

限制下降对 Quasi-Stirling 排列多项式的局部 γ -正性

朱 雪, 黄运威

浙江师范大学数学系, 浙江 金华

收稿日期: 2021 年 12 月 13 日; 录用日期: 2022 年 1 月 3 日; 发布日期: 2022 年 1 月 18 日

摘 要

具有 γ -正性的多项式在组合学中是一类重要的研究对象, 其不仅蕴含了单峰性以及对称性, 它的实根性在代数组合学中也有深远的研究意义。本文证明了仅包含 (偶, 偶) - 下降对的 quasi-Stirling 排列上的一类三元多项式具有局部 γ -正性, 并给出局部 γ -系数的组合解释, 从而推广了 Eu 等人关于普通排列的相关结果。

关键词

Quasi-Stirling 排列, 限制下降对, 局部 γ -正性

Partial γ -Positivity for Quasi-Stirling Permutation with Restricted Descent Pair

Xue Zhu, Yunwei Huang

Department of Mathematics, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang

Received: Dec. 13th, 2021; accepted: Jan. 3rd, 2022; published: Jan. 18th, 2022

Abstract

Polynomials with γ -positivity are an important research object in combinatorics. They not only contain unimodality and symmetry, but also have far-reaching research significance in algebraic combinatorics. This paper proves that a class of ternary polynomials that quasi-Stirling permutation only contains (even, even)-decreasing pairs has local γ -positivity, and the combined explanation of local γ -coefficient is given, thus extending the related results of Eu on ordinary permutation.

Keywords

Quasi-Stirling Permutation, Restricted Descending Pair, Local γ -Positivity

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设一般多重集 $\mathcal{M} = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, n^{k_n}\}$, 其中 k_i 为数字 i 出现的次数, 且 $k_i \geq 1$. 记 \mathcal{M} 上的全体排列 $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_K$ ($K = k_1 + k_2 + \dots + k_n$) 构成的集合为 $\mathfrak{S}_{\mathcal{M}}$. 特别地, 当 $\mathcal{M} = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$ 时, 用 \mathfrak{S}_n 来表示. 若一个多重集 \mathcal{M} 上的排列 π 中不存在四个指标 $i < j < k < l$ 使得 $\pi_i = \pi_k, \pi_j = \pi_l, \pi_i \neq \pi_j$, 则称其为 *quasi-Stirling* 排列 [1]. 我们用 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}}$ 表示 \mathcal{M} 上全体 quasi-Stirling 排列构成的集合. 如 $\mathcal{M} = \{1^2, 2^2\}$, 则 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}} = \{1122, 2211, 1221, 2112\}$.

对于给定排列 π , 定义指标 i 为下降位 (上升位, 平原位, 双下降位), 若满足 $\pi_i > \pi_{i+1}$ ($\pi_i < \pi_{i+1}, \pi_i = \pi_{i+1}, \pi_{i-1} > \pi_i > \pi_{i+1}$), 其中 $i \in [K], \pi_0 = \pi_{K+1} = 0$. 记 π 的下降位 (上升位, 平原位, 双下降位) 的个数为 $\text{des}(\pi)$ ($\text{asc}(\pi), \text{plat}(\pi), \text{ddes}(\pi)$).

设 $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k$ 是一个度数为 n 的实系数单变量多项式, 若对于任意 $i = 0, 1, \dots, n$, 有 $f_i = f_{n-i}$, 则称 $f(x) = \sum_{k=0}^n f_k x^k$ 为回文的. 对于非负系数回文多项式 $f(x)$, 我们称其具有 γ -正性, 如果其具有如下展式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_k x^k (1+x)^{n-2k},$$

其中 $\gamma_k \geq 0$. 一个二元多项式 $g(x, y)$ 称其具有齐次 γ -正性, 若其可以展开为:

$$g(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_k (xy)^k (x+y)^{n-2k},$$

其中 $\gamma_k \geq 0$. 称一个三元多项式 $p(x, y, z) = \sum_i s_i(x, y)z^i$ 具有局部 γ -正性, 如果每一个 $s_i(x, y)$ 都具有齐次 γ -正性. 关于 γ -正性的一个经典的结论是 Foata 和 Schützenberger [2] 给出的欧拉多项式具有 γ -正性. 受 Eu 等人 [3] 给出 $[n]$ 上限制下降对排列的 γ -正性研究的启发, 本文将其结论推广至一般多重集上的 quasi-Stirling 排列.

2. Quasi-Stirling 排列对应的标号树

Yan 等人 [4] 引入了一类新的有序标号树, 并建立了标号树与 quasi-Stirling 排列之间的双射 ϕ . 这样的标号树满足如下要求:

1. 树上的顶点标号取自于 $\{0\} \cup \mathcal{M}$;
2. 根节点标为 0;
3. 定义点 v 到根节点的距离为点 v 的层数. 对于一个奇数层标号为 i 的顶点 v , 其恰好有 $k_i - 1$ 个孩子, 并且每个孩子标号与 v 相同.

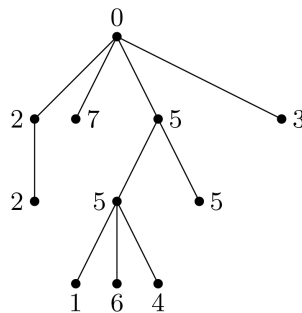


Figure 1. Labeled tree $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ where $\mathcal{M} = \{1, 2^2, 3, 4, 5^3, 6, 7\}$

图 1. 标号树 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 其中 $\mathcal{M} = \{1, 2^2, 3, 4, 5^3, 6, 7\}$

设 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 为满足上述条件的有序标号树的集合. 图 1 是一棵有序标号树 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 其中 $\mathcal{M} = \{1, 2^2, 3, 4, 5^3, 6, 7\}$.

对于排列 π , 它的最左端 (最右端) 用 $\text{first}(\pi)$ ($\text{last}(\pi)$) 表示. 类似地, 对于一个标号树 T , 我们用 $\text{first}(T)$ ($\text{last}(T)$) 表示根的最左端 (最右端) 的孩子. 下面我们来介绍这个双射 ϕ . 如果 T 仅有一个顶点, 令 $\phi(T) = \epsilon$, 其中 ϵ 表示空排列. 否则, 假设 $\text{first}(T) = r$.

1. 当根的最左端孩子为叶子时. 设 T_0 为将 T 去除掉以它的最左端孩子为根的子树所得到的树. 定义 $\phi(T) = r\phi(T_0)$.

2. 当根的最左端孩子有 k 个孩子. 对于 $1 \leq i \leq k$, 设 T_i 为根的最左端孩子的第 i 个孩子为根的子树. 用 T'_i 表示将 T_i 的根标号为 0 所得到的树. 设 T_0 为将 T 去除掉所有的子树 T_1, T_2, \dots, T_k 以及所有标号为 r 的顶点和关联的边所得到的树. 定义 $\phi(T) = r\phi(T'_1)r\phi(T'_2)\dots r\phi(T'_k)r\phi(T_0)$.

例如, 对于图 1 的树 T , 有 $\phi(T) = 2275164553$.

对于一个排列 $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_K$, 令 $\pi_{K+1} = \pi_1, \pi_0 = \pi_K$. 定义 π_i 为 π 的循环下降 (循环上升, 循环平原, 双循环下降, 双循环上升, 循环峰, 循环谷), 若满足 $\pi_i > \pi_{i+1}$ ($\pi_i < \pi_{i+1}, \pi_{i-1} > \pi_i > \pi_{i+1}, \pi_{i-1} < \pi_i < \pi_{i+1}, \pi_{i-1} < \pi_i > \pi_{i+1}, \pi_{i-1} > \pi_i < \pi_{i+1}$), 其中 $i \in [K]$. 记 π 上循环下降 (循环上升, 双循环下降, 双循环上升, 循环峰, 循环谷) 的个数为 $\text{cdes}(\pi)$ ($\text{casc}(\pi), \text{dcdes}(\pi), \text{dcasc}(\pi), \text{cpeak}(\pi), \text{cval}(\pi)$). 记 π 中循环下降构成的集合为 $\text{CDES}(\pi)$.

对于标号树 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 设 T 的一个顶点 u 标号为 v_0 , 假设点 u 的孩子标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l . 点 u 的循环下降数 $\text{cdes}(u)$ (循环上升数 $\text{casc}(u)$) 定义为 $\text{cdes}(v_0v_1v_2\dots v_l)$ ($\text{casc}(v_0v_1v_2\dots v_l)$). 树 T 的循环下降数以及循环上升数分别定义为 $\text{cdes}(T) := \sum_{u \in V(T)} \text{cdes}(u)$, $\text{casc}(T) := \sum_{u \in V(T)} \text{casc}(u)$, 其中 $V(T)$ 表示 T 的点集.

设点 u 为树 T 的奇数层顶点, 它的父节点 v 的标号为 v_0 . 设点 v 的孩子的标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l , u 的标号为 v_i . 该奇数层顶点 u 是树 T 的一个双循环下降点 (双循环上升点, 循环峰点, 循环谷点), 若 v_i 为序列 $v_0v_1v_2\dots v_l$ 的双循环下降 (双循环上升, 循环峰, 循环谷).

设标号为 v_0 的点 u 为树 T 的偶数层顶点, 它的孩子标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l . 点 u 是树 T 的一个双循环下降点 (双循环上升点, 循环峰点, 循环谷点), 若 v_0 为序列 $v_0v_1v_2\dots v_l$ 的双循环下降 (双循环上升, 循环峰, 循环谷). 分别用 $\text{dcdes}(T)$ ($\text{dasc}(T), \text{cpeak}(T), \text{cval}(T)$) 来表示树 T 的双循环下降点 (双循环上升点, 循环峰点, 循环谷点) 的数目, 并用 $\text{eleaf}(T)$ 表示偶层叶子数, 用 $\text{eeleaf}(T)$ 表示偶数层偶叶子数. 若 u 为 T 的双循环上升点, 且 u 的标号为偶数, 则记这样的点的个数为 $\text{ecdasc}(T)$.

如图 1, $\text{cdes}(T) = 5$, $\text{casc}(T) = 4$, $\text{dcdes}(T) = 2$, $\text{dcasc}(T) = 1$, $\text{dcpeak}(T) = 3$, $\text{cval}(T) = 3$, $\text{eleaf}(T) = 2$.

对于双射 ϕ , 我们有如下性质.

引理 2.1. [4] 对于非空多重集 \mathcal{M} , ϕ 为 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 与 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}}$ 之间的一个双射使得

$$(\text{cdes}, \text{first}, \text{last})T = (\text{des}, \text{first}, \text{last})\phi(T),$$

其中 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$.

对于两个不同的整数 $x, y \in \mathcal{M} \cup \{0\}$, 若存在一个标号为 v_0 的顶点 u , 且 u 的孩子的标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l , 使得 $x = v_i, y = v_{i+1}$, 其中 $0 \leq i \leq l, v_{l+1} = v_0$, 则称 (x, y) 为树 T 的一个相邻对. 类似地, 对于两个不同的整数 $x, y \in \mathcal{M} \cup \{0\}$, 若存在 $0 \leq i \leq l$ 使得 $x = \pi_i, y = \pi_{i+1}$, 则称 (x, y) 为 $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_K \in \overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}}$ 的一个相邻对, 其中 $\pi_0 = \pi_{K+1} = 0$. 对于排列 $\pi = \pi_1\pi_2\dots\pi_K$, 令 $\pi_0 = \pi_{K+1} = 0$, 若 $\pi_i > \pi_{i+1}$ ($\pi_i < \pi_{i+1}$), 则称相邻对 (π_i, π_{i+1}) 为下降对 (上升对). 当下降对 (π_i, π_{i+1}) 为 (偶数, 偶数) 时, 则称下降对 (π_i, π_{i+1}) 为 (偶, 偶) - 下降对. 记排列

π 的上升对 (π_i, π_{i+1}) 中 π_i 为偶数的个数为 $\text{easc}(\pi)$. 类似地, 对于标号树 T , 设顶点 u 的标号为 v_0 , 它的孩子的标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l , 设相邻对 (v_i, v_{i+1}) 中 v_i 为 $v_0v_1v_2 \dots v_l$ 的循环下降 (循环上升), 称相邻对 (v_i, v_{i+1}) 为循环下降对 (循环上升对). 当循环下降对 (v_i, v_{i+1}) 为 (偶数, 偶数) 时, 则称循环下降对 (v_i, v_{i+1}) 为 (偶, 偶) - 循环下降对. 记树 T 的循环上升对 (v_i, v_{i+1}) 中 v_i 为偶数的个数为 $\text{ecasc}(T)$.

引理 2.2. 对于非空多重集 \mathcal{M} , ϕ 为 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 与 $\overline{\mathcal{Q}}_{\mathcal{M}}$ 之间的一个双射使得对于任意的 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$, 有

$$(\text{cdes}, \text{ecasc}, \text{eeleaf}, \text{first}, \text{last})T = (\text{des}, \text{easc}, \text{eplat}, \text{first}, \text{last})\phi(T)$$

成立.

Proof. 由引理 2.1, 只需要证 $(\text{ecasc}, \text{eeleaf})T = (\text{easc}, \text{eplat})\phi(T)$. 我们将由多重集 \mathcal{M} 的基数归纳证明该结论. 假设 $\text{first}(T) = r$. 如果 $|\mathcal{M}| = 1$, 那么 T 由根 0 和它的孩子 r 组成. 由 ϕ 的构造, 我们有 $\phi(T) = r$. 于是容易知道 $\text{ecasc}(T) = \text{easc}(\phi(T)) = 1$, $\text{eeleaf}(T) = \text{eplat}(\phi(T)) = 0$. 假设对于任意的 $|\mathcal{M}'| < |\mathcal{M}|$ 以及 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}'}$, 都有 $(\text{ecasc}, \text{eeleaf})T = (\text{easc}, \text{eplat})\phi(T)$ 成立. 我们将证明对于任意 $T \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 有 $(\text{ecasc}, \text{eeleaf})T = (\text{easc}, \text{eplat})\phi(T)$.

1. 当根的最左端孩子为叶子时. 此时 $\phi(T) = r\phi(T_0)$. 若 r 为奇数, 由归纳知该结论成立. 若 r 为偶数, 容易有

$$\text{ecasc}(T) = \text{ecasc}(T_0) + \chi(r > \text{first}(T_0)).$$

这里 $\chi(S) = 1$, 如果声明 S 是对的, 否则 $\chi(S) = 0$. 由归纳假设, 我们有

$$\begin{aligned} \text{ecasc}(T) &= \text{ecasc}(T_0) + \chi(r > \text{first}(T_0)) \\ &= \text{easc}(\phi(T_0)) + \chi(r > \text{first}(\phi(T_0))) \\ &= \text{easc}(\phi(T)). \end{aligned}$$

同样, 我们有 $\text{eeleaf}(T) = \text{eeleaf}(T_0)$ 且 $\text{eplat}(\phi(T_0)) = \text{eplat}(\phi(T))$. 由归纳假设, 我们有 $\text{eeleaf}(T) = \text{eeleaf}(T_0) = \text{eplat}(\phi(T_0)) = \text{eplat}(\phi(T))$.

2. 当根的最左端孩子有 k 个孩子时. 于是我们有 $\phi(T) = r\phi(T'_1)r\phi(T'_2) \dots r\phi(T'_k)r\phi(T_0)$. 定义

$$\mathcal{I} = \{i \mid |T_i| > 1, 1 \leq i \leq k\},$$

其中 $|T_i|$ 表示 T_i 的顶点数. 若 r 为奇数, 则

$$\text{ecasc}(T) = \text{ecasc}(T_0) + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{ecasc}(T'_i) - 1 + \chi(r > \text{last}(T'_i), \text{last}(T'_i) \text{ 为偶数}),$$

$$\text{easc}(T) = \text{easc}(\phi(T_0)) + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{easc}(\phi(T'_i)) - 1 + \chi(r > \text{last}(\phi(T'_i)), \text{last}(\phi(T'_i)) \text{ 为偶数}).$$

由归纳假设, 有 $\text{ecasc}(T) = \text{easc}(\phi(T))$. 同样, 我们有

$$\text{eeleaf}(T) = \text{eeleaf}(T_0) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{eeleaf}(T'_i),$$

$$\text{eplat}(\phi(T)) = \text{eplat}(\phi(T_0)) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{eplat}(\phi(T'_i)).$$

再由归纳假设, 我们有 $\text{eeleaf}(T) = \text{eplat}(\phi(T))$. 若 r 为偶数,

(a) 当 $|T_0| > 1$ 时. 容易看出

$$\begin{aligned} \text{ecasc}(T) = & \text{ecasc}(T_0) + \chi(r < \text{first}(T_0)) + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{ecasc}(T'_i) - 1 + \chi(r < \text{first}(T'_i))) \\ & + \chi(r > \text{last}(T'_i), \text{last}(T'_i) \text{ 为偶数}), \end{aligned}$$

且 $\text{easc}(\phi(T))$ 可由

$$\begin{aligned} & \text{easc}(\phi(T_0)) + \chi(r < \text{first}(\phi(T_0))) \\ & + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{easc}(\phi(T'_i)) - 1 + \chi(r > \text{last}(\phi(T'_i))), \text{last}(\phi(T'_i)) \text{ 为偶数}) \end{aligned}$$

得到. 由归纳假设, 有 $\text{ecasc}(T) = \text{easc}(\phi(T))$. 同样, 我们有

$$\text{eeleaf}(T) = \text{eeleaf}(T_0) + |[k] \setminus \mathcal{I}| + \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{eeleaf}(T'_i),$$

$$\text{eplat}(\phi(T)) = \text{eplat}(\phi(T_0)) + |[k] \setminus \mathcal{I}| + \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{eplat}(\phi(T'_i)).$$

再由归纳假设, 我们有 $\text{eeleaf}(T) = \text{eplat}(\phi(T))$.

(b) 当 $|T_0| = 1$ 时. 容易看出

$$\text{ecasc}(T) = 1 + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{ecasc}(T'_i) - 1 + \chi(r < \text{first}(T'_i)) + \chi(r > \text{last}(T'_i), \text{last}(T'_i) \text{ 为偶数})),$$

且 $\text{easc}(\phi(T))$ 可由

$$1 + \sum_{i \in \mathcal{I}} (\text{easc}(\phi(T'_i)) - 1 + \chi(r < \text{first}(\phi(T'_i))) + \chi(r > \text{last}(\phi(T'_i))), \text{last}(\phi(T'_i)) \text{ 为偶数})$$

得到. 由归纳假设, 容易检验 $\text{ecasc}(T) = \text{easc}(\phi(T))$. 同样, 我们有

$$\text{eeleaf}(T) = |[k] \setminus \mathcal{I}| + \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{eeleaf}(T'_i),$$

$$\text{eplat}(\phi(T)) = |[k] \setminus \mathcal{I}| + \sum_{i \in \mathcal{I}} \text{eplat}(\phi(T'_i)).$$

再由归纳假设, 我们有 $\text{eeleaf}(T) = \text{eplat}(\phi(T))$.

从而完成了证明. □

引理 2.3. 对于任意的 $T \in \mathcal{T}_M$, T 仅包含 (偶, 偶) - 循环下降对当且仅当 $\phi(T)$ 仅包含 (偶, 偶) - 下降对.

Proof. 由 $\phi(T)$ 的构造以及引理 2.1 知, 对于任意两个不同的整数 $x, y \in \mathcal{M} \cup \{0\}$, 有序对 (x, y) 为 T 上的相邻对当且仅当 (x, y) 为 $\phi(T)$ 上的相邻对. 所以 (x, y) 为 T 上的 (偶, 偶) - 循环下降对当且仅当 (x, y) 为 $\phi(T)$ 上的 (偶, 偶) - 下降对. \square

3. 仅包含 (偶, 偶)-下降对 Quasi-Stirling 排列多项式的局部 γ -正性

Eu 等人证明了 $[n]$ 上仅包含 (偶, 偶) - 下降对的排列构成的排列集 \mathfrak{S}_{2n}^* 的下降数多项式具有 γ -正性, 并给出下面的展式:

定理 3.1. [3] 设排列 $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_{2n} \in \mathfrak{S}_{2n}^*$, \mathfrak{S}_{2n}^* 为仅包含 (偶, 偶) - 下降对排列构成的排列集, 令 $\pi_0 = \pi_{2n+1} = 0$, 则 \mathfrak{S}_{2n}^* 的下降数多项式具有如下展式:

$$\mathfrak{S}_{2n}^*(t) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}^*} t^{\text{des}(\pi)} = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \gamma_{n,i} t^i (1+t)^{n+1-2i},$$

其中 $\gamma_{n,i} = \#\{\pi \in \mathfrak{S}_{2n}^* : \text{des}(\pi) = i, \text{ddes}(\pi) = 0\}$.

Foata 等人 [2, 5] 在证明欧拉多项式的 γ -正性中运用群作用给出了一个有趣的组合证明. 借用在标号树上的 FS-作用, Yan 等人证明了 quasi-Stirling 排列集的三元多项式具有局部 γ -正性, 并给出其组合解释.

受 Yan 等人证明的启发, 本文将 Eu 的结果推广至 quasi-Stirling 排列, 并且考虑的是更一般的多重集上的情况. 设 $\overline{EQ}_{\mathcal{M}}$ 为仅包含 (偶, 偶) - 下降对的 quasi-Stirling 排列集, $\mathcal{ET}_{\mathcal{M}}$ 为 $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 当中仅包含 (偶, 偶) - 循环下降对的树的集合.

下面是本文主要结论:

定理 3.2. 设一般多重集 $\mathcal{M} = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, (2n)^{k_{2n}}\}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_{2n} = K$ 且 $k_2 + k_4 + \dots + k_{2n} = K_e$, 则三元多项式 $\overline{EQ}_{\mathcal{M}}(x, y, z)$ 有如下展式:

$$\overline{EQ}_{\mathcal{M}}(x, y, z) := \sum_{\pi \in \overline{EQ}_{\mathcal{M}}} x^{\text{easc}(\pi)} y^{\text{des}(\pi)} z^{\text{eplat}(\pi)} = \sum_{i=0}^{K_e-n} z^i \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{K_e+1-i}{2} \rfloor} \gamma_{\mathcal{M},i,j}^E (xy)^j (x+y)^{K_e+1-i-2j},$$

其中 $\gamma_{\mathcal{M},i,j}^E = \#\{T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M}} : \text{cdes}(T) = j, \text{eeleaf}(T) = i, \text{dcdes}(T) = 0\}$.

为证明定理 3.2, 本文需要用到 Lin 和 Yan [6] 引入的一个映射 φ . 若 x 为排列 π 的双循环下降位 (双循环上升位), 则 $\varphi_x(\pi)$ 为将 x 沿逆时针方向 (顺时针方向) 移到第一个比 x 的后面 (前面) 得到的新排列. 如图 2, $\pi = 154236$, 则 $\varphi_4(\pi) = 164325$.

事实上, 若 x 为偶数, 则 φ_x 作用在仅包含 (偶, 偶) - 下降对的 quasi-Stirling 排列后, (偶, 偶) - 下降对任为 (偶, 偶) - 下降对. 如图 3, e_1, e_2, e_3 均为偶数, e_2 为双循环下降. 容易看出, (e_1, e_2, e_3) 变换为 (e_1, e_3) , 变换后仍为 (偶, 偶) - 下降对, 此时 (x_1, x_2) 变换为 (x_1, e_2, x_2) . 同样, 若 u 为双循环上升, 同样变换后得到 (偶, 偶) - 下降对.

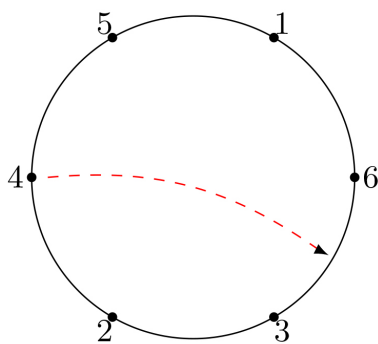


Figure 2. $\pi = 163245, \varphi_4(\pi) = 164325$

图 2. $\pi = 163245, \varphi_4(\pi) = 164325$

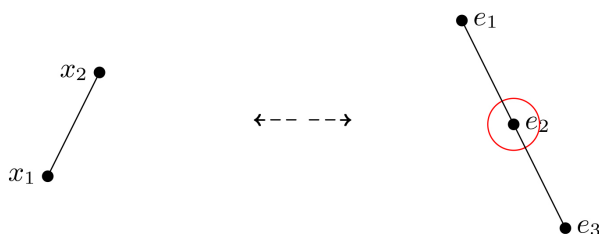


Figure 3. e_2 is a double cyclic descent

图 3. e_2 为双循环下降

定理 3.3. 设一般多重集 $\mathcal{M} = \{1^{k_1}, 2^{k_2}, \dots, (2n)^{k_{2n}}\}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_{2n} = K$ 且 $k_2 + k_4 + \dots + k_{2n} = K_e$, 则三元多项式 $\mathcal{ET}_{\mathcal{M}}(x, y, z)$ 有如下展式:

$$\mathcal{ET}_{\mathcal{M}}(x, y, z) := \sum_{T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M}}} x^{\text{ecasc}(T)} y^{\text{cdes}(T)} z^{\text{eeleaf}(T)} = \sum_{i=0}^{K_e-n} z^i \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{K_e+1-i}{2} \rfloor} \gamma_{\mathcal{M}, i, j}^E (xy)^j (x+y)^{K_e+1-i-2j},$$

其中 $\gamma_{\mathcal{M}, i, j}^E = \#\{T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M}} : \text{cdes}(T) = j, \text{eeleaf}(T) = i, \text{dcdes}(T) = 0\}$.

证明. 设 $T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M}}$, u 为 T 上一个顶点, 定义标号树 T 上的树 FS - 作用 ψ_u 如下:

1. 若 $u = 2m - 1$ ($m \in [n]$), 则 $\psi_u(T) = T$.
2. 若 $u = 2m$ ($m \in [n]$),
 - (a) 若 u 为偶层叶子, 循环峰或者循环谷, 则 $\psi_u(T) = T$.
 - (b) 若 u 为双循环上升点或双循环下降点,
 - i. 若 u 在奇数层, 它的父节点 v 标号为 v_0 . 设点 v 的孩子标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l , u 的标号为 v_t . 令 T_k 表示以标号为 v_k 的点为根的子树 ($1 \leq k \leq l$). $\psi_u(T)$ 为将子树 T_1, T_2, \dots, T_l 重排, 使其满足 $\text{CDES}(\varphi_{v_t}(v_0 v_1 v_2 \dots v_l)) = \text{CDES}(v_0 v'_1 v'_2 \dots v'_l)$, 其中 v'_1, v'_2, \dots, v'_l 依次为点 v 在 $\psi_u(T)$ 上从左到右孩子的标号, 如图 4.

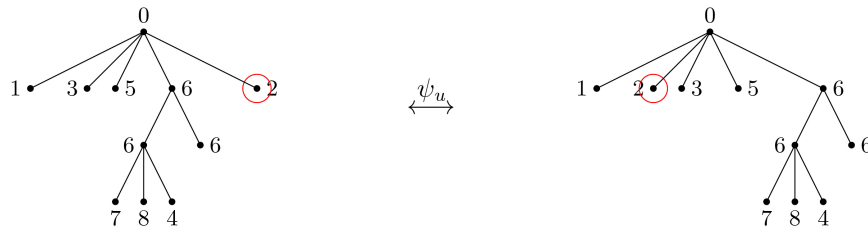


Figure 4. The action ψ_u where the vertex u is circled

图 4. 群作用 ψ_u , 其中 u 为圈出的点

- ii. 若 u 在偶数层, 它标号为 v_0 . 设点 u 的孩子标号从左到右依次为 v_1, v_2, \dots, v_l . 同样令 T_k 表示以标号为 v_k 的点为根的子树 ($1 \leq k \leq l$). $\psi_u(T)$ 为将子树 T_1, T_2, \dots, T_l 重排, 使其满足 $\text{CDES}(\varphi_{v_0}(v_0 v_1 v_2 \dots v_l)) = \text{CDES}(v_0 v'_1 v'_2 \dots v'_l)$, 其中 v'_1, v'_2, \dots, v'_l 依次为点 u 在 $\psi_u(T)$ 上从左到右孩子的标号, 如图 5.

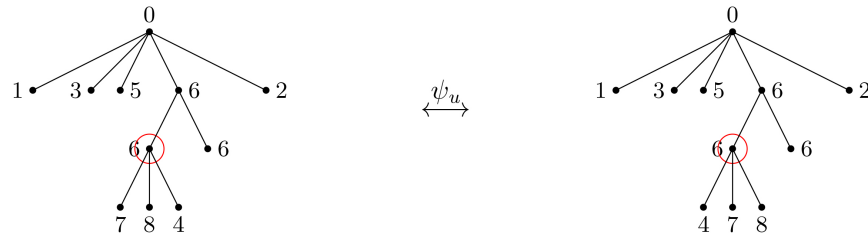


Figure 5. The action ψ_u where the vertex u is circled

图 5. 群作用 ψ_u , 其中 u 为圈出的点

显然 ψ_u 作用后, 树 T 的 (偶, 偶) - 循环下降对仍为 (偶, 偶) - 循环下降对.

由上面分析知, 树 FS - 作用 ψ_u 是对合, 并且显然它又是交换的. 因此, 对任意点集 $S \subseteq V(T)$, 定义 $\psi_S : \mathcal{ET}_{\mathcal{M}} \rightarrow \mathcal{ET}_{\mathcal{M}}$ 为 $\psi_S = \prod_{u \in S} \psi_u$, 其中乘积为映射的合成, 则群 \mathbb{Z}_2^{K+1} 通过 ψ_S 作用在 $\mathcal{ET}_{\mathcal{M}}$ 上. 因为在该群作用下, $\text{eeleaf}(T)$ 保持不变, 故对于 $\text{eeleaf}(T) = i$ 构成的集合 $\mathcal{ET}_{\mathcal{M},i}$, 其被划分为两两不交的轨道. 对于任一 $T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M},i}$, 令 $\text{Orb}(T) = \{g(T) : T \in \mathbb{Z}_2^{K+1}\}$ 表示树 T 在该群作用下的轨道. 注意到点 u 为 T 的双循环下降点当且仅当它为树 ψ_u 的双循环上升点. 那么存在唯一一个树 $\tilde{T} \in \text{Orb}(T)$ 有 $\text{dcdes}(\tilde{T}) = 0$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \text{Orb}(\tilde{T})} x^{\text{ecasc}(T)} y^{\text{cdes}(T)} &= x^{\text{cpeak}(\tilde{T})} y^{\text{cpeak}(\tilde{T})} (x + y)^{\text{edcasc}(\tilde{T})} \\ &= (xy)^{\text{cpeak}(\tilde{T})} (x + y)^{K_e + 1 - i - \text{cpeak}(\tilde{T}) - \text{cval}(\tilde{T})} \\ &= (xy)^{\text{cdes}(\tilde{T})} (x + y)^{K_e + 1 - i - 2\text{cdes}(\tilde{T})}. \end{aligned}$$

将 $\mathcal{ET}_{\mathcal{M},i}$ 的所有轨道相加, 有

$$\sum_{T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M},i}} x^{\text{ecasc}(T)} y^{\text{cdes}(T)} = \sum_{T \in \widetilde{\mathcal{ET}}_{\mathcal{M},i}} (xy)^{\text{cdes}(T)} (x + y)^{K+1-i-2\text{cdes}(T)},$$

其中 $\widetilde{\mathcal{ET}}_{\mathcal{M},i}$ 表示 $\mathcal{ET}_{\mathcal{M},i}$ 中满足 $\text{dcdes}(T) = 0$ 的标号树 T 构成的集合. 因此

$$\sum_{T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M}}} x^{\text{ecasc}(T)} y^{\text{cdes}(T)} z^{\text{eeleaf}(T)} = \sum_{i=0}^{K_e-n} z^i \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{K_e+1-i}{2} \rfloor} \gamma_{\mathcal{M},i,j}^E (xy)^j (x+y)^{K_e+1-i-2j},$$

其中 $\gamma_{\mathcal{M},i,j}^E = \#\{T \in \mathcal{ET}_{\mathcal{M}} : \text{cdes}(T) = j, \text{eeleaf}(T) = i, \text{dcdes}(T) = 0\}$. □

由引理 2.2 和 2.3 可得到定理 3.2 成立. 特别地, 当 $\mathcal{M} = [2n]$ 时, 此时 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{2n} = 1$, $K_e = n$, 可得定理 3.1 即 Eu 的结论成立.

参考文献

- [1] Archer, K., Gregory, A., Pennington, B. and Slayden, S. (2019) Pattern Restricted Quasi-Stirling Permutations. *Australasian Journal of Combinatorics*, **74**, 389-407.
- [2] Foata, D. and Schützenberger, M.-P. (1970) Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 138, Springer-Verlag, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/BFb0060799>
- [3] Eu, S., Fu, T., Lai, H. and Lo, Y. (2021) Gamma-Positivity for a Refinement of Median Genocchi Numbers. arXiv:2103.09130 [math.CO]
- [4] Yan, S.H.F. and Zhu, X. (2021) Quasi-Stirling Polynomials on Multisets. arXiv:2106.04347 [math.CO]
- [5] Foata, D. and Strehl, V. (1974) Rearrangements of the Symmetric Group and Enumerative Properties of the Tangent and Secant Numbers. *Mathematische Zeitschrift*, **137**, 257-264.
<https://doi.org/10.1007/BF01237393>
- [6] Lin, Z. and Yan, S.H.F. (2022) Cycles on a Multiset with Only Even-Odd Drops. *Discrete Mathematics*, **345**, Article ID: 112683. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2021.112683>