Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(2), 671-678
Published Online February 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.112074

一类矩阵秩的性质推广

彭仕芹，韩同耀*

云南商务信息工程学校，云南 昆明

收稿日期：2022年1月9日；录用日期：2022年2月7日；发布日期：2022年2月14日

摘 要

在 $A^k=0$， $A^k=A$， $A^k=E\ (k\geq 3)$ 的条件下，证明了 $A+k_iE\ (i=1,2,\cdots,t)$ 这类矩阵秩的恒等式成立的条件，并给出该等式的具体表达式，改进了当 $A^2=0$， $A^2=A$ 时，一类矩阵秩的恒等式成立的条件。

关键词

*Sylvester*公式，秩，矩阵

Generalization of the Properties of the Rank of a Class of Matrices

Shiqin Peng, Tongyao Han*

Yunnan Business Information Engineering School, Kunming Yunnan

Received: Jan. 9th, 2022; accepted: Feb. 7th, 2022; published: Feb. 14th, 2022

Abstract

Under the condition of $A^k=0$, $A^k=A$, $A^k=E\ (k\geq 3)$, this paper proved the conditions for the establishment of identical relation about the rank of a class of matrices that $A+k_iE\ (i=1,2,\cdots,t)$, gave the specific expression of the equality, when $A^2=0$, $A^2=A$, and improved the conditions for the establishment of identical relation about the rank of a class of matrices.

*通讯作者。

文章引用: 彭仕芹, 韩同耀. 一类矩阵秩的性质推广[J]. 应用数学进展, 2022, 11(2): 671-678.
DOI: 10.12677/aam.2022.112074

Keywords

***Sylvester* Formula, Rank, Matrix**

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 介绍

矩阵是高等代数中的重要内容，在其它许多学科中有着广泛的应用，矩阵的秩是矩阵理论的重要组成部分，是学习矩阵的难点之一，而它的性质是解决矩阵问题的重要工具。*Sylvester* 公式在求矩阵秩的相关问题中处于很重要的地位。本文利用 *Sylvester* 公式对一类矩阵秩的性质进行推广，考虑如何将其中的不等号取为等号，从而得到更漂亮的结论，这是本文研究的最终目的。

文[1]主要给出一些我们学过的矩阵(秩)的定义和性质以及一些简单的符号说明；文[2]主要讨论在 *Sylvester* 定理中，将矩阵 A，B 分别换成形如 $A+kE$，$A+lE$ $(k\neq l)$ 这类矩阵来进行研究 *Sylvester* 定理中不等号取等号的条件，并将其应用在特殊矩阵 $A^2=0$，$A^2=A$，$A^2=E$ 中且将 *Sylvester* 定理进行推广，找到了这类矩阵秩的恒等式，给出具体证明过程；文[3]解决文[2]留下的猜想；文[2]和文[3]找到了使 $A+k_iE$ $(i=1,2,\cdots,t)$ 这类矩阵秩的恒等式在 $A^2=0$，$A^2=A$，$A^2=E$ 这三类矩阵中成立的条件；文[4]得到的结果将文[2]和相关文献中的结论联系起来，引入矩阵多项式，运用新的证明方法给出文[2]中猜想成立的充分条件；文[5]是对文[2]和文[4]进行总结，给出文[4]中定理成立的又一等价条件，还给出了相关结果在一些问题中的简单应用；文[6]主要利用 λ 矩阵，从文[1]中的课后习题入手，得到 *Sylvester* 不等式等号成立的又一简单条件，证明过程直观易懂，与前文相比具有一定的连贯性和过渡性；文[7]在矩阵 A 的核空间中进行讨论，利用值域与核的关系证明了矩阵多项式秩的恒等式并给出应用。

受文[1]~文[7]的启发，本文主要研究的是 $A+k_iE$ $(i=1,2,\cdots,t)$ 这类矩阵的秩的性质，出发点在于 *Sylvester* 定理中的不等号何时取等号，但落脚点却是找到在 $A^k=0$，$A^k=A$，$A^k=E$ $(k\geq 3)$ 的条件下，$A+k_iE$ $(i=1,2,\cdots,t)$ 这类矩阵秩的恒等式成立的条件，并给出该等式的具体表达式和在 $A^2=0$，$A^2=A$ 时，找到这类矩阵秩的恒等式成立的新条件。目标是在特殊矩阵 $A^2=0$，$A^2=A$，$A^2=E$ 和 $A^k=0$，$A^k=A$，$A^k=E$ $(k\geq 3)$ 中，借助已有文献中结论的证明方法将已有结果的条件进行修改得到关于这类矩阵秩的恒等式，将秩的性质充分运用到这类矩阵中。

2. 预备知识

引理 1 [2] 设 $A\in P^{m\times n}$，$B\in P^{n\times s}$，则 秩(A)+秩$(B)\leq n+$秩(AB)。

引理 2 [2] $A\in P^{m\times n}$，k，$l\in P$，$k\neq l$，则 秩$(A+kE)$+秩$(A+lE)=n+$秩$((A+kE)(A+lE))$。

引理 3 [6] $k_1,k_2,\cdots,k_t\in C$，$k_1,k_2,\cdots,k_t$，为两两互异的数时，有 $diag\{A+k_1E,A+k_2E,\cdots,A+k_tE\}$ 与 $diag\{E,E,\cdots,E,(A+k_1E)(A+k_2E)\cdots(A+k_tE)\}$ 等价。

3. 主要结论

性质 1 设 $A\in P^{n\times n}$, $l_1,l_2,l_3\in P$，其中 l_1,l_2,l_3 两两互不相同，如果 $A^2=0$，则

$$\text{秩}(A+l_1E)+\text{秩}(A+l_2E)+\text{秩}(A+l_3E)=2n+\text{秩}\left((l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3)A+l_1l_2l_3E\right) \tag{1}$$

证明　因为

$$\begin{pmatrix} A+l_1E & 0 & 0 \\ 0 & A+l_2E & 0 \\ 0 & 0 & A+l_3E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A+l_1E & A+l_1E & 0 \\ 0 & A+l_2E & 0 \\ 0 & 0 & A+l_3E \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{l_2\neq l_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & (A+l_1E)(A+l_2E) & 0 \\ A+l_3E & A+l_3E & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

把 $(A+l_1E)(A+l_2E)$ 表示成 $A+l_3E$ 的方幂和，即写成 $(A+l_1E)(A+l_2E)=c_0E+c_1(A+l_3E)+c_2(A+l_3E)^2$，其中 $c_0=l_3{}^2+l_1l_2-l_1l_3-l_2l_3$， $c_1=l_1+l_2-2l_3$， $c_2=1$。则 $c_0\neq 0$，令 $\varphi(A)=c_1E+c_2(A+l_3E)$ 所以(1.1)式变为 $\xrightarrow{l_2\neq l_1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ -\varphi(A)(A+l_3E) & c_0E & 0 \\ A+l_3E & A+l_3E & 0 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{c_0\neq 0} \begin{pmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ (A+l_1E)(A+l_2E)(A+l_3E) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

综上所述， $c_0\neq 0$ 即 $l_3{}^2+l_1l_2-l_1l_3-l_2l_3\neq 0$ 而 $l_1\neq l_2$ 故 $l_1\neq l_3,\ l_2\neq l_3$ 于是 l_1,l_2,l_3 两两互不相同，有 $diag(A+l_1E,A+l_2E,A+l_3E)$ 与 $diag(E,E,(A+l_1E)(A+l_2E)(A+l_3E))$ 等价，于是(1.2)式可变为

$$\xrightarrow{A^2=0} \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & (l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3)A+l_1l_2l_3E \end{pmatrix}$$

所以 秩$(A+l_1E)$+秩$(A+l_2E)$+秩$(A+l_3E)=2n$+秩$((l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3)A+l_1l_2l_3E)$ 成立。

定理 1 设 $A\in P^{n\times n}$, $l_i\in P(i=1,2,\cdots,t)$，若 $l_i(i=1,2,\cdots,t)$ 两两互不相同，如果 $A^2=0$，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}(A+l_iE)=(t-1)n+\text{秩}\left(\left(\sum_{1\le i<j\le t}l_il_j\right)A+\prod_{i=1}^{t}l_iE\right) \tag{2}$$

证明　运用性质 1 中的证明方法可知，当 $l_i(i=1,2,\cdots,t)$ 两两互不相同时，有 $diag(A+l_1E,A+l_2E,\cdots,A+l_tE)$ 与 $diag(E,\cdots,E,(A+l_1E)(A+l_2E)\cdots(A+l_tE))$ 等价。故

$$\begin{pmatrix} A+l_1E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A+l_2E & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A+l_tE \end{pmatrix} \xrightarrow{l_i\neq l_j,i\neq j,i,j\in(1,2,\cdots,t)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & E \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 \\ \prod_{i=1}^{t}(A+l_iE) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{l_i\neq l_j,i\neq j,i,j\in(1,2,\cdots,t),A^2=0} \begin{pmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \left(\sum_{1\le i<j\le t}l_il_j\right)A+\prod_{i=1}^{t}l_iE \end{pmatrix}$$

所以$\sum_{i=1}^{t}$秩$\left(A+l_iE\right)=(t-1)n+$秩$\left(\left(\sum_{1\le i<j\le t}l_il_j\right)A+\prod_{i=1}^{t}l_iE\right)$成立。

性质 2 设$A\in P^{n\times n}$, $l_1,l_2,l_3\in P$，其中l_1,l_2,l_3两两互不相同，如果$A^2=A$，则

$$\text{秩}\left(A+l_1E\right)+\text{秩}\left(A+l_2E\right)+\text{秩}\left(A+l_3E\right)=2n+\text{秩}\left(\left(l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3+l_1+l_2+l_3+1\right)A+l_1l_2l_3E\right) \tag{3}$$

定理 2 设$A\in P^{n\times n}$, $l_i\in P(i=1,2,\cdots,t)$，若$l_i(i=1,2,\cdots,t)$两两互不相同，如果$A^2=A$，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}\left(A+l_iE\right)=(t-1)n+\text{秩}\left(\left(\sum_{1\le i<j\le t}l_il_j+\sum_{i=1}^{t}l_i+1\right)A+\prod_{i=1}^{t}l_iE\right) \tag{4}$$

证明　如定理 1。

性质 3 设$A\in P^{n\times n}$, $l_1,l_2,l_3\in P$，其中l_1,l_2,l_3两两互不相同，如果$A^2=E$，则

$$\text{秩}\left(A+l_1E\right)+\text{秩}\left(A+l_2E\right)+\text{秩}\left(A+l_3E\right)=2n+\text{秩}\left(\left(l_1l_2+l_1l_3+l_2l_3+1\right)A+\left(l_1+l_2+l_3+l_1l_2l_3\right)E\right) \tag{5}$$

性质 4 设$A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,k_3\in P$，且$k_1\ne k_2$, $k_3\ne\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2-k_3}$。如果$A^3=0$，则

$$\text{秩}\left(A+k_1E\right)+\text{秩}\left(A+k_2E\right)+\text{秩}\left(A+k_3E\right)=2n+\text{秩}\left(\left(k_1+k_2+k_3\right)A^2+\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)A+k_1k_2k_3E\right) \tag{6}$$

证明　因为

$$\begin{pmatrix} A+k_1E & 0 & 0\\ 0 & A+k_2E & 0\\ 0 & 0 & A+k_3E\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} A+k_1E & \left(k_2-k_1\right)E & 0\\ 0 & A+k_2E & 0\\ 0 & 0 & A+k_3E\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{k_1\ne k_2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & E\\ 0 & \left(A+k_1E\right)\left(A+k_2E\right) & 0\\ A+k_3E & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{k_1\ne k_2,k_3\ne\frac{k_1k_2}{k_1+k_2-k_3}}\begin{pmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & E & 0\\ 0 & 0 & \left(k_1+k_2+k_3\right)A^2+\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)A+k_1k_2k_3E\end{pmatrix}$$

所以 秩$\left(A+k_1E\right)+$秩$\left(A+k_2E\right)+$秩$\left(A+k_3E\right)=2n+$秩$\left(\left(k_1+k_2+k_3\right)A^2+\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)A+k_1k_2k_3E\right)$成立。

性质 5 设$A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,k_3\in P$，且$k_1\ne k_2$，$k_4\ne k_1k_2k_3l$，其中l表示一个数，即$l=\dfrac{1}{k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4+k_2k_3+k_2k_4+k_3k_4-k_4\left(k_1+k_2+k_3-k_4\right)}$，如果$A^4=0$，则

$$\begin{aligned}&\text{秩}\left(A+k_1E\right)+\text{秩}\left(A+k_2E\right)+\text{秩}\left(A+k_3E\right)+\text{秩}\left(A+k_4E\right)=\text{秩}3n+\left(\left(k_1+k_2+k_3+k_4\right)A^3\right.\\&\left.+\left(k_1k_2+k_1k_3+k_1k_4+k_2k_3+k_2k_4+k_3k_4\right)A^2+\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_2k_3k_4\right)A+k_1k_2k_3k_4E\right)\end{aligned} \tag{7}$$

定理 3 设$A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in P$，且$k_1\ne k_2$，当$t\ge3$，k_t满足一定条件即

$$k_t\ne\frac{\prod_{i=1}^{t-1}k_i}{\sum_{\substack{i_1\ne i_2\ne\cdots\ne i_{t-2}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-2}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-2}}-k_t\left(\sum_{\substack{i_1\ne i_2\ne\cdots\ne i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-\cdots k_t\left(\sum_{\substack{i_1\ne i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}-k_t\left(\sum_{i=1}^{t-1}k_i-k_t\right)\right)\cdots\right)}。$$

如果$A^k=0$，则

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{t} 秩\left(A+k_iE\right)=f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)\\
&=\sum_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ j_1,j_2,\cdots,j_i\in\{1,2,\cdots,t\}}} k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i}\left(t-1\right)n+秩\left(f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)A^{t-i}+f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)E\right)\ \left(i=1,2,\cdots,t-1\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

其中，$f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\prod_{i=1}^{t}k_i$。

证明　用数学归纳法证。

当 $k=3$ 时，由性质 4 知，设 $A\in P^{n\times n}$，$k_1,k_2,k_3\in P$，且 $k_1\neq k_2$，$k_3\neq\dfrac{k_1k_2}{k_1+k_2-k_3}$。如果 $A^3=0$，则 $秩\left(A+k_1E\right)+秩\left(A+k_2E\right)+秩\left(A+k_3E\right)=2n+秩\left(\left(k_1+k_2+k_3\right)A^2+\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)A+k_1k_2k_3E\right)$。即 $k=3$ 时结论成立。假设当 $k=t-1$ 时，结论成立。则对 $k=t$ 而言有

$$
\begin{pmatrix}
A+k_1E & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & A+k_2E & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & A+k_{t-1}E & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & A+k_tE
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{k_1\neq k_2,\,k_{t-1}\neq\dfrac{\prod_{i=1}^{t-2}k_i}{\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-k_{t-1}\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-4}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-4}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-4}}-\cdots k_{t-1}\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}-k_{t-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{t-2}k_i-k_{t-1}\right)\right)\cdots\right)}}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & E\\
0 & 0 & \cdots & E & 0\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\
0 & \prod_{i=1}^{t-1}\left(A+k_iE\right) & \cdots & 0 & 0\\
A+k_tE & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{k_1\neq k_2,\ \sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-2}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-2}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-2}}-k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-\cdots k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}-k_t\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1}k_i-k_t\right)\right)\cdots\right)\neq 0}
$$

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & E\\
\vdots & \vdots & \cdots & 0\\
0 & \prod_{i=1}^{t-1}\left(A+k_iE\right) & \cdots & 0\\
A+k_tE & cE & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

其中

$$
\left(c=\frac{\prod_{i=1}^{t-1}k_i}{\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-2}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-2}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-2}}-k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-\cdots k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}-k_t\left(\sum_{i=1}^{t-1}k_i-k_t\right)\right)\cdots\right)}\right)
$$

$$\xrightarrow{k_1\neq k_2,\,k_t\neq \frac{\prod_{i=1}^{t-1}k_i}{\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-2}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-2}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-2}}-k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-\cdots k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}-k_t\left(\sum_{i=1}^{t-1}k_i-k_t\right)\right)\cdots\right)}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & E \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & E & \cdots & 0 \\ \prod_{i=1}^{t}(A+k_iE) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

故对于 $k=t$ 时，若 $A^t=0$，则

秩$\left(\sum_{i=1}^{t}A+k_iE\right)=(t-1)n+$秩$\left(f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)A^{t-i}+f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)E\right)$ $(i=1,2,\cdots,t-1)$。其中 $f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)=\sum\limits_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ j_1,j_2,\cdots,j_i\in(1,2,\cdots,t)}}k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i}$，$f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)=\prod_{i=1}^{t}k_i$。所以对任意的 k $(k\geq 3)$ 均有上述结论成立，从而命题得证。

推论 1 设 $A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in P$, 且 $k_1\neq k_2\neq\cdots\neq k_t$。如果 $A^k=0$，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}(A+k_iE)=(t-1)n+\text{秩}\left(f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)A^{t-i}+f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)E\right)\ (i=1,2,\cdots,t-1)$$

其中

$$f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)=\sum_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_i\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i},\quad f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)=\prod_{i=1}^{t}k_i \tag{9}$$

证明　运用引理 3 和性质 1 的证明方法可证。

定理 4 设 $A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in P$，且 $k_1\neq k_2$，当 $t\geq 3$，k_t 满足一定条件即

$$k_t\neq\frac{\prod_{i=1}^{t-1}k_i}{\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-2}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-2}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-2}}-k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-\cdots k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{i_1}k_{i_2}-k_t\left(\sum_{i=1}^{t-1}k_i-k_t\right)\right)\cdots\right)}$$

$(t\geq 3)$。如果 $A^k=E$，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}(A+k_iE)=(t-1)n+\text{秩}\left(f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)A^{t-i}+f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)E\right)\ (i=1,2,\cdots,t-1) \tag{10}$$

其中 $f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)=\sum\limits_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_i\}\in(1,2,\cdots,t)}}k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i}$，$f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)=\prod_{i=1}^{t}k_i+1$。

证明　用数学归纳法(同定理 3)。

推论 2 设 $A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in P$，且 $k_1\neq k_2\neq\cdots\neq k_t$。如果 $A^k=E$，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}(A+k_iE)=(t-1)n+\text{秩}\left(f_i(k_1,k_2,\cdots,k_t)A^{t-i}+f_t(k_1,k_2,\cdots,k_t)E\right)\ (i=1,2,\cdots,t-1) \tag{11}$$

其中 $f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\sum\limits_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_i\}\in(1,2,\cdots,t)}} k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i}$ ， $f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\prod\limits_{i=1}^{t}k_i+1$ 。

证明　运用引理 3 和性质 1 的证明方法可证。

定理 5　设 $A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in P$ ，且 $k_1\neq k_2$ ，当 $t\geq 3$ ， k_t 满足一定条件即

$$k_t\neq\frac{\prod\limits_{i=1}^{t-1}k_i}{\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-2}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-2}\}\in(1,2,\cdots,t)}} k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-2}}-k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\neq\cdots\neq i_{t-3}\\ \{i_1,i_2,\cdots,i_{t-3}\}\in(1,2,\cdots,t)}} k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_{t-3}}-\cdots k_t\left(\sum\limits_{\substack{i_1\neq i_2\\ \{i_1,i_2\}\in(1,2,\cdots,t)}} k_{i_1}k_{i_2}-k_t\left(\sum\limits_{i=1}^{t-1}k_i-k_t\right)\right)\cdots\right)}$$

$(t\geq 3)$。如果 $A^k=A$ ，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}\left(A+k_iE\right)=\left(t-1\right)n+\text{秩}\left(f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)A^{t-i}+f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)E\right)\ \left(i=1,2,\cdots,t-1\right)\tag{12}$$

其中 $f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\sum\limits_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_i\}\in\{1,2,\cdots,t\}}} k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i}$ ，

$$f_{t-1}\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\sum_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_{t-1}\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_{t-1}\}\in(1,2,\cdots,t)}} k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_{t-1}}+1\quad,\quad f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\prod_{i=1}^{t}k_i$$

证明　用数学归纳法(同定理 3)。

推论 3　设 $A\in P^{n\times n}$, $k_1,k_2,\cdots,k_t\in P$ 且 $k_1\neq k_2\neq\cdots\neq k_t$ 。如果 $A^k=A$ ，则

$$\sum_{i=1}^{t}\text{秩}\left(A+k_iE\right)=\left(t-1\right)n+\text{秩}\left(f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)A^{t-i}+f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)E\right)\ \left(i=1,2,\cdots,t-1\right)\tag{13}$$

其 中 $f_i\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\sum\limits_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_i\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_i\}=(1,2,\cdots,t)}} k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_i}$ ， $f_{t-1}\left(k_1,k_2\cdots,k_t\right)=\sum\limits_{\substack{j_1\neq j_2\neq\cdots\neq j_{t-1}\\ \{j_1,j_2,\cdots,j_{t-1}\}=(1,2,\cdots,t)}} k_{j_1}k_{j_2}\cdots k_{j_{t-1}}+1$ ，

$f_t\left(k_1,k_2,\cdots,k_t\right)=\prod\limits_{i=1}^{t}k_i$ 。

证明　运用引理 3 和性质 1 的证明方法可证。

4. 结论

本文围绕文[2]进行研究，修改文[2]中已有结论的条件，使条件更为简单，但结论依然成立。借助后续文献中结论的证明方法得到了更多关于一类矩阵秩的恒等式，使矩阵秩的性质在特殊矩阵 $A^2=0$ ， $A^2=A$ ， $A^2=E$ 和 $A^k=0$ ， $A^k=A$ ， $A^k=E$ $(k\geq 3)$ 中的作用发挥出来并得到了新的结论。

本文考虑的矩阵 A 是方阵，与 *Sylvester* 定理中的 $A\in P^{m\times n}$ 不同，但若矩阵 A 是方阵却表示 k 不同类矩阵之和，那么这类矩阵秩的恒等式成立的条件和具体表达式会如何改变并未做研究。

参考文献

[1] 北京大学数学系几何与代数研究室代数小组. 高等代数[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 1998.

[2] 李书超, 蒋军, 向世斌. 一类矩阵秩的恒等式及其推广[J]. 武汉科技大学学报(自然科学版), 2004, 27(1): 96-98.

[3] 骈俊生. 矩阵秩的一个恒等式及其证明[J]. 大学数学, 2007, 23(2): 6.

[4] 余世群. 关于“一类矩阵秩的恒等式及其推广”一文的注记[J]. 武汉科技大学学报, 2006, 19(10): 28-29.

[5] 宋小力. 一类矩阵乘积秩的恒等式及应用[J]. 四川兵工报, 2010(3): 135-137.

[6] 张岩. 对一类矩阵秩的恒等式的研究证明[J]. 价值工程, 2012, 31(31): 2.

[7] 徐国进, 胡付高, 李发来. 一类矩阵多项式秩的恒等式[J]. 大学数学, 2010, 26(2): 3.