Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(2), 804-810
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.112085

Hans汉斯

关于奇圈稳定性问题的一个注记

袁小利，王　健

太原理工大学，数学学院，山西　太原

收稿日期：2022年1月16日；录用日期：2022年2月14日；发布日期：2022年2月21日

摘　要

令C_{2k-1}是含有$2k-1$个顶点的图，如果图G不包含图C_{2k-1}作为子图，那么称图G是C_{2k-1}禁止的。本文中，我们证明了对于任意一个n个顶点的图G，如果G是C_{2k-1}禁止的且$e(G)\geq\frac{1}{4}n^2-\delta n^2$，那么当$n$充分大时，图$G$至多删除$260\delta^2n^2$条边就可以变为一个二部图。

关键词

Turάn数，稳定性，奇圈

A Note on Stability of Odd Cycles

Xiaoli Yuan, Jian Wang

College of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan Shanxi

Received: Jan. 16th, 2022; accepted: Feb. 14th, 2022; published: Feb. 21st, 2022

Abstract

Let C_{2k-1} be a cycle of length $2k-1$. A graph G is called C_{2k-1}-free if G does not contain C_{2k-1} as a subgraph. In this paper, we show that if G is a C_{2k-1}-free graph on n vertices with $e(G)\geq\frac{1}{4}n^2-\delta n^2$ edges, then G can be made bipartite by deleting at most $260\delta^2n^2$ edges for n sufficiently large.

Keywords

Turάn Number, Stability, Odd Cycles

文章引用: 袁小利, 王健. 关于奇圈稳定性问题的一个注记[J]. 应用数学进展, 2022, 11(2): 804-810.
DOI: 10.12677/aam.2022.112085

1. 引言

给定两个简单图 G 和 F，如果图 G 不包含图 F 作为子图，那么称图 G 是 F 禁止的。令 $ex(n,F)$ 表示 n 个顶点的 F 禁止图 G 含有的最大边数。1941 年，Turάn [1]证明了 n 个顶点 K_{r+1} 禁止的图的最大边数为 Turάn 图的边数，Turάn 图是每个部集大小为 $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil$ 或 $\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$ 的平衡 r 部完全图，记为 $T_r(n)$，$e(T_r(n))=t_r(n)$。这一重要结论即为极值图论中著名的 Turάn 定理。在 Turάn 定理的基础上，Erdős [2]和 Simonovits [3]进一步证明了如果图 G 是 K_{r+1} 禁止的，且满足 $e(G)=t_r(n)-o(n^2)$，那么图 G 可以通过添加或删除 $o(n^2)$ 条边后变为 r 部 Turάn 图。1981 年，Brouwer [4]证明了任意一个 K_{r+1} 禁止的图 G，$e(G)\ge t_r(n)-\left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor$，那么图 G 为一个 r 部图。这一类有趣的问题被称为 Turάn 定理的稳定性问题，目前已经得到了广泛的研究和应用，相关文献可查阅[5]-[12]。

1966 年，Erdős [2]证明了下面的 Erdős-Stone-Simonovits 定理。

定理 1.1 对于任意给定的一个图 H，

$$\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}-o(1)\right)\frac{n^2}{2}\le ex(n,H)\le\left(1-\frac{1}{\chi(H)-1}+o(1)\right)\frac{n^2}{2}.$$

令 $f_r(n,t)$ 表示为使得满足对于任意一个含有 $t_r(n)-t$ 条边的 K_{r+1} 禁止的图 G 通过删掉至多 $f_r(n,t)$ 条边后成为 r 部图的最小值。2013 年，Füredi [13]首先证明了 $f_r(n,t)\le t$。当 $t\le\delta_r n^2$ 时，Roberts 和 Scott [14]证明了 $f_r(n,t)=O(t^{3/2}/n)$。后来，Balogh，Clemen，Lavrov，Lidický 和 Pfender [15]确定了 $f_r(n,t)$ 的一个渐进的界，并提出了下面的一个关于精确界的猜想。

猜想 1.1 令 $r\ge 2$，n 是一个充分大的正整数。对于任意一个含 n 个顶点 K_{r+1} 禁止的图 G，存在一个不平衡的 $C_5\vee K_{r-2}$ 的 blow-up 图 H，满足 $e(H)\ge e(G)$, $D_r(H)\ge D_r(G)$。

令 G 为 k 个顶点的图，图 G 的 blow-up 图 $H=G[n_1,\cdots,n_k]$，$V(H)=\bigcup_{i\in[k]}W_i$，其中 $|W_i|=n_i$，W_i 是两两不相交的。如果 $w\in W_i$ 与 $w'\in W_j$ 在图 H 中是相邻的当且仅当 v_i 和 v_j 在图 G 中是相邻的。我们用 $D_r(G)$ 表示图 G 成为 r 部图需要删掉的最少边数。令 $Z,Z_3,\cdots,Z_r$ 为一个完全 $(r-1)$ 部图的 $r-1$ 个部集，其中 Z 由一个 C_5 的 blow-up 图构成 $(Z=X\cup Y_1\cup Y_2\cup Z_1\cup Z_2)$。如果 $|X|\le|Y_1|=|Y_2|\le|Z_i|$，并且 $X\cup Y_1\cup Z_1, X\cup Y_2\cup Z_2, Z_3,\cdots,Z_r$ 每个部集大小为 $\left\lfloor \frac{n+|X|}{r} \right\rfloor$ 或 $\left\lceil \frac{n+|X|}{r} \right\rceil$，那么我们称这个图为星 Turάn 图。2020 年，Korάndi，Roberts 和 Scott [16]证明了 Balogh [15]他们提出的猜想 1.1，证明了下面的定理 1.2。

定理 1.2 令 $r\ge 2$，$\delta_r>0$，如果图 G 是含 n 个顶点 K_{r+1} 禁止的，$e(G)\ge t_r(n)-\delta_r n^2$，那么存在一个含 n 个顶点的星 Turάn 图 G^*，满足 $e(G^*)\ge e(G)$, $D_r(G^*)\ge D_r(G)$。

另外，他们在论文中还提出了一个关于奇圈 Turάn 问题稳定性的猜想。

猜想 1.2 令 $k\ge 1$，图 G 是含 n 个顶点不包含 C_{2k-1} 禁止的，$e(G)\ge(1/4-\delta)n^2$，那么一定存在一个 C_{2k+1} 的 blow-up 图 G^*，满足 $e(G^*)\ge e(G)$, $D_2(G^*)\ge D_2(G)$。

在本文中，我们证明了下面的定理。

定理 1.3 令 $k\ge 2$，$0<\delta\le k^{-20}$，$n\ge 10k^{30}$，图 G 为含 n 个顶点的 C_{2k-1} 禁止的图，$e(G)\ge\frac{n^2}{4}-\delta n^2$，那么 $D_2(G)\le 260\delta^2n^2$。

下面我们给出本文中的一些相关定义。在简单图 G 中，我们用 $\deg(v)$ 表示图 G 中顶点 v 的度数，为了方便起见，我们用 $d(v)$ 代替 $\deg(v)$，$\delta(G)$ 表示图 G 的最小度数，$\chi(G)$ 表示图 G 的色数，对于 G 的顶点子集 $X\subseteq V(G)$，用 $G[X]$ 表示由顶点子集合 X 生成的导出子图，令 $G-X$ 表示由 $V(G)\setminus X$ 生成的导出子图。$N_G(X)$ 表示 G 中与 X 的某个顶点相邻的所有顶点集。设 $X,Y\subseteq V(G)$ 且 $X\cap Y=\varnothing$，令 $G[X,Y]$ 表示 G 的一个特定子图，其顶点集合为 $X\cup Y$，边集合为所有一个端点在 X 中另一个端点在 Y 中的所有 G 中边构成的集合。令 G_1 与 G_2 为两个顶点不相交的图，G_1+G_2 为顶点集为 $V(G_1)+V(G_2)$，边集为 $E(G_1)+E(G_2)$ 的图。$G_1\vee G_2$ 表示在图 G_1+G_2 中，把 G_1 与 G_2 的每个顶点连接起来所得到的图。

2. 证明定理 1.3

图 G 是含 n 个顶点 C_{2k-1} 禁止的图，$e(G)\ge\frac{n^2}{4}-\delta n^2$，我们的目标是确定 $D_2(G)$ 的一个上界。如果直接在图 G 中确定 $D_2(G)$ 的一个上界是比较困难的，所以我们考虑首先在图 G 中寻找一个足够大的 C_3,C_5,C_{2k-1} 禁止的子图 G'，确定 $D_2(G')$ 的一个上界，然后进一步确定 $D_2(G)$ 的一个上界。在证明过程中我们需要下面的一些相关结论。

定理 2.1 [Fox, Himwich, Mani [17]] G 为含 n 个顶点的 C_{2k-1} 禁止的图，$e(G)\ge\frac{n^2}{4}-\delta n^2$，那么图 G 可以通过删掉 $100k^4n^{3/2}$ 条边后变成一个 $C_3,C_5,\cdots,C_{2k-1}$ 禁止的图。

引理 2.1 [Andrásfai, Erdős, Sós [18]] G 是含 n 个顶点图，$\chi(G)\ge 3$，如果图 G 中的最短奇圈圈长为 $2k+1$，那么 $\delta(G)\le\frac{2n}{2k+1}$。

如果 G 是含 n 个顶点的 $C_3,C_5,\cdots,C_{2k-1}$ 禁止的图，那么图 G 的最短奇圈圈长至少为 $2k+1$，根据引理 2.1 知，当图 G 的最小度满足 $\delta(G)>\frac{2}{2k+1}n$ 时，那么图 G 为一个二部图。

引理 2.2 G 为含 n 个顶点的 $C_3,C_5,\cdots,C_{2k-1}$ 禁止的图，$e(G)\ge\frac{n^2}{4}-\varepsilon n^2$，那么存在顶点子集 $S\subseteq G$，$|S|\le 16\varepsilon n$，使得 $G-S$ 为一个二部图，并且

$$e(G-S)\ge\frac{n^2}{4}-7\varepsilon n^2,\ \delta(G-S)\ge\frac{1}{2k+1}(1-16\varepsilon)n.$$

证明： 令 $G_0=G$，每次删掉一个顶点，依次形成图 $G_0,G_1,\cdots,G_l$，$|G_i|=n_i=n-i$。如果 G_i 中存在一个顶点 v，满足 $d(v)\le\frac{2}{2k+1}(n-i)$，那么我们令 $G_{i+1}=G_i-v$，继续上述删点过程。否则，如果 G_i 中任意一点 $v\in V(G_i)$，满足 $d(v)>\frac{2}{2k+1}(n-i)$，那么停止删点过程。

令 S 表示上述删点过程图 G 中删掉的所有顶点集合，$G-S=G_l$，$n_l=V(G-S)$。$G-S$ 是含 n_l 个顶点的 $C_3,C_5,\cdots,C_{2k-1}$ 禁止的图，那么图 $G-S$ 的最小奇圈圈长至少为 $2k+1$，再由删点过程知 $\delta(G-S)>\frac{2}{2k+1}n_l$。根据引理 2.1 我们得到图 $G-S$ 为二部图。

因为 $G-S$ 是 $C_3,C_5,\cdots,C_{2k-1}$ 禁止的图，所以 $e(G-S)\le\frac{n_l^2}{4}$。那么

$$\begin{aligned} \frac{n_l^{\ 2}}{4} &\ge e(G-S) \ge e(G) - \frac{2}{2k+1}\sum_{i=n_l+1}^{n} i \\ \frac{n_l^{\ 2}}{4} &\ge \left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)n^2 - \frac{2}{2k+1}\frac{(n_l+1+n)(n-n_l)}{2} \\ \frac{n_l^{\ 2}}{4} &\ge \left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)n^2 - \frac{1}{2k+1}\left(n^2-n_l^{\ 2}+n-n_l\right) \\ \frac{2k-3}{4(2k+1)}n_l^{\ 2} &\ge \frac{2k-3}{4(2k+1)}n^2 - \varepsilon n^2 - \frac{1}{2k+1}(n-n_l) \\ \varepsilon n^2 &\ge \frac{2k-3}{4(2k+1)}\left(n^2-n_l^{\ 2}\right) - \frac{1}{2k+1}(n-n_l) \end{aligned} \tag{2.1}$$

如果 $n_l < \frac{n}{2}$，那么

$$\frac{2k-3}{4(2k+1)}\left(n^2-n_l^{\ 2}\right) - \frac{1}{2k+1}(n-n_l) > \frac{3(2k-3)}{16(2k+1)}n^2 - \frac{n}{2k+1} \ge \frac{3(2k-3)}{32(2k+1)}n^2 > \varepsilon n^2.$$

得到矛盾，因此 $n_l \ge \frac{n}{2}$，令

$$f(x) = \frac{2k-3}{4(2k+1)}x^2 - \frac{x}{2k+1},$$

由拉格朗日中值定理得，存在某个整数 $\xi \in (n_l, n)$，使得

$$\begin{aligned} f(n) - f(n_l) &= f'(\xi)(n-n_l) \\ &= \left(\frac{2k-3}{2(2k+1)}\xi - \frac{1}{2k+1}\right)(n-n_l). \end{aligned}$$

由于 $\xi \ge n_l \ge \frac{n}{2}$，

$$\begin{aligned} f(n) - f(n_l) &\ge \left(\frac{2k-3}{4(2k+1)}n - \frac{1}{2k+1}\right)(n-n_l) \\ &\ge \frac{2k-3}{8(2k+1)}n(n-n_l). \end{aligned} \tag{2.2}$$

根据(2.1) (2.2)式得，$\varepsilon n^2 \ge \frac{2k-3}{8(2k+1)}n(n-n_l)$，由此推出 $n_l \ge (1-16\varepsilon)n$，因为 $n_l = V(G-S)$，那么 $|S| = n - n_l \le 16\varepsilon n$，并且

$$\begin{aligned} e(G-S) &\ge e(G) - \left(\frac{2}{2k+1}n\right)|S| \ge \frac{n^2}{4} - 7\varepsilon n^2, \\ \delta(G-S) &\ge \frac{2}{2k+1}n_l \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n. \end{aligned}$$

引理 2.2 即证。

定理 1.3 的证明： 根据定理 2.1 知，存在一个子图 $G' \subseteq G$，使得图 G' 是 $C_3, C_5, \cdots, C_{2k-1}$ 禁止的，且 $V(G') = V(G) = n$，令 $\varepsilon = 2\delta$，因为 $n \ge 10k^{30}$，那么

$$e(G') \ge \frac{n^2}{4} - \delta n^2 - 100k^4 n^{3/2} \ge \frac{n^2}{4} - 2\delta n^2 = \frac{n^2}{4} - \varepsilon n^2.$$

再根据引理 2.2 知，图 G' 中存在一个顶点子集 $T \subseteq V(G')$，$|T| \le 16\varepsilon n$，使得 $G'-T$ 为一个二部图，并且

$$e(G'-T) \ge \frac{n^2}{4} - 7\varepsilon n^2,\ \delta(G'-T) \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n.$$

令 A，B 为二部图 $G'-T$ 的两个部集。因为

$$\delta(G'-T) \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n,$$

所以 $|A|,|B| \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n$，又因为 $|A|+|B| \le n$，所以得到 $|A|,|B| \le \left(1-\frac{2+32\varepsilon}{2k+1}\right)n$。

断言 2.1 任意一个顶点 $u \in T$，$N_A(u) = \varnothing$ 或 $N_B(u) = \varnothing$。

证明断言 2.1 若不然，我们假设 $N_A(u) \ne \varnothing$ 且 $N_B(u) \ne \varnothing$，那么一定存在两个顶点，不妨设为 x, y，使得满足 $x \in N_A(u),\ y \in N_B(u)$。根据引理 2.2 知

$$\delta_{G'-T}(x) \ge \frac{2}{2K+1}(1-16\varepsilon)n;\ |A|,|B| \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n.$$

利用贪婪算法我们一定可以在图 $G'-T$ 中找到一条长为 $2k-6$ 起点为 x 终点为 x' 的路 $P_{xx'}$，因为 $G'-T$ 为二部图，$P_{xx'}$ 为偶长路，所以 $x' \in A$，由于

$$d_B(x'), d_A(y) \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n,$$

那么

$$\left|N_{A\setminus P_{xx'}}(y)\right|, \left|N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right| \ge \frac{2}{2k+1}(1-16\varepsilon)n - (k-2).$$

我们断言 $e\left(N_{A\setminus P_{xx'}}(y), N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right) \ne 0$。若不然，如果 $e\left(N_{A\setminus P_{xx'}}(y), N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right) = 0$，那么

$$\begin{aligned} \overline{e}\left(N_{A\setminus P_{xx'}}(y), N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right) &\ge \left(2/(2k+1)(1-16\varepsilon)n - (k-2)\right)^2 \\ &\ge \frac{3}{(2k+1)^2}(1-16\varepsilon)^2 n^2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

又因为 $e(G'-T) \ge \frac{n^2}{4} - 7\varepsilon n^2$，所以

$$\begin{aligned} \overline{e}\left(N_{A\setminus P_{xx'}}(y), N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right) &\le \overline{e}(G'-T) \\ &\le \frac{n^2}{4} - e(G'-T) \\ &\le 7\varepsilon n^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

根据(2.3) (2.4)得 $\frac{3}{(2k+1)^2}(1-16\varepsilon)^2 n^2 \le 7\varepsilon n^2$，由此推出 $\varepsilon > \frac{1}{3(2k+1)^2+96}$，这与定理条件 $\varepsilon = 2\delta \le 2k^{-20}$ 矛盾，所以我们的假设不成立，即 $e\left(N_{A\setminus P_{xx'}}(y), N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right) \ne 0$。

不妨设存在一条边 $ab \in e\left(N_{A\setminus P_{xx'}}(y), N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right)$，$a \in N_{A\setminus P_{xx'}}(y)$，$b \in e\left(N_{B\setminus P_{xx'}}(x')\right)$。在这种情况下，我们得到 $uP_{xx'}bayu$ 为一个 $2k-1$ 长的圈，这与图 G' 是不包含 C_{2k-1} 的条件矛盾，所以对于任意一个顶点

$u \in T,\ N_A(u)=\varnothing,\ N_B(u)=\varnothing$，断言 2.1 即证。

根据断言 2.1 知，顶点子集 T 中的所有顶点与 A 或 B 中至少一个部集之间不连边。下面我们考虑将顶点子集合 T 中的所有顶点重新放入 G' 任意一点 $u \in T$，如果 $N_A(u)=\varnothing$，那么我们将顶点 u 放入 A 中。反之，如果 $N_B(u)=\varnothing$，那么我们将顶点 u 放入 B 中。顶点子集 T 中所有顶点放入 A，B 之后，我们最终得到了图 G' 的一个二部划分，令其为 V_1,V_2，$A \subseteq V_1$，$B \subseteq V_2$。即

$$\forall u \in T \cap V_1,\ |N(u) \cap A| = \varnothing;\ \forall v \in T \cap V_2,\ |N(v) \cap B| = \varnothing.$$

令 $T_1 = T \cap V_1$，$T_2 = T \cap V_2$，$H = G'[T_1] \cup G'[T_2]$，根据 T 中顶点的放入原则，我们知道图 G' 的二部划分中每个部集的内部的边只与 T_1,T_2 相关联，所以

$$D_2(G') \le e(H)。$$

因为 G' 是 C_{2k-1} 禁止的，所以 $G'[T_1]$ 和 $G'[T_2]$ 也是 C_{2k-1} 禁止的，所以

$$e(G'[T_1]) \le \frac{|T_1|^2}{4},\ e(G'[T_2]) \le \frac{|T_2|^2}{4}.$$

所以

$$\begin{aligned} e(H) &= e(G'[T_1]) + e(G'[T_2]) \\ &\le \frac{|T_1|^2}{4} + \frac{|T_2|^2}{4} \\ &\le \frac{|T_1 \cup T_2|^2}{4} = \frac{|T|^2}{4}. \end{aligned}$$

由于 $D_2(G') \le e(H)$，$|T| \le 16\varepsilon n$，所以

$$D_2(G') \le e(H) \le 64\varepsilon^2 n^2.$$

这一结果表明含 n 个顶点的 $C_3, C_5, \cdots, C_{2k-1}$ 禁止的图 G'，$e(G') \ge \left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) n^2$，$D_2(G') \le 64\varepsilon^2 n^2$。又因为 n 是充分大的，$e(G) \ge e(G') + 100k^4 n^{3/2}$，$\varepsilon = 2\delta$，$n \ge 100k^{30}$，所以有

$$D_2(G) \le D_2(G') + 100k^4 n^{3/2} \le 64\varepsilon^2 n^2 + \varepsilon^2 n^2 \le 65\varepsilon^2 n^2 \le 260\delta^2 n^2.$$

定理 1.3 即证。

3. 结语

本文主要对奇圈 Turάn 问题的稳定性进行了研究。对于任意一个 C_{2k-1} 禁止的图 G，$e(G) \ge \frac{1}{4} n^2 - \delta n^2$，我们确定了 $D_2(G)$ 的一个上界，但是这一上界还是可以改进的，我们需要确定图 G 的一个更加合适的二部划分，进而得到更精确的 $D_2(G)$ 的一个上界。具体证明思路及过程需要我们后续进一步的研究。

参考文献

[1] Turάn, P. (1941) Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie. *Fiz. Lapok*, **48**, 436-452.

[2] Erdős, P. and Stone, A.H. (1946) On the Structure of Linear Graphs. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **52**, 1089-1091. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1946-08715-7

[3] Simonovits, M. (1968) A Method for Solving Extremal Problems in Graph Theory, Stability Problems. In: *Theory of Graphs* (*Proc. Colloq. Tihany*, 1966), Academic Press, New York, 279-319.

[4] Brouwer, A.E. (1981) Some Lotto Numbers from an Extension of Turán's Theorem. Report ZW152, Math. Centr, Amsterdam, 6 p.

[5] Alon, N., Balogh, J., Keevash, P. and Sudakov, B. (2004) The Number of Edge Colorings with No Monochrobmatic Cliques. *Journal of the London Mathematical Society*, **70**, 273-288. https://doi.org/10.1112/S0024610704005563

[6] Amin, K., Faudree, J., Gould, R.J. and Sidorowicz, E. (2013) On the Non-(p-1)-Partite K_p-Free Graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**, 9-23. https://doi.org/10.7151/dmgt.1654

[7] Balogh, J., Bollobás, B. and Simonovits, M. (2004) The Number of Graphs without Forbidden Subgraphs. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **91**, 1-24. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2003.08.001

[8] Hanson, D. and Toft, B. (1991) k-Saturated Graphs of Chromatic Number at Least k. *Ars Combinatoria*, **31**,159-164.

[9] Kang, M. and Pikhurko, O. (2005) Maximum K_{r+1}-Free Graphs Which Are Not r-Partite. *Matematychni Studii*, **24**, 12-20.

[10] Samotij, W. (2014) Stability Results for Random Discrete Structures. *Random Structures Random Structures & Algorithms*, **44**, 269-289. https://doi.org/10.1002/rsa.20477

[11] Tyomkyn, M. and Uzzel, A.J. (2015) Strong Turán Stability. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **22**, Article No. P3.9. https://doi.org/10.37236/4717

[12] Wang, J., Wang, S., Yang, W. and Yuan, X. (2011) A Stability Theorem for Maximal $C_{(2k+1)}$-Free Graphs. arXiv: 2011.11427.

[13] Füredi, Z. (2015) A Proof of the Stability of Extremal Graphs, Simonovits' Stability from Szemerédi's Regublarity. *Journal of Combinatorial Theory*, *Series B*, **115**, 66-71. https://doi.org/10.1016/j.jctb.2015.05.001

[14] Roberts, A. and Scott, A. (2018) Stability Results for Graphs with a Critical Edge. *European Journal of Combinatorics*, **74**, 27-38. https://doi.org/10.1016/j.ejc.2018.07.004

[15] Balogh, J., Clemen, F.C., Lavrov, M., Lidický, B. and Pfender, F. (2019) Making K_{r+1}-Free Graphs r-Partite. arXiv:1910.00028 preprint.

[16] Korándi, D. Roberts, A. and Scott, A. (2021) Exact Stability for Turán's Theorem. *Advances in Combinatorics*. https://doi.org/10.19086/aic.31079

[17] Fox, J., Himwich, Z. and Mani, N. (2012) Making an H-Free Graph k-Colorbale. arXiv:2102.10220v1.

[18] Andrásfai, B., Erdős, P. and Sós, V.T. (1974) On the Connection between Chromatic Number, Maximal Clique and Minimal Degree of a Graph. *Discrete Mathematics*, **8**, 205-218. https://doi.org/10.1016/0012-365X(74)90133-2