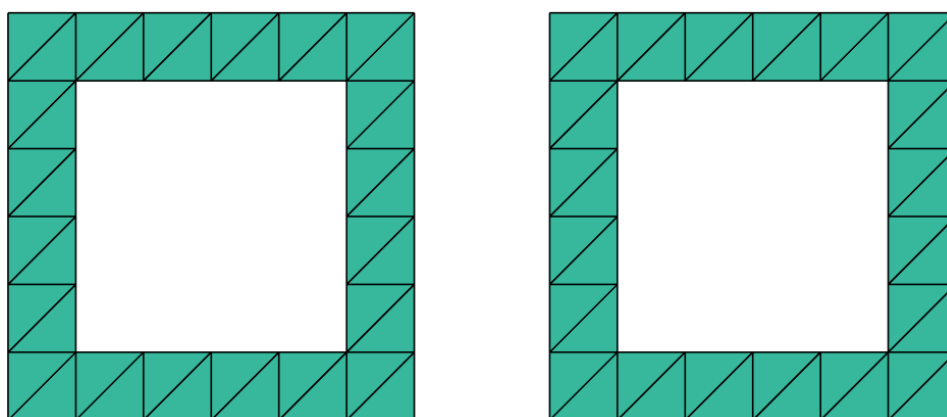
**Figure 3.**  $\Omega_3$ : local correction domain on  $\Omega_1$

**图 3.**  $\Omega_3$ : 在  $\Omega_1$  上的局部校正区域



**Figure 4.**  $\Omega_2$  : two square tubes with side length 2 immersed in a square cavity  $(-4,4)^2$

**图 4.**  $\Omega_2$  : 两个边长为 2 的方管浸没在方形腔  $(-4,4)^2$  中



**Figure 5.**  $\Omega_4$  : local correction domain on  $\Omega_2$

**图 5.**  $\Omega_4$  : 在  $\Omega_2$  上的局部校正区域

**Table 1.** The approximation of the smallest eigenvalue obtained by Scheme 1 on  $\Omega_1$

**表 1.** 由方案 1 求得的  $\Omega_1$  上最小特征值的近似值

$N_H$	$\lambda_H$	Time (s)	$N_k$	$\lambda^k$	Time (s)	$N_h$	$\lambda^{k,h}$	Time (s)
263	0.08668015	0.003877	3743	0.08009836	0.021036	2720	0.07961758	0.023424
975	0.08188310	0.007789	14,655	0.07940823	0.088040	10,560	0.07918671	0.077672
3743	0.08009836	0.023588	57,983	0.07913731	0.441871	41,600	0.07904224	0.372385
14,655	0.07940823	0.023588	230,655	0.07903030	2.187125	165,120	0.07899085	2.038742
57,983	0.07913731	2.473322	920,063	0.07898792	10.421100	657,920	0.07897184	11.05059
230,655	0.07903030	17.95245	3,675,135	0.07898792	359.00245	2,626,560	0.07896464	59.86877

**Table 2.** The approximation of the first eigenvalue on  $\Omega_2$  obtained by parallel scheme**表 2.** 由并行计算方案求得的  $\Omega_2$  上最小特征值的近似值

$N_H$	$\lambda_H$	Time (s)	$N_k$	$\lambda^k$	Time (s)	$N_h$	$\lambda^{k,h}$	Time (s)
270	0.14298801	0.00476	990	0.13200588	0.08260	800	0.13035699	0.08176
990	0.13197681	0.00877	3774	0.12776886	0.03125	2880	0.12671323	0.28809
3774	0.12776864	0.03339	14,718	0.12612674	0.14493	10,880	0.12561088	1.45685
14,718	0.12612138	0.30708	58,110	0.12547110	0.85073	42,240	0.12524546	6.36782
58,110	0.12546979	2.96287	230,910	0.12521146	5.59041	166,400	0.12511681	23.42462
230,910	0.12521113	28.17039	920,574	0.12510845	38.34539	660,480	0.12506963	122.21808

**Table 3.** The approximation of the second eigenvalue on  $\Omega_2$  obtained by parallel scheme**表 3.** 由并行计算方案求得的  $\Omega_2$  上第二个特征值的近似值

$N_H$	$\lambda_H$	Time (s)	$N_k$	$\lambda^k$	Time (s)	$N_h$	$\lambda^{k,h}$	Time (s)
270	0.17936173	0.00476	990	0.16440895	0.08260	800	0.16238148	0.08176
990	0.16438533	0.00877	3774	0.15877723	0.03125	2880	0.15739621	0.28809
3774	0.15877833	0.03339	14718	0.15659090	0.14493	10,880	0.15591577	1.45685
14,718	0.1565909	0.30708	58,110	0.15572512	0.85073	422,405	0.15542725	6.36782
58,110	0.15572513	2.96287	230,910	0.15538095	5.59041	166,400	0.15525541	23.42462
230,910	0.15538095	28.17039	920,574	0.15524403	38.34539	660,480	0.15519240	122.21808

**Table 4.** The approximation of the third eigenvalue on  $\Omega_2$  obtained by parallel scheme**表 4.** 由并行计算方案求得的  $\Omega_2$  上第三个特征值的近似值

$N_H$	$\lambda_H$	Time (s)	$N_k$	$\lambda^k$	Time (s)	$N_h$	$\lambda^{k,h}$	Time (s)
270	0.20838115	0.00476	990	0.19162497	0.08260	800	0.18954881	0.08176
990	0.19168744	0.00877	3774	0.18547488	0.03125	2880	0.18398973	0.28809
3774	0.18547966	0.03339	14,718	0.18307113	0.14493	10,880	0.18234059	1.45685
14,718	0.18307161	0.30708	58,110	0.18212220	0.85073	42,240	0.18179911	6.36782
58,110	0.18212231	2.96287	230,910	0.18174596	5.59041	166,400	0.18160963	23.42462
230,910	0.18174599	28.17039	920,574	0.18159655	38.34539	660,480	0.18154044	122.21808

**Table 5.** The approximation of the fourth eigenvalue on  $\Omega_2$  obtained by parallel scheme**表 5.** 由并行计算方案求得的  $\Omega_2$  上第四个特征值的近似值

$N_H$	$\lambda_H$	Time (s)	$N_k$	$\lambda^k$	Time (s)	$N_h$	$\lambda^{k,h}$	Time (s)
270	0.23836023	0.00476	990	0.21945546	0.08260	800	0.21712036	0.08176
990	0.21949337	0.00877	3774	0.21250795	0.03125	2880	0.21085307	0.28809
3774	0.21251320	0.03339	14,718	0.20977968	0.14493	10,880	0.20899700	1.45685
14,718	0.20981238	0.30708	58,110	0.20874109	0.85073	42,240	0.20838833	6.36782
58,110	0.20874912	2.96287	230,910	0.20832594	5.59041	166,400	0.20817563	23.42462
230,910	0.20832793	28.17039	920,574	0.20816026	38.34539	660,480	0.20809806	122.21808

## 参考文献

- [1] Xu, J.C. and Zhou, A.H. (2000) Local and Parallel Finite Element Algorithms Based on Two-Grid Discretizations. *Mathematics of Computation*, **69**, 881-909. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-99-01149-7>
- [2] He, Y.N., Xu, J.C. and Zhou, A.H. (2006) Local and Parallel Finite Element Algorithms for the Navier-Stokes Problem. *Journal of Computational Mathematics*, **24**, 227-238.
- [3] He, Y.N., Xu, J.C., Zhou, A.H. and Li, J. (2008) Local and Parallel Finite Element Algorithms for the Stokes Problem. *Numerische Mathematik*, **109**, 415-434. <https://doi.org/10.1007/s00211-008-0141-2>
- [4] Dai, X.Y. and Zhou, A.H. (2008) Three-Scale Finite Element Discretizations for Quantum Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **46**, 295-324. <https://doi.org/10.1137/06067780X>
- [5] Liu, Q. and Hou, Y. (2009) Local and Parallel Finite Element Algorithms for Time-Dependent Convection-Diffusion Equations. *Applied Mathematics and Mechanics (English Edition)*, **30**, 787-794. <https://doi.org/10.1007/s10483-009-0613-x>
- [6] Shang, Y.Q. and Wang, K. (2010) Local and Parallel Finite Element Algorithms Based on Two-Grid Discretizations for the Transient Stokes Equations. *Numerical Algorithms*, **54**, 195-218. <https://doi.org/10.1007/s11075-009-9330-z>
- [7] Xu, J.C. and Zhou, A.H. (2002) Local and Parallel Finite Element Algorithms for Eigenvalue Problems. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, **18**, 185-200. <https://doi.org/10.1007/s102550200018>
- [8] Bi, H., Yang, Y.D. and Li, H. (2013) Local and Parallel Finite Element Discretizations for Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **35**, A2575-A2597. <https://doi.org/10.1137/130911883>
- [9] Bi, H., Li, Z.X. and Yang, Y.D. (2016) Local and Parallel Finite Element Algorithms for the Steklov Eigenvalue Problem. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **32**, 399-417. <https://doi.org/10.1002/num.21998>
- [10] Bi, H., Zhang, Y. and Yang, Y.D. (2020) Two-Grid Discretizations and a Local Finite Element Scheme for a Non-Selfadjoint Stekloff Eigenvalue Problem. *Computers and Mathematics with Applications*, **79**, 1895-1913. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.047>
- [11] Bi, H., Han, J.Y. and Yang, Y.D. (2019) Local and Parallel Finite Element Algorithms for the Transmission Eigenvalue Problem. *Journal of Scientific Computing*, **78**, 351-375. <https://doi.org/10.1007/s10915-018-0770-2>
- [12] Conca, C., Osses, A. and Planchard, J. (1998) Asymptotic Analysis Relating Spectral Models in Fluid-Solid Vibrations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **35**, 1020-1048. <https://doi.org/10.1137/S0036142996304802>
- [13] Planchard, J. (1983) Eigenfrequencies of a Tube Bundle Placed in a Confined Fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **30**, 75-93. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(82\)90055-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(82)90055-X)
- [14] Planchard, J. and Ibnou-Zahir, M. (1983) Natural Frequencies of Tube Bundle in an Incompressible Fluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **41**, 47-68. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(83\)90052-X](https://doi.org/10.1016/0045-7825(83)90052-X)
- [15] Armentano, M.G., Padra, C., Rodríguez, R. and Scheble, M. (2011) An Hp Finite Element Adaptive Scheme to Solve the Laplace Model for Fluid-Solid Vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**, 178-188. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.08.003>
- [16] Zhang, Y. and Yang, Y. (2021) Guaranteed Lower Eigenvalue Bounds for Two Spectral Problems Arising in Fluid Mechanics. *Computers & Mathematics with Applications*, **90**, 66-72. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2021.03.005>
- [17] Babuška, I. and Osborn, J.E. (1991) Eigenvalue Problems. In: Ciarlet, P.G. and Lions, J.L., Eds., *Finite Element Methods (Part 1), Handbook of Numerical Analysis*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, Vol. 2, 640-787. [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80042-0](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80042-0)
- [18] Ciarlet, P.G. (1991) Basic Error Estimates for Elliptic Problems. In: Ciarlet, P. and Lions, J.-L., Eds., *Part 1. Finite Element Methods. Handbook of Numerical Analysis*, Vol. 2, Elsevier Science Publishers, North Holland, 21-343. [https://doi.org/10.1016/S1570-8659\(05\)80039-0](https://doi.org/10.1016/S1570-8659(05)80039-0)
- [19] Conca, C., Planchard, J. and Vanninathan, M. (1995) *Fluid and Periodic Structure*. Masson, Paris.
- [20] Grisvard, P. (1985) *Elliptic Problems in Nonsmooth Domain*. Pitman, Boston.
- [21] Bermdez, A., Rodríguez, R. and Santamarina, D. (2000) A Finite Element Solution of an Added Mass Formulation for Coupled Fluid-Solid Vibrations. *Numerische Mathematik*, **87**, 201-227. <https://doi.org/10.1007/s002110000175>
- [22] Chen, L. (2009) iFEM: An Integrated Finite Element Method Package in MAT-LAB. Technical Report, University of California, Irvine.