Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(1), 450-461
Published Online January 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.111053

Hans汉斯

一类各向异性非牛顿Boussinesq方程组弱解的存在性研究

王　爽，王长佳

长春理工大学数学与统计学院，吉林 长春

收稿日期：2021年12月26日；录用日期：2022年1月16日；发布日期：2022年1月28日

摘　要

本文拟在三维空间中讨论一类各向异性非牛顿Boussinesq方程组的初边值问题，通过结合使用Galerkin方法、紧性方法与单调性方法证明了该问题弱解的存在性。

关键词

各向异性，非牛顿流，Boussinesq方程组，弱解，存在性

On the Existence of Weak Solutions for a Class of Anisotropic Non-Newtonian Boussinesq Equations

Shuang Wang, Changjia Wang

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Technology, Changchun Jilin

Received: Dec. 26th, 2021; accepted: Jan. 16th, 2022; published: Jan. 28th, 2022

Abstract

In this paper, the initial boundary value problem for a class of anisotropic non-Newtonian Boussinesq equations is discussed in three-dimensional space. The existence of weak solutions of the problem is proved by using Galerkin method, compactness method and monotonicity method.

Keywords

Anisotropy, Non-Newtonian Flow, Boussinesq Equations, Weak Solution, Existence

文章引用: 王爽, 王长佳. 一类各向异性非牛顿 Boussinesq 方程组弱解的存在性研究[J]. 应用数学进展, 2022, 11(1): 450-461. DOI: 10.12677/aam.2022.111053

1. 引言

在三维空间中考虑下述一类各向异性非牛顿 Boussinesq 方程组的初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u-\sum_{i=1}^{N}D_i\left(\left|D_iu\right|^{q_i-2}D_iu\right)+\nabla\pi=f, & (x,t)\in Q_T, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t}+(u\cdot\nabla)\theta-\Delta\theta=g, & (x,t)\in Q_T, \\ div\ u=0, & (x,t)\in Q_T, \\ u=0,\quad \theta=0, & (x,t)\in\Gamma_T, \\ u|_{t=0}=u_0(x),\quad \theta|_{t=0}=\theta_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset R^3$ 为一边界足够光滑的有界区域，$Q_T=\Omega\times[0,T]$，$\Gamma_T=\partial\Omega\times[0,T]$。未知向量函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 表示流体的速度，$\theta=\theta(x,t)$ 表示温度，π 表示压力，$f=(f_1,f_2,f_3)$，$g=g(x)$ 为已给定的外力项，$D_iu=(\partial_iu_1,\partial_iu_2,\partial_iu_3)$。指数 q_i 为给定的常数，满足 $1<q_i<\infty$ $(i=1,2,3)$。

非牛顿流体广泛存在于我们的生产、生活和自然界中，因此越来越多不同领域的学者开始对其展开研究，以求对其有更深刻的了解与利用。在化工、石油、水利、生物工程以及食品材料甚至航空航天领域都对非牛顿流体有着极大的关注，我们主要通过对非牛顿流体方程的研究来增加对非牛顿流体的了解。

粘性导热流体在重力作用下的流动由动量守恒、质量守恒和能量守恒方程组描述(参见[1])，在忽略粘性的加热效应及应力张量与应变速率之间呈线性本构关系的假设下就得到一个粘性、不可压缩浮力驱动的流体流动与热对流耦合的运动模型，即所谓的牛顿型 Boussinesq 近似(参见[2]或[3])。上述模型在大气科学中具有重要作用[4]，同时也是许多地球物理应用中的模型[5]。其在预测观察到的现象中是非常成功的，少有近似模型能与之匹敌，其在天体物理与地球物理流体动力学领域有着重要的影响，基于此，数学上人们对上述模型开展了广泛的研究，取得了大量的研究成果。在该类模型中，若应力张量与应变速率之间显现出非线性关系，即得到所谓的非牛顿 Boussinesq 模型，目前关于这类模型的研究结果还不多。郭柏灵等在[6]中研究了一类修正的双极粘性流体模型，证明了其弱解的存在性和唯一性；随后他们又在[7]中研究了周期性边值问题，证明了其弱解的存在性，并在 $p>(1+2n)/(n+2)$ 时证明了唯一性及高阶正则性结果。文献[8]在三维空间中对周期初边值问题证明了强解的存在唯一性。文献[9]研究了一类稳态不可压缩的非牛顿 Boussinesq 方程组的第一初边值问题，在外力项的某一范数适当小的条件下，证明了方程组正则解的存在唯一性。本文拟在三维空间中讨论一类各向异性非牛顿 Boussinesq 方程组的初边值问题，通过结合使用 Galerkin 方法、紧性方法与单调性方法证明了该问题弱解的存在性。

2. 预备知识与主要结果

我们首先介绍本文用到的各向异性 Sobolev 空间的基本知识。令

$$\vec{q}=(q_1,\cdots,q_N),\ 1<q_i<\infty,\ i=1,2,\cdots,N,$$

定义

$$L^{\vec{q}}(\Omega)=\left\{u\middle|u\in L^{q_i}(\Omega),i=1,2,\cdots,N\right\},$$

$$W^{1,\vec{q}}(\Omega)=\left\{u \mid u\in W^{1,1}(\Omega), D_i u\in L^{q_i}(\Omega), i=1,2,\cdots,N\right\},$$

在其中分别赋予范数

$$\|u\|_{L^{\vec{q}}(\Omega)}=\sum_{i=1}^{N}\|u\|_{L^{q_i}(\Omega)},\ \|u\|_{W^{1,\vec{q}}(\Omega)}=\|u\|_{L^1(\Omega)}+\sum_{i=1}^{N}\|D_i u\|_{L^{q_i}(\Omega)},$$

所得的线性空间为完备的赋范线性空间，即 Banach 空间。

令

$$\beta=\max_{i=1,\cdots,N} q_i,\ \alpha=\min_{i=1,\cdots,N} q_i,$$

假设 q_i 满足

$$\alpha=q_1\le q_2\le\cdots\le q_N=\beta.$$

本文用到的引理如下：

引理 1 [10]令 $\Omega\subset R^N$ 为一边界充分光滑的有界开集，如果 $\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{q_j}>1$，则有以下嵌入关系成立

$$W^{1,\vec{q}}(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega),\ \forall s:1\le s\le q_a^*, \tag{2}$$

$$W^{1,\vec{q}}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^s(\Omega),\ \forall s:1\le s< q_a^*, \tag{3}$$

其中 $q_a^*=\max\left\{\bar{q}^*,\beta\right\}$， $\bar{q}^*=\dfrac{N}{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{q_j}-1}$。

注 1 由于引理 1，本文中总假设指标 $q_i\,(i=1,2,3)$ 满足条件 $\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}>1$。

引理 2 [11]对 $u,v,\omega\in H_0^1(\Omega)$，定义

$$b(u,v,\omega)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_i(x)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)\omega_j(x)\mathrm{d}x,$$

若 $div\,u=0$，则有

$$b(u,v,\omega)=-b(u,\omega,v),\ b(u,v,v)=0.$$

引理 3 [12]设 X,Y 为两个 Banach 空间，X 连续嵌入到 Y。倘若函数 $u\in L^\infty(0,T;X)$ 且 $u:[0,T]\to Y$ 是弱连续的，则 $u:[0,T]\to X$ 亦是弱连续的。

记 $\mathcal{V}=\left\{u \mid u\in C_0^\infty(\Omega), div\,u=0\right\}$，定义如下函数空间

$$H:=\mathcal{V}\text{ 在 }L^2(\Omega)\text{ 范数意义下的闭包；}$$

$$V_q:=\mathcal{V}\text{ 在 }W^{1,q}(\Omega)\text{ 范数意义下的闭包；}$$

$$V_{\vec{q}}:=\mathcal{V}\text{ 在 }W^{1,\vec{q}}(\Omega)\text{ 范数意义下的闭包；}$$

下面考虑抛物型各向异性空间。令

$$L^{\vec{q}}(0,T;V_{\vec{q}})=\left\{u:[0,T]\to V_{\vec{q}}, u, |D_i u|^{q_i}\in L^1(Q_T), i=1,\cdots,N\right\};$$

赋予范数

$$\|u\|_{L^{\vec{q}}(0,T;V_{\vec{q}})}=\|u\|_{L^1(Q_T)}+\sum_{i=1}^{N}\|D_i u\|_{L^{q_i}(Q_T)};$$

对于有界域Ω和有限 T，以下嵌入成立[13]

$$L^{\beta}\left(0,T;V_{\beta}\right)\hookrightarrow L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)\hookrightarrow L^{\alpha}\left(0,T;V_{\alpha}\right) \tag{4}$$

且作为$L^{\alpha}\left(0,T;V_{\alpha}\right)$的闭子空间，$L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$是自反的且是可分的，用$L^{q_i'}\left(0,T;V_{q_i}'\right)$和$L^{\bar{q}'}\left(0,T;V_{\bar{q}}'\right)$分别来表示$L^{q_i}\left(0,T;V_{q_i}\right)$和$L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$的对偶空间，其中$V_{q_i}'$和$V_{\bar{q}}'$表示$V_{q_i}$和$V_{\bar{q}}$的对偶空间。

下面给出问题(1)弱解的定义

定义 2.1 设 $f\in L^{\bar{q}'}\left(0,T;V_{\bar{q}}'\right)$，$g\in L^{2}\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$，$q_a^*\ge 2$，$\alpha\ge 2$，称$(u,\theta)$是问题(1)的弱解，如果

1) $u\in L^{\infty}\left(0,T;H\right)\bigcap L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$，$\theta\in L^{\infty}\left(0,T;L^{2}(\Omega)\right)\bigcap L^{2}\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$；

2) $u(0)=u_0$，$\theta(0)=\theta_0$；

3) 对$\forall\varphi\in V_{\bar{q}}\bigcap L^{\theta}(\Omega)$，$\phi\in L^{2}(\Omega)$以及 $a.e.\,t\in[0,T]$有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}u\varphi\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left[(u\cdot\nabla)u\right]\cdot\varphi\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left|D_iu\right|^{q_i-2}D_iu(t)\cdot D_i\varphi\mathrm{d}x=\int_{\Omega}f\varphi\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Omega}\theta\phi\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\left[(u\cdot\nabla)\theta\right]\cdot\phi\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\nabla\theta\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\int_{\Omega}g\cdot\phi\mathrm{d}x,$$

其中θ由关系式$\frac{1}{q_a^*}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\theta}=1$确定。

注 2 在上述弱解满足的等式中没有压力项π，事实上，如果 1) 2) 3) 成立，则利用 De Rham 定理[14]知，有函数$\pi\in L^{2}(\Omega)$在广义函数意义下满足上述积分等式。

注 3 定义中$u(0)=u_0$，$\theta(0)=\theta_0$在下述意义下成立

$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\Omega}u(t)\cdot\varphi\mathrm{d}x=\int_{\Omega}u_0\cdot\varphi\mathrm{d}x,\qquad\forall\varphi\in V_{\bar{q}}\bigcap L^{\theta}(\Omega),$$
$$\lim_{t\to 0^+}\int_{\Omega}\theta(t)\cdot\phi\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\theta_0\cdot\phi\mathrm{d}x,\qquad\forall\phi\in L^{2}(\Omega).$$

注 4 当$u\in L^{\infty}\left(0,T;H\right)\bigcap L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right)$时，为了使定义中对流项$\int_{\Omega}\left[(u\cdot\nabla)u\right]\varphi\mathrm{d}x$有意义，需要$\varphi\in L^{\theta}(\Omega)$[15]，但是若$\theta\le q_a^*$，则只需$\varphi\in V_{\bar{q}}$，因为此时嵌入$V_{\bar{q}}\hookrightarrow L^{\theta}(\Omega)$成立。

注 5 若记$V:=V_{\bar{q}}\bigcap L^{\theta}(\Omega)$，则当$q_a^*\ge 2$时，显然有下列嵌入关系成立

$$V\hookrightarrow V_{\bar{q}}\hookrightarrow H\cong H'\hookrightarrow V_{\bar{q}}'\hookrightarrow V'. \tag{5}$$

本文的主要结果如下：

定理 1 设$\Omega\subset R^3$为一边界充分光滑的有界域，$u_0\in H$，$\theta_0\in L^{2}(\Omega)$，$f\in L^{\bar{q}'}\left(0,T;V_{\bar{q}}'\right)$，$g\in L^{2}\left(0,T;H^{-1}\right)$。若$\alpha>2$，$q_a^*\ge q^*$，其中

$$q^*=\begin{cases}\dfrac{2\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+1)(\alpha-2)}, & 2<\alpha<3,\\[2mm] \dfrac{2\alpha}{\alpha-1}, & \alpha\ge 3,\end{cases} \tag{6}$$

则问题(1)至少存在一对弱解(u,θ)，满足

$$u\in C_W\left([0,T];H\right)\bigcap L^{\bar{q}}\left(0,T;V_{\bar{q}}\right),$$

$$\theta\in C_W\left([0,T];L^{2}(\Omega)\right)\bigcap L^{2}\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right).$$

其中$u\in C_W\left([0,T];X\right)$表示$u:[0,T]\to X$是弱连续的。

3. 定理 1 的证明

我们将通过以下几步进行定理的证明，

第一步：近似解的构造

定义空间 $\tilde{V} := \mathcal{V}$ 在 $W^{3,2}(\Omega)$ 中的闭包，设 $\{\varphi_r\}_{r\in N}$ 是如下特征值问题的一组非平凡解

$$\sum_{|k|=3}\left(D^k\varphi_r, D^k v\right) = \lambda_j\left(\varphi_j, v\right),\ \forall v\in\tilde{V}. \tag{7}$$

则 $\{\varphi_r\}_{r\in N}$ 构成空间 $\tilde{V}$ 的一组正交基[16]，且在 H 中是规范正交的；对给定的 $m\in N$，记 $V^m = span(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m)$ 为应由 $\{\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\}$ 张成的子空间；其次，取 Lamé 算子的特征函数族 $\{\phi_r\}_{r\in W}$ 为 $H_0^1(\Omega)$ 中的一组基，并记 $W^m = span\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m\}$ 为应由 $\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_m\}$ 张成的子空间。我们谋求问题(1)类似于以下结构的近似解

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^m c_k^m(t)\varphi_k(x),\quad u_{0m} = \sum_{k=1}^m c_k^m(0)\varphi_k(x),$$

$$\theta_m(x,t) = \sum_{r=1}^m h_r^m(t)\phi_r(x),\quad \theta_{0m} = \sum_{r=1}^m h_r^m(0)\phi_r(x),$$

其中对 $k=1,\cdots,m$， $r=1,\cdots,m$， (u_m,θ_m) 满足

$$\begin{cases}\int_\Omega \dfrac{\partial u_m}{\partial t}\cdot\varphi_k \mathrm{d}x + \int_\Omega\left[(u_m\cdot\nabla)u_m\right]\cdot\varphi_k\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^N\int_\Omega |D_i u_m|^{q_i-2}D_i u_m\cdot D_i\varphi_k\mathrm{d}x = \int_\Omega f\cdot\varphi_k\mathrm{d}x,\\ \int_\Omega \dfrac{\partial \theta_m}{\partial t}\cdot\phi_r \mathrm{d}x + \int_\Omega\left[(u_m\cdot\nabla)\theta_m\right]\cdot\phi_r\mathrm{d}x + \int_\Omega\nabla\theta_m\cdot\nabla\phi_r\mathrm{d}x = \int_\Omega g\cdot\phi_r\mathrm{d}x,\\ u_m(0) = u_{0m},\quad \theta_m(0) = \theta_{0m}\end{cases} \tag{8}$$

并且当 $m\to\infty$ 时

$$u_{0m}\to u_0 \text{ 于 } H;\quad \theta_{0m}\to\theta_0 \text{ 于 } L^2(\Omega). \tag{9}$$

由常微分方程组的相关知识[16] (定理 3.4)知，存在一区间 $[0,T_m]$， $0<T_m<T$，使(8) (9)存在古典意义下的解 $c_k^m(t), h_r^m(t)\in C^1[0,T_m]$， $k,r=1,\cdots,m$。结合接下来的一致估计和解的整体存在唯一性定理可得 $T_m = T$。

第二步：推导一致性先验估计

将等式$(8)_1$两端同时乘以 $c_k^m(t)$，再关于 k 求和，得

$$\int_\Omega\frac{\partial u_m}{\partial t}\cdot u_m\mathrm{d}x + \int_\Omega\left[(u_m\cdot\nabla)u_m\right]\cdot u_m\mathrm{d}x + \int_\Omega\sum_{i=1}^N|D_i u_m|^{q_i-2}D_i u_m\cdot D_i u_m\mathrm{d}x = \int_\Omega f\cdot u_m\mathrm{d}x,$$

将上式在 0 到 t， $t\in(0,T_m)$ 积分，可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u_m\|_H^2 + \sum_{i=1}^N\int_\Omega|D_i u_m|^{q_i}\mathrm{d}x + \sum_{i,j=1}^3\int_\Omega u_{m_i}\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x_i}u_{m_j}\mathrm{d}x = \int_\Omega f\cdot u_m\mathrm{d}x,$$

由引理 2 可知于

$$b(u,u,u) = \sum_{i,j=1}^3\int_\Omega u_{m_i}\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x_i}u_{m_j}\mathrm{d}x = 0\,,$$

所以由 Hölder 不等式以及 Young 不等式，可将上式整理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m\|_H^2+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega|D_iu_m|^{q_i}\,\mathrm{d}x=\int_\Omega f\cdot u_m\mathrm{d}x\le\|f\|_{L^{\vec{q}'}}\cdot\|u_m\|_{L^{\vec{q}}(\Omega)}$$
$$\le\frac{v_1}{2}\sum_{i=1}^{3}\|D_iu_m\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i}+Cv_1\sum_{i=1}^{3}\|D_if\|_{L^{q_i'}(\Omega)}^{q_i'}\tag{10}$$

同理将等式$(8)_2$两端同时乘以$h_r^m(t)$，再关于r求和，得

$$\int_\Omega\frac{\partial\theta_m}{\partial t}\cdot\theta_m\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u_m\cdot\nabla)\theta_m\right]\cdot\theta_m\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla\theta_m\cdot\nabla\theta_m\mathrm{d}x=\int_\Omega g\cdot\theta_m\mathrm{d}x.$$

将上式在 0 到 t，$t\in(0,T_m)$积分可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2+\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_{m_i}\frac{\partial\theta_{m_j}}{\partial x_i}\theta_{m_j}\mathrm{d}x=\int_\Omega g\cdot\theta_m\mathrm{d}x,$$

由引理 2 可知

$$b(u,\theta,\theta)=\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega u_{m_i}\frac{\partial\theta_{m_j}}{\partial x_i}\theta_{m_j}\mathrm{d}x=0,$$

所以由 Hölder 不等式以及 Young 不等式，可将上式整理得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2+\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2=\int_\Omega g\cdot\theta_m\mathrm{d}x$$
$$\le\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}\cdot\|\theta_m\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$
$$\le C\|g\|_{H^{-1}}\cdot\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}\tag{11}$$
$$\le\frac{v_2}{2}\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2+Cv_2\|g\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

将(10)式和(11)式相加，整理得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u_m\|_H^2+\|\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega|D_iu_m|^{q_i}\,\mathrm{d}x+v_2\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2$$
$$\le(v_1+v_2)\left(\|u_m\|_H^2+\|\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+(Cv_1+Cv_2)\left(\|D_if\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i'}+\|g\|_{H^{-1}}^2\right),\tag{12}$$

将(12)式在$(0,t),(0\le t\le T)$上积分可得

$$\left(\|u_m(t)\|_H^2+\|\theta_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\sum_{i=1}^{N}\|D_iu_m\|_{L^{q_i}(0,t;L^{q_i}(\Omega))}^{q_i}+v_2\int_0^t\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s$$
$$\le\|u_m(0)\|_H^2+\|\theta_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+C\int_0^t\left(\|u_m(s)\|_H^2+\|\theta_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s$$
$$+(Cv_1+Cv_2)\left(\sum_{i=1}^{3}\|D_if\|_{L^{q_i}(Q_t)}^{q_i'}+\|g\|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))}^2\right)$$
$$\le\|u_m(0)\|_H^2+\|\theta_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2+C\int_0^t\left(\|u_m(s)\|_H^2+\|\theta_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s\tag{13}$$
$$+(Cv_1+Cv_2)\left(\sum_{i=1}^{3}\|D_if\|_{L^{q_i}(Q_T)}^{q_i'}+\|g\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2\right)$$
$$\le C_1+C\int_0^t\left(\|u_m(s)\|_H^2+\|\theta_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\mathrm{d}s.$$

其中C_1,C是与m无关的常数，使用 Grownwall 不等式，设

$$y(t)=\|u_m(t)\|_H^2+\|\theta_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2,\quad g(s)=C,$$

则

$$\left\|u_m(t)\right\|_H^2+\left\|\theta_m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \le C\cdot \mathrm{e}^{\int_0^t C\mathrm{d}s}=C\cdot \mathrm{e}^{Ct}\le C\cdot \mathrm{e}^{CT}\le C(T). \tag{14}$$

进而利用(13)可得

$$\sup_{t\in(0,T)}\left(\left\|u_m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_m(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+\sum_{i=1}^N\left\|D_iu_m\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;L^{q_i}(\Omega)\right)}^{q_i}+\int_0^T\left\|\nabla\theta_m\right\|_{L^2(\Omega)}^2\mathrm{d}s\le C(T),$$

又对 $\forall\varphi\in L^{q_i}\left(0,T;V_{q_i}(\Omega)\right)$ 有

$$\begin{aligned}-\iint_{Q_T}D_i\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\iint_{Q_T}\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)\cdot D_i\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\iint_{Q_T}\left|D_iu_m\right|^{q_i-1}\cdot\left|D_i\varphi\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\int_0^T\left\|D_iu_m\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i-1}\left\|D_i\varphi\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}\mathrm{d}t\\&\le\left\|D_iu_m\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;L^{q_i}(\Omega)\right)}^{q_i-1}\left\|\varphi\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;V_{q_i}\right)},\end{aligned}$$

从而得到

$$\left\|D_i\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)\right\|_{L^{q_i'}\left(0,T;V_{q_i}'(\Omega)\right)}\le C. \tag{15}$$

下面推导 $\dfrac{\partial u_m}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial\theta_m}{\partial t}$ 的先验估计。

设 P_m 为 $V_{\vec{q}}$ 到 V^m 上的正交投影算子，即

$$P_mu=\sum_{j=1}^m\left(u,\varphi_j\right)\varphi_j,\quad \forall u\in V_{\vec{q}},$$

则 P_m 的伴随算子 $P_m^*:\tilde{V}'\to\tilde{V}'$，有 $P_m^*u_m'=u_m'$，且

$$\left\|P_m\right\|_{L\left(\tilde{V},\tilde{V}\right)}\le 1,\quad \left\|P_m^*\right\|_{L\left(\tilde{V}',\tilde{V}'\right)}\le 1.$$

重写等式 $(8)_1$ 如下

$$\frac{\partial u_m}{\partial t}=\sum_{i=1}^N P_m^*D_i\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)-P_m^*\left(u_m\cdot\nabla\right)u_m+P_m^*f, \tag{16}$$

设 $A_i\left(u_m\right)=D_i\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)$， $A\left(u_m\right)=\sum_{i=1}^N A_i\left(u_m\right)=\sum_{i=1}^N D_i\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)$，

对 $\forall\varphi\in L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)$，有

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T}P_m^*A\left(u_m\right)\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}t&=\iint_{Q_T}A\left(u_m\right)\cdot\left(P_m\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\&\le\sum_{i=1}^N\left|\iint_{Q_T}-D_i\left(\left|D_iu_m\right|^{q_i-2}D_iu_m\right)\cdot\left(P_m\varphi\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right|\\&\le\sum_{i=1}^N\int_0^T\left\|D_iu_m\right\|_{L^{q_i}(\Omega)}^{q_i-1}\cdot\left\|P_m\varphi\right\|_{V_{\vec{q}}}\mathrm{d}t\\&\le\sum_{i=1}^N\left\|D_iu_m\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;L^{q_i}(\Omega)\right)}^{q_i-1}\cdot\left\|\varphi\right\|_{L^{q_i}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)}\\&\le\left\|u_m\right\|_{L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)}^{\vec{q}-1}\cdot\left\|\varphi\right\|_{L^{\vec{q}}\left(0,T;V_{\vec{q}}\right)};\end{aligned} \tag{17}$$

对于 $-P_m^*(u_m\cdot\nabla)u_m$，利用引理 2 得

$$
\begin{aligned}
-\iint_{Q_T} P_m^*(u_m\cdot\nabla)u_m\cdot\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= -\iint_{Q_T}(u_m\cdot\nabla)u_m\cdot(P_m\varphi)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le \sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T}\left|u_{m_i}\frac{\partial u_{m_j}}{\partial x_i}\cdot P_m\varphi_j\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^{3}\iint_{Q_T}\left|u_{m_i}u_{m_j}\cdot\frac{\partial\left(P_m\varphi_j\right)}{\partial x_i}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le \int_0^T\|u_m\|_{L^{2\alpha'}(\Omega)}^2\left\|\nabla\left(P_m\varphi\right)\right\|_{L^{\alpha}(\Omega)}\mathrm{d}t,
\end{aligned}
$$

由于当 $q_a^*\ge 2\alpha'=\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}>2$ 时，利用引理 1，知 $V_{\bar q}\hookrightarrow L^{2\alpha'}(\Omega)$ 成立，由 α 的定义知 $V_{\bar q}\hookrightarrow V_\alpha$，从而有

$$
\begin{aligned}
-\iint_{Q_T} P_m^*(u_m\cdot\nabla)u_m\cdot\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\le C\int_0^T\|u_m\|_{V_{\bar q}}\|\varphi\|_{V_{\bar q}}\,\mathrm{d}t \\
&\le C\|u_m\|_{L^2(0,T;V_{\bar q})}\|\varphi\|_{L^2(0,T;V_{\bar q})} \\
&\le C\|u_m\|_{L^{\bar q}(0,T;V_{\bar q})}\|\varphi\|_{L^{\bar q}(0,T;V_{\bar q})};
\end{aligned}
\tag{18}
$$

对于 $\iint_{Q_T}P_m^*f\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，有

$$
\begin{aligned}
\iint_{Q_T}P_m^*f\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t &\le \iint_{Q_T}\left|f\cdot(P_m\phi)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le \|f\|_{L^{\bar q'}(0,T;V_{\bar q}')}\cdot\|\varphi\|_{L^{\bar q}(0,T;V_{\bar q})};
\end{aligned}
\tag{19}
$$

综合(17)~(19)，并利用(14) (15)得

$$
\frac{\partial u_m}{\partial t}\in L^{\bar q'}\left(0,T;V_{\bar q}'\right),
$$

由于 $L^{\bar q'}\left(0,T;V_{\bar q}'\right)\hookrightarrow L^{\beta'}\left(0,T;V_{\bar q}'\right)$，所以

$$
\frac{\partial u_m}{\partial t}\in L^{\beta'}\left(0,T;V_{\bar q}'\right).
\tag{20}
$$

同理，设 R_m 为 $H_0^1(\Omega)$ 到 W^m 上的正交投影算子，满足

$$
R_m\theta=\sum_{j=1}^{m}\left(\theta_m,\phi_j\right)\phi_j,\quad \forall\theta_m\in H_0^1(\Omega).
$$

对于 R_m 的伴随算子 $R_m^*:H^{-1}(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$，有

$$
R_m^*\theta_m'=\theta_m',
$$

且

$$
\|R_m\|_{L\left(H_0^1(\Omega),H_0^1(\Omega)\right)}\le 1,\quad \|R_m\|_{L\left(H^{-1}(\Omega),H^{-1}(\Omega)\right)}\le 1.
$$

重写等式$(8)_2$如下

$$
\frac{\partial\theta_m}{\partial t}=R_m^*\Delta\theta_m-R_m^*(u_m\cdot\nabla)\theta_m+R_m^*g,
\tag{21}
$$

对 $\forall\phi\in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$，有

$$\begin{aligned}\iint_{Q_T} R_m^*\Delta\theta_m\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \iint_{Q_T}\Delta\theta_m\cdot(R_m\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T\int_\Omega\left|\nabla\theta_m\cdot\nabla(R_m\phi)\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|\nabla(R_m\phi)\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T\|\nabla\theta_m\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t\\ &\le C\int_0^T\|\theta_m\|_{H_0^1(\Omega)}\cdot\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}\\ &\le C\|\theta_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\cdot\|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\end{aligned} \tag{22}$$

对于 $-\iint_{Q_T} R_m^*(u_m\cdot\nabla)\theta_m\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，有

$$\begin{aligned}-\iint_{Q_T} R_m^*(u_m\cdot\nabla)\theta_m\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= -\iint_{Q_T}(u_m\cdot\nabla)\theta_m\cdot(R_m\phi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= -\sum_{i,j=1}^3\iint_{Q_T}u_{m_i}\frac{\partial\theta_{m_j}}{\partial x_i}R_m\phi_j\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i,j=1}^3\iint_{Q_T}u_{m_i}\theta_{m_j}\frac{\partial(R_m\phi_j)}{\partial x_i}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T\|u_m\|_{L^2(\Omega)}\|\theta_m\|_{L^3(\Omega)}\|\nabla R_m\phi\|_{L^6(\Omega)}\mathrm{d}t\\ &\le \int_0^T\|u_m\|_{L^2(\Omega)}\|\theta_m\|_{L^3(\Omega)}\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t\\ &\le C\|u_m\|_{L^4(0,T;L^2(\Omega))}\|\theta_m\|_{L^4(0,T;L^3(\Omega))}\|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},\end{aligned}$$

由(14)知 $\theta_m\in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$，从而知[17] (引理 2.3.3) $\theta_m\in L^4(0,T;L^3(\Omega))$，可得

$$-\iint_{Q_T} R_m^*(u_m\cdot\nabla)\theta_m\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}; \tag{23}$$

对于 $\iint_{Q_T} R_m^*g\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，有

$$\iint_{Q_T} R_m^*g\cdot\phi\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\iint_{Q_T}|gR_m\phi|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\|g\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\cdot\|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}; \tag{24}$$

综合(22)~(24)式并利用(14)得

$$\frac{\partial\theta_m}{\partial t}\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{25}$$

第三步：近似解的收敛与解的存在性证明

由(14) (15) (20) (25)可以得到下列收敛性

$$\begin{aligned}&u_m\rightharpoonup u\text{ 弱}*\text{收敛于 }L^\infty(0,T;H);\\ &u_m\rightharpoonup u\text{ 于 }L^{\bar q}(0,T;V_{\bar q});\\ &u_m'\rightharpoonup u'\text{ 于 }L^{\beta'}(0,T;V_{\bar q}');\\ &A(u_m)\rightharpoonup S\text{ 于 }L^{\bar q'}(0,T;V_{\bar q}');\\ &\theta_m\rightharpoonup\theta\text{ 于 }L^2(0,T;H_0^1(\Omega));\\ &\theta_m\rightharpoonup\theta\text{ 弱}*\text{收敛于 }L^\infty(0,T;L^2(\Omega));\\ &\theta_m'\rightharpoonup\theta'\text{ 于 }L^2(0,T;H^{-1}(\Omega));\end{aligned} \tag{26}$$

由于 $H\hookrightarrow V'_{\vec q}$ 是连续的，且当 $\alpha>2$ 时，$q_\alpha^*>2$ 恒成立，故 $V_{\vec q}\hookrightarrow\hookrightarrow H$，利用 Aubin-Lions 引理可得

$$u_m\to u \text{ 于 } L^\alpha(0,T;H); \tag{27}$$

利用(13)和(27)并利用插值定理可得

$$u_m\to u \text{ 于 } L^\alpha(0,T;H),\quad \forall\alpha\ge 1 \tag{28}$$

另一方面，由于 $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^2(\Omega)$，利用 Aubin-Lions 引理可得

$$\theta_m\to\theta \text{ 于 } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{29}$$

由于上述的收敛性，在$(8)_1$式中令 $m\to\infty$，可以得到

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\varphi_k\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u\cdot\nabla)u\right]\cdot\varphi_k\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^N\int_\Omega S_i\cdot D_i\varphi_k\mathrm{d}x=\int_\Omega f\cdot\varphi_k\mathrm{d}x \tag{30}$$

在$(8)_2$式中令 $m\to\infty$，可以得到

$$\int_\Omega\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot\phi_r\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u\cdot\nabla)\theta\right]\cdot\phi_r\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\phi_r\mathrm{d}x=\int_\Omega g\cdot\phi_r\mathrm{d}x \tag{31}$$

当 $\varphi\in V_{\vec q}$，$u\in L^\infty(0,T;H)\cap L^{\vec q}\left(0,T;V_{\vec q}\right)$ 时，有

$$\int_\Omega\left[(u\cdot\nabla)u\right]\varphi\mathrm{d}x=-\int_\Omega u(t)\otimes u:\nabla\varphi\mathrm{d}x\le\|u\|^2_{L^{2\alpha'}(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^\alpha(\Omega)},$$

因为 $q_\alpha^*\ge\dfrac{2\alpha}{\alpha-1}$，嵌入 $V_{\vec q}\hookrightarrow V_\alpha$ 成立，并利用引理 1 可得

$$\int_\Omega\left[(u\cdot\nabla)u\right]\varphi\mathrm{d}x\le\|u\|^2_{V_{\vec q}}\|\nabla\varphi\|_{V_{\vec q}}.$$

由于 $\tilde V=\bigcup_{m=1}^\infty V^m$ 以及 $\tilde V$ 在 $V_{\vec q}$ 中的稠密性可知对 $\forall\varphi\in V_{\vec q}$，$\phi\in L^2(\Omega)$ 均有

$$\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\varphi\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u\cdot\nabla)u\right]\cdot\varphi\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^N\int_\Omega S_i\cdot D_i\varphi\mathrm{d}x=\int_\Omega f\cdot\varphi\mathrm{d}x, \tag{32}$$

$$\int_\Omega\frac{\partial\theta}{\partial t}\cdot\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\left[(u\cdot\nabla)\theta\right]\cdot\phi\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla\theta\cdot\nabla\phi\mathrm{d}x=\int_\Omega g\cdot\phi\mathrm{d}x, \tag{33}$$

利用(32) (33)可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}\in L^1(0,T;V'),\quad\frac{\partial\theta}{\partial t}\in L^1\left(0,T;H^{-1}\right),$$

所以 $u:[0,T]\to V'$，$\theta:[0,T]\to H^{-1}$ 是几乎处处绝对连续的。又因为 $u\in L^\infty(0,T;H)$，$\theta\in L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ 以及 $H\hookrightarrow V'$，$L^2(\Omega)\hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$，并利用引理 3 可得 $u\in C_W([0,T];H)$，$\theta\in C_W\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$。

为完成定理证明，只需证明

$$A_i(u)=S_i,\ A(u)=\sum_{i=1}^N A_i(u)=S. \tag{34}$$

由于对 $\forall\xi,\eta\in L^{\vec q}\left(0,T;V_{\vec q}\right)$，且 $\xi\ne\eta$ 有

$$\sum_{i=1}^N\left\langle|D_i\xi|^{q_i-2}D_i\xi-|D_i\eta|^{q_i-2}D_i\eta,D_i\xi-D_i\eta\right\rangle_{L^{q_i'}(Q_T)\times L^{q_i}(Q_T)}>0.$$

即 A_i,A 为单调算子，下面运用单调性方法来证明(34)。

首先要证明对 $\forall u,v \in L^{\infty}(0,T;H)\cap L^{\bar{q}'}(0,T;V'_{\bar{q}})$，有

$$\int_{\Omega}[(u\cdot\nabla)u]\cdot v\mathrm{d}x = -\int_{\Omega} u\otimes u : \nabla v\mathrm{d}x \in L^1(0,T). \tag{35}$$

通过 α 的定义并由引理 1 得

$$L^{\bar{q}}(0,T;V_{\bar{q}}) \hookrightarrow L^{\alpha}(0,T;V_{\bar{q}}) \hookrightarrow L^{\alpha}\left(0,T;L^{q_a^*}\right),$$

由插值公式有

$$L^{\bar{q}}(0,T;V_{\bar{q}})\cap L^{\infty}(0,T;H) \subset L^{\alpha}\left(0,T;L^{q_a^*}\right)\cap L^{\infty}\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \subset L^{\rho}(Q_T),$$

其中 $\rho = 2+\alpha-\dfrac{2\alpha}{q_a^*}$，当(6)成立时，通过计算可知 $\dfrac{2}{\rho}+\dfrac{1}{\rho}\le 1$，所以由 Hölder 不等式知(35)成立。

类似于文献[11]中的方法可得，对 $a.e.\ t\in(0,T)$，有

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t\int_{\Omega} S : u\mathrm{d}x\mathrm{d}s \ge \frac{1}{2}\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t\int_{\Omega} fu\mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{36}$$

可任取 $\varphi \in L^{\bar{q}}(0,T;V_{\bar{q}})$，设

$$X_{\mu} = \int_0^t\int_{\Omega}\left(A(u_{\mu})-A(\varphi):(u_{\mu}-\varphi)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|u_{\mu}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{37}$$

由 A 的单调性知

$$\liminf_{\mu\to\infty} X_{\mu} \ge \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{38}$$

由于$(8)_1$ 可知

$$X_{\mu} = \frac{1}{2}\|u_{\mu}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_0^t\int_{\Omega} A(u_{\mu}):\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_0^t\int_{\Omega} A(\varphi):(u_{\mu}-\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_{\Omega} fu_{\mu}\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$

其中令 $m\to\infty$，得

$$X = \frac{1}{2}\|u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \int_0^t\int_{\Omega} S:\varphi\mathrm{d}x\mathrm{d}s - \int_0^t\int_{\Omega} A(\varphi):(u-\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \int_0^t\int_{\Omega} fu\mathrm{d}x\mathrm{d}s,$$

综合(37) (38)可得

$$\int_0^t\int_{\Omega}\left(S-A(\varphi)\right):(u-\varphi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \ge 0,\quad a.e.\ t\in(0,T). \tag{39}$$

令 $\varphi = u-\lambda\omega$，$\lambda>0$，$\omega\in L^{\bar{q}}(0,T;V_{\bar{q}})$，代入到(39)式得

$$\int_0^t\int_{\Omega}\left(S-A(u-\lambda\omega),\omega\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \ge 0,$$

令 $\lambda\to 0$，取极限得

$$\int_0^t\int_{\Omega}\left(S-A(u)\omega\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \ge 0,\quad \forall\omega\in L^{\bar{q}}(0,T;V_{\bar{q}}),$$

所以

$$S = A(u),\quad a.e.\ (x,t)\in Q_T.$$

定理证得。

4. 总结

本文在三维空间中考虑一类各向异性非牛顿 Boussinesq 方程组的初边值问题，给出了证明解的存在

性的详细步骤，采用 Galerkin 方法构造近似解序列$\{u_m,\theta_m\}$，通过对近似解序列$\{u_m,\theta_m\}$进行一直估计以及收敛性的证明并利用单调性方法证明其解的存在性。

基金项目

吉林省教育厅“十三五”科学技术项目(批准号：JJKH20200727KJ)。

参考文献

[1] Batchelor, C.K. and Batchelor, G.K. (2000) An Introduction to Fluid Dynamics. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511800955

[2] Mihaljan, J.M. (1962) A Rigorous Exposition of the Boussinesq Approximations Applicable to a Thin Layer of Fluid. *The Astrophysical Journal*, **136**, 1126-1133. https://doi.org/10.1086/147463

[3] Rajagopal, K.R., Ruzicka, M. and Srinivasa, A.R. (1996) On the Oberbeck-Boussinesq Approximation. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **6**, 1157-1167. https://doi.org/10.1142/S0218202596000481

[4] Majda, A. (2003) Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean, Vol. 9, American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/cln/009

[5] Pedlosky, J. (1987) Geophysical Fluid Dynamics. Vol. 710, Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4650-3

[6] Boling, G. and Yadong, S. (2002) The Periodic Initial Value Problem and Initial Value Problem for the Modified Boussinesq Approximation. *Journal of Partial Differential Equations*, **15**, 57-71.

[7] Wei, L., Boling, G. and Yadong, S. (2003) The Periodic Initial Value Problem and Initial Value Problem for the Non-Newtonian Boussinesq Approximation. *Applicable Analysis*, **82**, 787-808. https://doi.org/10.1080/0003681031000160318

[8] Wang, C. and Dai, Q. (2016) Local Well-Posedness for Boussinesq Approximation with Shear Dependent Viscosities in 3D. *Computers & Mathematics with Applications*, **72**, 131-146. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.04.050

[9] 杨惠，王长佳. 一类稳态不可压非牛顿 Boussinesq 方程组解的存在唯一性[J]. 吉林大学学报：理学版，2019, 57(4): 753-761.

[10] Fragalà, I., Gazzola, F. and Kawohl, B. (2004, September) Existence and Nonexistence Results for Anisotropic Quasilinear Elliptic Equations. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*C*) *Non Linear Analysis*, **21**, 715-734. https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2003.12.001

[11] Lions, J.L. (1969). Quelquesméthodes de résolution de problemes aux limites non linéaires. Dunod, Paris.

[12] De Araujo, G.M., de Araújo, M.A.F. and Lucena, E.F.L. (2015) On a System of Equations of a Non-Newtonian Micropolar Fluid. *Journal of Applied Mathematics*, **2015**, Article ID: 481754. https://doi.org/10.1155/2015/481754

[13] Antontsev, S.N. and de Oliveira, H.B. (2016) Evolution Problems of Navier-Stokes Type with Anisotropic Diffusion. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas*, *Físicas y Naturales*. *Serie A*: *Matemáticas*, **110**, 729-754. https://doi.org/10.1007/s13398-015-0262-2

[14] Temam, R. (2001) *Navier-Stokes Equations*: *Theory and Numerical Analysis*. Vol. 343, American Mathematical Society, Providence. https://doi.org/10.1090/chel/343

[15] Antontsev, S.N. and de Oliveira, H.B. (2014) Analysis of the Existence for the Steady Navier-Stokes Equations with Anisotropic Diffusion. *Advances in Differential Equations*, **19**, 441-472.

[16] Málek, J., Nečas, J., Rokyta, M. and Růžička, M. (2019) Weak and Measure-Valued Solutions to Evolutionary PDEs. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton. https://doi.org/10.1201/9780367810771

[17] Lukaszewicz, G. (1999) Micropolar Fluids: Theory and Applications. Springer Science & Business Media, Berlin, Heidelberg.