Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(3), 1464-1473
Published Online March 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.113160

Hans汉斯

分数阶时滞微分方程的Hyers-Ulam稳定性

顾鹏飞，李　刚*，刘　莉

扬州大学，数学科学学院，江苏 扬州

收稿日期：2022年2月28日；录用日期：2022年3月23日；发布日期：2022年3月30日

摘　要

本文研究的是一类半线性分数阶时滞微分方程的Hyers-Ulam稳定性问题。我们根据微分方程的解与逼近方程的解在初始区间所满足的条件是否一致，将问题分成两种情形进行讨论。我们采用了逐次逼近、不动点理论、Gronwall型不等式等方法。最后我们分别得到了这两种情况下分数阶时滞微分方程的Hyers-Ulam稳定常数。

关键词

Hyers-Ulam稳定性，有限时滞，分数阶微分方程，Gronwall不等式

Hyers-Ulam Stability of a Class of Fractional Delay Differential Equations

Pengfei Gu, Gang Li*, Li Liu

School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Received: Feb. 28th, 2022; accepted: Mar. 23rd, 2022; published: Mar. 30th, 2022

Abstract

In this paper, we devoted to study the Hyers-Ulam stability problem of a class of semilinear fractional delay differential equations. We divide this problem into two cases according to whether the initial conditions of the exact solution and the approximate solution of the differential equation are consistent. We use the successive approximation method, Weissinger's fixed point theorem and Gronwall's inequality. Finally, we prove the fractional delay differential equations are Hyers-Ulam stable and obtain two Hyers-Ulam stability constants in the two cases, respectively.

*通讯作者。

文章引用: 顾鹏飞, 李刚, 刘莉. 分数阶时滞微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(3): 1464-1473.
DOI: 10.12677/aam.2022.113160

Keywords

Hyers-Ulam Stability, Finite Delay, Fractional Differential Equations, Gronwall's Inequality

1. 引言

分数阶时滞微分方程的相关研究近年来备受青睐。从上世纪 70 年代起，学者们渐渐发现分数阶微积分可以与物理、工程、材料、医学和经济学等领域中的一些现象或过程建立起密切的联系，并且在使用数学模型描述和刻画现实过程时，分数阶微积分也是一种很好的手段[1] [2] [3]。而时滞微分方程有时则能更好地描述现实世界很多自然现象和规律。所以分数阶时滞微分方程在理论和应用方面都得到了一定的发展。

本文，我们研究下面这种定义在 D 上的半线性的分数阶时滞微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性：

$$\begin{cases} {}^cD_\sigma^\alpha x(t) = f(t, x_t), t \in [\sigma, \sigma + a]; \\ x_\sigma(t) = \phi(t), t \in [\sigma - r, \sigma], \end{cases} \tag{1}$$

其中 ${}^cD_\sigma^\alpha$ 是 α 阶 Caputo 型分数阶微分算子，$0 < \alpha < 1$。不失一般性地，$a > 1$ 指代预设的迭代区间长度。$r > 0$ 是有限时滞。区域 $D \subset \mathbb{R} \times C([-r, 0], E)$，$f(t, x_t): D \to E$ 为连续线性泛函。

Hyers-Ulam 稳定性主要处理的问题是：什么时候一个泛函方程的近似解必须逼近它的一个精确解？这类稳定性问题可以追溯到 S.M. Ulam 在 1940 年的一次的讲话[4]，其中涉及到一个泛函方程的稳定性问题。从此，一系列泛函方程的稳定性问题开始得到大批数学家的广泛关注[5]-[13]。事实上，已经发展出很多类型的 Ulam 稳定性，除了我们本文研究的 Hyers-Ulam 稳定性，还有广义的 Hyers-Ulam 稳定性、Hyers-Ulam-Rassias 稳定性以及广义的 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性等。逐次逼近法[6]、不动点理论[8]、Laplace 变换方法[7]-[14]等泛函分析方法都常被用来研究时滞微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。关于微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性的更多研究结果可以参见文献[14] [15] [16]。通过逐次逼近法展示了逼近解与精确解之间的关系，我们在本文中借助 Gronwall 型不等式，分别在两种情况下分析了一类分数阶半线性时滞微分方程的 Hyers-Ulam 稳定性。

2. 预备知识

我们取 $E = R^n$ 为 n 维欧几里得向量空间，其上赋予范数

$$|x(t)| = \max_{1 \le j \le n} |x_j(t)|, \forall x \in (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E,$$

$C([a, b], E)$ 表示从区间 $[a, b]$ 映射到 E 中的连续函数全体，其上赋予范数

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : a \le t \le b\}, \ \forall f \in C([a, b], E)$$

成为 Banach 空间。称函数 $f: D \to E$ 关于第二变量满足 Lipschitz 条件，如果存在正常数 L，使得对于任意的 (t, y) 和 $(t, z) \in D$，都有

$$\left| f(x,y_1) - f(x,y_2) \right| < L\left| y_1 - y_2 \right|.$$

定义 1. 假设$\alpha \in \mathbb{R}^+$。$L^1[\sigma,b]$上的算子J_σ^α定义为

$$J_\sigma^\alpha f(t) = \int_\sigma^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\mathrm{d}s,$$

其中$\sigma \le t \le b$。J_σ^α称为α阶 Riemann-Liouville 分数阶积分算子。

定义 2. 假设$\alpha \in \mathbb{R}^+, m = \lceil \alpha \rceil$。当$D^m f \in L^1[\sigma,b]$时，$\alpha$阶 Caputo 分数阶微分算子定义为

$${}^cD_\sigma^\alpha f(t) = J_\sigma^{m-\alpha} D^m f(t) = \int_\sigma^t \frac{(t-s)^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^m f(s)}{\mathrm{d}s^m}\mathrm{d}s.$$

下面，我们介绍 Mittag-Leffler 函数的定义。

定义 3. 假设$n_1, n_2 > 0$。当级数

$$E_{n_1,n_2}(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(jn_1 + n_2)}$$

收敛时，我们称其为带有双参数n_1和n_2的 Mittag-Leffler 函数。特别地，当$n_2 = 1$时，该函数变为单参数的 Mittag-Leffler 函数，记作$E_{n_1}(z) = E_{n_1,1}(z)$。

定义 4. 对于给定的$\sigma \in \mathbb{R}$，$a > 0$，$r > 0$以及$x(t):[\sigma - r, \sigma + a] \to E$，我们定义函数

$$x_t(\theta) = x(t+\theta), -r \le \theta \le 0.$$

如果$x \in C([\sigma - r, \sigma + a], E)$，那么对于任意的$t \in [\sigma, \sigma + a]$有$x_t \in C([-r, 0], E)$。

定义 5. 我们称$x(t)$为泛函微分方程(1)的解，如果对于任意的$t \in [\sigma, \sigma + a]$都有$(t, x_t) \in D$并且$x \in C([\sigma - r, \sigma + a], E)$满足(1)。进一步地，对于$(\sigma, \phi^0) \in D$，如果$x_\sigma = \phi^0$那么我们称$x(t)$为初始条件为$(\sigma, \phi^0)$的方程(1)的解，此时将$x(t)$记作$x(t, \sigma, \phi^0)$。

根据[1]中的引理 5.2，我们可以写出分数阶时滞微分方程(1)的等价积分方程。

命题 6. 设$0 < \alpha < 1$，$f: D \to E$为连续线性泛函，并且关于第二变量满足 Lipschitz 条件。那么函数$x(t)$为分数阶时滞微分方程(1)的解，当且仅当$x(t)$为下面 Volterra 积分方程的一个解：

$$\begin{cases} x(t) = x_\sigma + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)} \displaystyle\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x_\tau)\mathrm{d}\tau, t \in [\sigma, \sigma + a]; \\ x_\sigma = \phi, x \in [\sigma - r, \sigma]. \end{cases}$$

从命题 6 中所示的(1)的等价 Volterra 积分方程的形式来看，我们在后续估计中将不可避免地交替出现x_t和$x(t)$的范数估计[6]。所以，根据定义 5 中所述的函数x_t和$x(t)$的关系来分析二者范数之间的联系时自然的。

引理 7. 假设$x \in C([\sigma - r, \sigma + a], E)$，并且有$x_\sigma = \phi$。若

$$|x(t)| \le |\phi(0)| + m(t), \sigma \le t < \sigma + a,$$

其中函数$m(t) \ge 0$单调递增，那么，我们有

$$\|x_t\|_\infty \le \|\phi\|_\infty + m(t), \sigma \le t < \sigma + a.$$

在 Hyers-Ulam 稳定性的相关研究中，一个很重要的工具就是 Gronwall 型不等式。下面我们介绍一

种在分数阶微分方程的分析和证明过程中十分重要的 Gronwall 型不等式。

引理 8. 设 $\beta>0$。设对于任意的 $0\le t<T$，非负函数 $a(t)$ 局部可积，非负函数 $h(t)$ 是一个单调递增的连续函数，并且存在常数 M 使得 $h(t)\le M$。如果对于一个非负的局部可积函数 $u(t)$，满足不等式

$$u(t)\le a(t)+h(t)\int_0^t (t-s)^{\beta-1}u(s)\mathrm{d}s,$$

那么，有

$$u(t)\le a(t)+\int_0^t\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(h(t)\Gamma(\beta)\right)^n}{\Gamma(n\beta)}(t-s)^{n\beta-1}a(s)\right]\mathrm{d}s, 0\le t<T.$$

本节的最后，我们介绍分数阶时滞微分方程(1)满足 Hyers-Ulam 稳定性的定义。

定义 9. 我们称分数阶时滞微分方程(1)满足 Hyers-Ulam 稳定性，如果存在一个非负常数 K 使得对于任意的 $\varepsilon\ge 0$，如果函数 $y:[\sigma-r,\sigma+a]\to E$ 满足不等式

$$\left|{}^cD_{\sigma^+}^{\alpha}y(t)-f(t,y_t)\right|\le\varepsilon,\forall t\in[\sigma,\sigma+a],$$

那么一定存在相应的微分方程的唯一解 $x(t):[\sigma-r,\sigma+a]\to E$，使得

$$|y(t)-x(t)|\le K\varepsilon,\forall t\in[\sigma-r,\sigma+a].$$

下面我们介绍一个不动点定理[17]，它是经典的巴拿赫不动点定理的推广。

定理 10. 假设 (U,d) 是一个非空的完备度量空间。对于每个 $j\in\mathbb{N}_0$，令 $\alpha_j\ge 0$ 且 $\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j$ 收敛。进一步，使映射 $A:U\to U$ 满足不等式

$$d\left(A^ju,A^jv\right)\le\alpha_j d(u,v),$$

那么对所有 $j\in\mathbb{N}$ 以及任意的 $u,v\in U$，A 都存在一个唯一确定的不动点 u^*。此外，对于任意的 $u_0\in U$，数列 $\left(A^ju_0\right)_{j=1}^{\infty}$ 都收敛于不动点 u^*。

3. 主要结果

如引言所述，考虑 Hyers-Ulam 稳定性，实际上是考虑一个泛函方程的近似解如何可以近似为相应系统的一个解。首先我们利用逐次逼近法和 Gronwall 型不等式，讨论了当近似解和精确解在初始时间段上一致时的 Hyers-Ulam 稳定性。

定理 3.1. 设 $0<\alpha<1$，$f(t,\phi):\mathbb{R}\times C([-r,0],E)\to E$ 关于第二变量满足 Lipschitz 条件。任给一个 $\varepsilon\ge 0$，若 $y:[\sigma-r,\sigma+a]\to E$ 满足

$$\left|{}^cD_{\sigma^+}^{\alpha}y(t)-f(t,y_t)\right|\le\varepsilon,\forall t\in[\sigma,\sigma+a],$$

那么方程(1)一定存在唯一的解 $x:[\sigma-r,\sigma+a]\to E$，且 $x_\sigma=y_\sigma$。此外，

$$|y(t)-x(t)|\le\frac{E_\alpha\left(L\alpha^\alpha\right)-1}{L}\varepsilon.$$

证明：定义 $x^0(t)=y(t),t\in[\sigma-r,\sigma+a]$。显然，$x^0\in C([\sigma-r,\sigma+a],E)$，并且对于所有的 $t\in[\sigma,\sigma+a]$，有 $\left(t,x_t^0\right)\in\mathbb{R}\times C([-r,0],E)$。我们构造一个序列 $x^1(t),x^2(t),\cdots$，

$$x^{k+1}(t)=\begin{cases} y(t), t\in[\sigma-r,\sigma]; \\ y_\sigma+\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1} f\left(\tau, x_\tau^k\right)\mathrm{d}\tau, t\in[\sigma,\sigma+a]. \end{cases}$$

对于所有的$t\in[\sigma,\sigma+a]$，我们有$\left(t,x_t^0\right)\in\mathbb{R}\times C([-r,0],E)$，故$x^1(t)\in C([\sigma-r,\sigma+a],E)$，并且$\left(t,x_t^1\right)\in\mathbb{R}\times C([-r,0],E)$。重复这一过程，我们可以得到对任意的$k\in\mathbb{N}^+$，$t\in[\sigma,\sigma+a]$，都有$\left(t,x_t^k\right)\in\mathbb{R}\times C([-r,0],E)$。因此，我们定义的这一序列是适定的。由于在区间$[\sigma-r,\sigma]$中有$x^k(t)=y(t)$，所以只需考虑当$t\in[\sigma,\sigma+a]$时的情形即可。我们发现当$t\in[\sigma,\sigma+a]$时，对于任意的$k\in\mathbb{N}^+$，有

$$\left|x^k(t)-x^{k-1}(t)\right|\le\frac{L^{k-1}\varepsilon}{\Gamma(k\alpha+1)}(t-\sigma)^{k\alpha}. \tag{2}$$

由于当$t\in[\sigma,\sigma+a]$时，有$\left|{}^cD_{\sigma^+}^\alpha y(t)-f(t,y_t)\right|\le\varepsilon$，所以

$$\begin{aligned}\left|x^1(t)-x^0(t)\right|&=\left|y_\sigma+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x_\tau^0\right)\mathrm{d}\tau-y(t)\right|\\&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau,y_\tau)-{}^cD_{\sigma^+}^\alpha y(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha+1)}(t-\sigma)^\alpha.\end{aligned}$$

可以看出，当$k=1$时(2)式成立。假设当$k=i$时(2)式成立，即有

$$\left|x^i(t)-x^{i-1}(t)\right|\le\frac{L^{i-1}\varepsilon}{\Gamma(i\alpha+1)}(t-\sigma)^{i\alpha}, t\in[\sigma,\sigma+a].$$

下面我们考虑当$k=i+1$时的情况，可以发现

$$\begin{aligned}\left|x^{i+1}(t)-x^i(t)\right|&=\left|y_\sigma+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x_\tau^i\right)\mathrm{d}\tau-y_\sigma-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x_\tau^{i-1}\right)\mathrm{d}\tau\right|\\&=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left(f\left(\tau,x_\tau^i\right)-f\left(\tau,x_\tau^{i-1}\right)\right)\mathrm{d}\tau\right|\\&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\left\|x_\tau^i-x_\tau^{i-1}\right\|_\infty\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{-r\le\theta\le0}\left|x^i(\tau+\theta)-x^{i-1}(\tau+\theta)\right|\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\le\mu\le\tau}\left|x^i(\mu)-x^{i-1}(\mu)\right|\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\le\mu\le\tau}\left\{\frac{L^{i-1}\varepsilon}{\Gamma(i\alpha+1)}(\mu-\sigma)^{i\alpha}\right\}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\frac{L^{i-1}\varepsilon}{\Gamma(i\alpha+1)}\int_\sigma^t(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\sigma)^{i\alpha}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

令 $\tau-\sigma=\xi(t-\sigma)$，则积分变换后有

$$\left|x^{i+1}(t)-x^{i}(t)\right|=\frac{L^{i}\varepsilon}{\Gamma((i+1)\alpha+1)}(t-\sigma)^{(i+1)\alpha},\forall t\in[\sigma,\sigma+a].$$

于是，我们就证得了(2)式的正确性。在(2)式的基础上，可以发现对于任意的 $t\in[\sigma,\sigma+a]$，有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\left|x^{k}(t)-x^{k-1}(t)\right|&\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^{k-1}\varepsilon}{\Gamma(k\alpha+1)}(t-\sigma)^{k\alpha}\\&=\frac{\varepsilon}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(L(t-\sigma)^{\alpha}\right)^{k}}{\Gamma(k\alpha+1)}\\&\le\frac{\varepsilon}{L}\left(E_{\alpha}\left(La^{\alpha}\right)-1\right).\end{aligned}$$

其中 $E_{\alpha}\left(La^{\alpha}\right)$ 是单参数的 Mittag-Leffler 函数。结合定义 3 可以看出，函数列 $\left\{x^{k}(t)\right\}$ 一致收敛。设极限为连续函数 $x(t)$。那么，由 $x^{0}(t)=y(t)$，我们有

$$\left|x(t)-y(t)\right|\le\frac{E_{\alpha}\left(La^{\alpha}\right)-1}{L}\varepsilon. \tag{3}$$

下面我们证明函数 $x(t)$ 满足方程(1)。不难发现，

$$\left|x(t)-x^{k}(t)\right|=\sum_{i=k}^{\infty}\left|x^{i+1}(t)-x^{i}(t)\right|\le\sum_{i=k}^{\infty}\frac{L^{i}\varepsilon}{\Gamma((i+1)\alpha+1)}(t-\sigma)^{(i+1)\alpha},$$

再根据引理 7，我们可以得到

$$\left\|x_{t}-x_{t}^{k}\right\|_{\infty}\le\sum_{i=k}^{\infty}\frac{L^{i}\varepsilon}{\Gamma((i+1)\alpha+1)}(t-\sigma)^{(i+1)\alpha},\quad\forall t\in[\sigma,\sigma+a]. \tag{4}$$

又由于

$$\left|\int_{\sigma}^{t}\left(f\left(s,x_{s}^{k}\right)-f\left(s,x_{s}\right)\right)\mathrm{d}s\right|\le\int_{\sigma}^{t}\left|f\left(s,x_{s}^{k}\right)-f\left(s,x_{s}\right)\right|\mathrm{d}s\le L\int_{\sigma}^{t}\left\|x_{s}^{k}-x_{s}\right\|\mathrm{d}s,$$

所以结合(4)式可以知道，当 $k\to\infty$ 时，$\left|\int_{\sigma}^{t}\left(f\left(s,x_{s}^{k}\right)-f\left(s,x_{s}\right)\right)\mathrm{d}s\right|$ 一致收敛于 0。此时，回顾函数列 $\left\{x^{k}(t)\right\}$ 的构造方式：

$$x^{k+1}(t)=y_{\sigma}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x_{\tau}^{k}\right)\mathrm{d}\tau,\quad\forall t\in[\sigma,\sigma+a],$$

对上式两边同时取极限 $k\to\infty$，我们有 $x(t)=y_{\sigma}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f\left(\tau,x_{\tau}\right)\mathrm{d}\tau,\forall t\in[\sigma,\sigma+a]$ 成立。于是根据命题 6，我们知道 $x(t)$ 是带有初始条件 (σ,y_{σ}) 的半线性分数阶时滞微分方程(1)的一个解。最后，我们只需证明解 $x(t)$ 的唯一性。假设 $\tilde{x}(t)$ 是带有初始条件 (σ,y_{σ}) 的半线性分数阶时滞微分方程(1)的另外一个解。那么，可以得到

$$\begin{aligned}\left|\tilde{x}(t)-x(t)\right|&\le\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left(f\left(\tau,\tilde{x}_{\tau}\right)-f\left(\tau,x_{\tau}\right)\right)\mathrm{d}\tau\right|\\&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left\|\tilde{x}_{\tau}-x_{\tau}\right\|\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

根据引理 7，我们有

$$\left\|\tilde{x}_t - x_t\right\|_\infty \le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\|\tilde{x}_\tau - x_\tau\right\|\mathrm{d}\tau,$$

利用引理 8 中的 Gronwall 型不等式，我们有

$$\left\|\tilde{x}_t - x_t\right\| \le 0,$$

从而可知 $\left\|\tilde{x}_t - x_t\right\| = 0$。因此，$\tilde{x}(t) = x(t), t \in [\sigma - r, \sigma + a]$，证毕。

随着 Ulam 稳定性的逐步发展，人们发现当近似解和精确解在初始时间段 $[\sigma - r, \sigma]$ 上的条件相同时，该系统没有多少实际应用价值。因此，我们优化了上述结果的实用性，研究一种应用更加广泛的系统。此时假设问题的近似解和精确解在初始时间段 $[\sigma - r, \sigma]$ 上的条件由一个常数控制。下面我们利用 Weissinger 不动点理论以及 Gronwall 不等式方法来研究这样一个新系统的 Hyers-Ulam 稳定性。

定理 3.2. 设 $0 < \alpha < 1$，$f(t,\phi): \mathbb{R} \times C([-r,0],E) \to E$ 关于第二变量满足 Lipschitz 条件。任给一个 $\varepsilon \ge 0$，若 $y: [\sigma - r, \sigma + a] \to E$ 满足

$$\left|{}^cD_{\sigma^+}^{\alpha} y(t) - f(t, y_t)\right| \le \varepsilon, \forall t \in [\sigma, \sigma + a],$$

那么方程(1)一定存在唯一的解 $x: [\sigma - r, \sigma + a] \to E$，满足 $\left|x_\sigma - y_\sigma\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$ 并且

$$\left|y(t) - x(t)\right| \le \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{L}\right) E_n\left(La^\alpha\right)\varepsilon.$$

证明：令 $X = \{x: [\sigma - r, \sigma + a] \to \mathbb{R} \mid \phi \in C[\sigma - r, \sigma], x[\sigma, \sigma + a] \in C[\sigma, \sigma + a]\}$。我们定义一个算子 $T: X \to X$，定义如下，

$$Tx(t) = \begin{cases} x_\sigma + \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x_\tau)\mathrm{d}\tau, t \in [\sigma, \sigma + a]; \\ x_\sigma, x \in [\sigma - r, \sigma], \end{cases}$$

我们先利用不动点定理证明算子 T 在 X 中有一个不动点。任取 $\tilde{x}(t) \in X$ 和 $x(t) \in X$，我们有

$$\left\|T^k \tilde{x}(t) - T^k x(t)\right\|_\infty \le \frac{L^k (t-\sigma)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + 1)}\left\|\tilde{x} - x\right\|_\infty, \quad \forall k \ge 1 \tag{5}$$

现在，我们利用数学归纳法证明上式。首先当 $i = 1$ 时，我们有

$$\begin{aligned} \left|T\tilde{x}(t) - Tx(t)\right| &= \left|x_\sigma + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, \tilde{x}_\tau)\mathrm{d}\tau - \left(x_\sigma + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x_\tau)\mathrm{d}\tau\right)\right| \\ &\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau, \tilde{x}_\tau) - f(\tau, x_\tau)\right|\mathrm{d}\tau \\ &\le \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left\|\tilde{x}_\tau - x_\tau\right\|_\infty \mathrm{d}\tau \\ &= \frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{-r \le \theta \le 0}\left|\tilde{x}(\tau + \theta) - x(\tau + \theta)\right|\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

$$=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\le\mu\le\tau}\left|\tilde{x}(\mu)-x(\mu)\right|\mathrm{d}\tau$$

$$\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\|\tilde{x}-x\|_{\infty}\,\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\frac{(t-\sigma)^{\alpha}}{\alpha}\|\tilde{x}-x\|.$$

显然，(5)式当 $i=1$ 时成立。现在假设(5)式当 $i=k$ 时仍然成立，即

$$\left|T^{k}\tilde{x}(t)-T^{k}x(t)\right|\le\frac{L^{k}(t-\sigma)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\infty}.$$

下面我们考虑当 $i=k+1$ 时的情形。根据 $i=k$ 时的结果，我们可以发现

$$\begin{aligned}\left|T^{k+1}\tilde{x}(t)-T^{k+1}x(t)\right|&\le\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f\left(\tau,T^{k}\tilde{x}_{\tau}\right)-f\left(\tau,T^{k}x_{\tau}\right)\right|\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left\|T^{k}\tilde{x}_{\tau}-T^{k}x_{\tau}\right\|_{\infty}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{-r\le\theta\le0}\left|T^{k}\tilde{x}(\tau+\theta)-T^{k}x(\tau+\theta)\right|\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\le\mu\le\tau}\left|T^{k}\tilde{x}(\mu)-T^{k}x(\mu)\right|\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\le\mu\le\tau}\left\{\frac{L^{k}(\mu-\sigma)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\infty}\right\}\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L^{k+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\infty}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\sigma)^{k\alpha}\,\mathrm{d}\tau\\&=\frac{L^{k+1}(t-\sigma)^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\infty}.\end{aligned}$$

对上式两边在研究区间 $[\sigma,\sigma+a]$ 上取上确界范数，可以得到：

$$\left\|T^{k+1}\tilde{x}-T^{k+1}x\right\|_{\infty}\le\frac{L^{k+1}a^{(k+1)\alpha}}{\Gamma((k+1)\alpha+1)}\|\tilde{x}-x\|_{\infty}.$$

令 $\Lambda_{k}=\frac{\left(La^{\alpha}\right)^{k}}{\Gamma(k\alpha+1)}$。我们发现级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\Lambda_{k}=E_{\alpha}\left(La^{\alpha}\right)$，根据定义 3 可知该级数收敛。于是，根据 Weissinger 不动点定理可知，算子 T 在 X 中存在唯一的不动点，即方程(1)存在唯一的解 $x(t)$。又根据假设条件可知，当 $t\le\sigma$ 时，有 $\left|x_{\sigma}-y_{\sigma}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}$。当 $t\in[\sigma,\sigma+a]$ 时，有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&=\left|x_{\sigma}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau,x_{\tau})\mathrm{d}\tau-y(t)\right|\\&\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau,x_{\tau})-{}^{c}D_{\sigma^{+}}^{\alpha}y(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau,x_{\tau})-f(\tau,y_{\tau})+f(\tau,y_{\tau})-{}^{c}D_{\sigma^{+}}^{\alpha}y(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\\&\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\sigma}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}\left|f(\tau,x_{\tau})-f(\tau,y_{\tau})\right|+\left|f(\tau,y_{\tau})-{}^{c}D_{\sigma^{+}}^{\alpha}y(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\|x_\tau-y_\tau\|_\infty \mathrm{d}\tau+\frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{d}\tau \\
&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(t-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{-r\le\theta\le0}|x(t+\theta)-y(t+\theta)|\mathrm{d}\tau \\
&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(t-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{L}{\Gamma(\alpha)}\int_\sigma^t (t-\tau)^{\alpha-1}\sup_{\sigma\le\mu\le\tau}|x(\mu)-y(\mu)|\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}
$$

令 $\psi(t)=\sup\limits_{\sigma\le t\le\sigma+a}|x(t)-y(t)|$，我们对上式两边取上确界范数，根据引理 8 中的 Gronwall 型不等式，我们有

$$
\begin{aligned}
\psi(t)&\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(t-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\int_\sigma^t\sum_{n=1}^\infty\frac{L^n\Gamma^n(\alpha)}{\Gamma(n\alpha)\Gamma^n(\alpha)}(t-s)^{n\alpha-1}\left[\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(s-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\mathrm{d}s \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon(t-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\varepsilon}{2}\int_\sigma^t\sum_{n=1}^\infty\frac{L^n}{\Gamma(n\alpha)}(t-s)^{n\alpha-1}\mathrm{d}s+\varepsilon\int_\sigma^t\sum_{n=1}^\infty\frac{L^n(t-s)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)}\frac{(s-\sigma)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\mathrm{d}s \\
&\le \varepsilon\left[\frac{1}{2}+\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{L^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_\sigma^t(t-s)^{n\alpha-1}\mathrm{d}s+\sum_{n=1}^\infty\frac{L^n}{\Gamma(n\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\int_\sigma^t(t-s)^{n\alpha-1}(s-\sigma)^\alpha\mathrm{d}s\right] \\
&\le \varepsilon\left[\frac{1}{2}+\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{L^na^\alpha}{\Gamma(n\alpha+1)}+\sum_{n=1}^\infty\frac{L^na^{(n+1)\alpha}}{\Gamma((n+1)\alpha+1)}\right] \\
&=\varepsilon\left[\frac{1}{2}+\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{1}{2}\left(E_n(La^\alpha)-1\right)+\frac{1}{L}\left(E_n(La^\alpha)-1-\frac{La^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right] \\
&=\varepsilon\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{L}\right)E_n(La^\alpha)-\frac{1}{L}\right] \\
&\le \varepsilon\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{L}\right)E_n(La^\alpha)\right].
\end{aligned}
$$

于是，定理得证。

4. 结论

本文我们研究了一类半线性分数阶时滞微分方程的Hyers-Ulam稳定性问题。在逼近解和精确解初始条件相同的情形中，我们从逼近解出发，根据逐次逼近法和Gronwall型不等式得到了满足Hyers-Ulam稳定系数的极限函数，并证明了该极限函数即为方程的精确解。我们紧接着对系统进行了优化处理，考虑在逼近解和精确解的初始条件之间能够被一个常数控制的情形。我们首先定义了一个连续线性算子，再利用不动点理论以及Gronwall型不等式证明了此时方程的Hyers-Ulam稳定性。

基金项目

国家自然科学基金(No. 11871064)和江苏省研究生科研创新计划(No. XKYCX20_010)。

参考文献

[1] Diethelm, K. (2010) The Analysis of Fractional Differential Equations. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-14574-2

[2] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam.

[3] Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications. Academic Press, San Diego.

[4] Ulam, S.M. (1960) A Collection of Mathematical Problems. Inter Science Publishers, New York.

[5] Hyers, D.H. (1941) On the Stability of the Linear Functional Equation. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **27**, 222-224. https://doi.org/10.1073/pnas.27.4.222

[6] Huang, J. and Li, Y. (2016) Hyers-Ulam Stability of Delay Differential Equations of First Order. *Mathematische Nachrichten*, **289**, 60-66. https://doi.org/10.1002/mana.201400298

[7] Wang, C. and Xu, T. (2015) Hyers-Ulam Stability of Linear Differential Equations Involving Caputo Fractional Derivatives. *Applications of Mathematics*, **60**, 383-393. https://doi.org/10.1007/s10492-015-0102-x

[8] Liu, K., Fečkan, M. and Wang, J. (2020) A Fixed-Point Approach to the Hyers-Ulam stability of Caputo-Fabrizio Fractional Differential Equations. *Mathematics*, **8**, Article No. 647. https://doi.org/10.3390/math8040647

[9] Tripathy, A.K. (2021) Hyers-Ulam Stability of Ordinary Differential Equations. CRC Press, Boca Raton.

[10] Park, C. (2010) Generalized Hyers-Ulam Stability of Functional Equations: A Fixed Point Approach. *Journal of Mathematics*, **14**, 1591-1608. https://doi.org/10.11650/twjm/1500405970

[11] Rassias, T.M. (1978) On the Stability of the Linear Mapping in Banach Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **72**, 297-300. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1978-0507327-1

[12] Jung, S.M. (2010) Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9637-4

[13] Rassias, T.M. (2000) On the Stability of Functional Equations and a Problem of Ulam. *Acta Applicandae Mathematicae*, **62**, 23-130. https://doi.org/10.1023/A:1006499223572

[14] Liu, L., Dong, Q. and Li, G. (2021) Exact Solutions and Hyers-Ulam Stability for Fractional Oscillation Equations with Pure Delay. *Applied Mathematics Letters*, **112**, Article ID: 106666. https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106666

[15] Wang, J. Shah, K. and Ali, A. (2018) Existence and Hyers-Ulam Stability of Fractional Nonlinear Impulsive Switched Coupled Evolution Equations. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **41**, 2392-2402. https://doi.org/10.1002/mma.4748

[16] Li, M., Wang, J. and O'Regan, D. (2019) Existence and Ulam's Stability for Conformable Fractional Differential Equations with Constant Coefficients. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **42**, 1791-1812. https://doi.org/10.1007/s40840-017-0576-7

[17] Weissinger, J. (1952) Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens. *Mathematische Nachrichten*, **8**, 193-212. https://doi.org/10.1002/mana.19520080123