Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(4), 2065-2070
Published Online April 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.114224

Hans汉斯

关于对偶模型分红问题的研究综述

毛晓桐

河北工业大学理学院，天津

收稿日期：2022年3月24日；录用日期：2022年4月18日；发布日期：2022年4月27日

摘　要

最优分红问题一直是保险精算领域中非常受关注的问题，何时分红和分红的大小直接影响公司的运营状况和股东满意程度。对偶模型一般适用于主打创新发明的公司，可用于描述具有稳定费用支出且盈利随机的经济现象。因此，本文对对偶风险模型的分红问题现状进行了梳理。

关键词

最优分红问题，对偶风险模型，随机控制理论

A Review of Research on Dividends of Dual Models

Xiaotong Mao

School of Science, Hebei University of Technology, Tianjin

Received: Mar. 24th, 2022; accepted: Apr. 18th, 2022; published: Apr. 27th, 2022

Abstract

The optimal dividend problem has always been a problem of great concern in the field of insurance actuarial. The timing and size of dividends directly affect the company's operating status and shareholders' satisfaction. Dual model is generally suitable for companies that focus on innovative inventions, and can be used to describe economic phenomena with stable expenses and random profits. Therefore, this paper sorts out the status quo of the optimal dividend problem of the dual risk model.

Keywords

Optimal Dividend Problem, Dual Risk Model, Stochastic Control Theory

文章引用: 毛晓桐. 关于对偶模型分红问题的研究综述[J]. 应用数学进展, 2022, 11(4): 2065-2070.
DOI: 10.12677/aam.2022.114224

1. 引言

分红问题一直以来是保险精算领域的热点研究问题，何时给股东派发红利以及给股东派发多少红利是公司和股东均关注的问题。分红额度太大或时机不恰当，会直接影响公司的运营状况；分红额度太小则不能满足股东需求。因此，确定一个最优分红策略使得公司破产前累计折现分红期望现值达到最大便显得尤为重要。该问题最早可追溯到 De Finetti [1]，他在 1957 年的第 15 届国际精算大会上提出，除了仅仅关注于保险公司的破产概率，更可以用最大化破产前累计分红量的标准来衡量保险公司的表现。他在一个非常简单的离散时间随机游动模型中证明了最优分红策略存在并为障碍策略，得出了确定最优障碍水平的方法。之后，Miyasawa [2]在 1962 年研究了更一般的随机游动模型，在相关假设下得到了最优分红策略为波段策略。1969 年，Gerbe [3]首次研究了连续时间下经典聚合风险模型中的最优分红问题，并用离散化技巧证明了最优策略为波段策略。特别地，当索赔额服从指数分布时，最优策略退化为障碍策略。直到二十世纪九十年代精算学者们开始把随机控制理论用到保险风险模型中，最优分红问题的研究才有了长足的发展。

近年来，对经典 Cramer-Lundberg 风险模型的对偶模型的研究也愈发受到学者们的关注。对偶模型相关文献早期可见于 Takacs [4]和 Seal [5]等用于养老基金问题的破产概率的研究。在 Mazza 和 Rulliere [6]中被明确命名为对偶风险模型。随着分红问题的发展，对偶模型的分红问题也逐渐成为研究焦点。该模型可用于描述具有稳定费用支出且盈利随机的经济现象，例如处于研发阶段的制药公司，进行长期固定自然资源投资的石油公司等。

本文主要对复合泊松对偶模型和谱正 Levy 风险模型的分红问题现状进行了梳理。

2. 复合泊松对偶模型

复合泊松对偶模型即为经典复合泊松模型也就是 C-L 模型的对偶模型，它将 C-L 模型的保费收入率替换成了费用支出率，索赔额过程替换成了收益过程。通常在一般分红中，也就是对于分红过程不加约束和限制时，最优的策略往往为障碍策略，因此早期关于对偶模型最优分红问题大部分都是基于障碍策略的前提下研究的。障碍策略是指，指定一个障碍水平，当盈余超过障碍水平时，超出部分立即分红，当盈余等于障碍水平时，将收入全部分红，当盈余低于障碍水平时不分红。Avanzi 和 Gerber [7]最先研究了障碍策略下复合泊松对偶模型的分红问题，他们给定了最优障碍策略水平 b^*，在收益额服从指数分布和混合指数分布时得到了值函数和最优分红策略的显示表达式，当考虑到收益额为一般分布的情况时，给出了一种新的方法——将 $V(u,b)$ 转化为 $W(b-u,b)$，通过拉普拉斯变换求解 W，进而得到原始值函数。Avanzi 和 Gerber [8]在文献[7]的基础上又加入了扰动项，同样根据拉普拉斯变换法确定了最优障碍水平，讨论了策略最优的条件，并指出对偶模型的最优策略为障碍策略。Cheung 等人[9]考虑了和文献[7]同样的问题，在文献[7]的结果基础上，对时间连续的对偶模型的进行了离散化模拟，证明了当跳的分布任意时也可以得到相应的性质，最后通过最大化分红贴现期望和破产时刻应用的固定惩罚现值之间的差异研究了 Dickson-Waters 修正后的分红问题，推广了 Avanzi 和 Gerber [7]的结论。Afonso [10]不同于之前的学者将分红时刻写为集合的形式，他为不同的分红情况提出了不同的关于分红时刻的公式，在障碍策略下为推导分红次数和单次分红的额度提供了新的思路。由于公司在经营过程中会受到诸多外界环境的影响，

盈余过程可能会被迫中止，即假设盈余过程有随机观测时间时，Peng 等人[11]就考虑了具有指数分布观测时间的复合泊松对偶模型，在给定障碍策略的前提下推导了值函数满足的积分微分方程，当收益和相互观测时间服从指数分布时找到了最优障碍水平。以上学者均是在障碍策略的前提下研究了复合泊松对偶模型的分红问题，但是并为证明在所有的可行分红策略中障碍策略是否是最优的。

注资是金融市场中一种常见的对抗金融风险的手段，当公司盈余过程即将跌破零也就是平时所说的破产时，可以通过发行股票或借贷等方式对公司进行注资，从而使得盈余过程得以继续下去。Yao 等人[12]考虑了含有注资的复合泊松对偶模型的分红问题，且在分红和注资时加入了比例交易费用，不同于前面的文献在指定分红方式下研究分红策略，他们是在所有可行策略下寻找最优策略，通过借助随机控制理论中的 HJB 方程，在收益服从指数分布时得到了值函数的显示解和最优策略为障碍策略，推广了文献[7]中关于值函数表达式的结论。Avanzi 等人[13]在文献[11]的模型基础上加入了扩散扰动项，通过分别证明两个子问题——不注资和注资时障碍策略都是最优策略，在跳服从混合指数分布时得到了最优策略为两个子问题的策略组合，并且推测在带有扰动项的复合泊松对偶模型问题中，最优策略和跳服从的分布无关。

事实上，由于障碍策略对分红率不加控制不实施约束，在实际操作中往往会直接导致公司破产，这种情况是不理想的也是人们不愿意发生的。因此，学者们考虑了对分红率加以限制的分红策略，即阈值策略。阈值策略是指分红时指定一个阈值水平，当盈余超过阈值水平时，高出部分以某个有限的分红速度分红，当盈余低于阈值水平时不分红。Ng [14]最先研究了阈值策略下复合泊松对偶模型的分红问题，他用$V_1(u,b)$和$V_2(u,b)$分别表示盈余水平低于阈值水平 b 和超出阈值水平 b 时的累计折现分红期望，导出了$V_1(u,b)$和$V_2(u,b)$满足的两个积分微分方程，说明了当收益服从指数分布和混合指数分布时，如何只使用两个积分微分方程中的一个来求解方程，并利用拉普拉斯变换法对收益分布为一般情况的折现分红值进行了讨论。Ng [15]又研究了当收益服从相位分布时的复合对偶模型的最优分红问题，利用相位分布的性质导出了两对上穿和下穿临界点的概率，且分别在阈值策略和障碍策略的前提下得到了值函数的显示表达式。Liu 等人[16]则研究了在一种组合策略(超过阈值水平后以固定速度分红；当严格递增的周期性分红决策时间观察到盈余水平超过阈值水平时，超出部分立即分红)下分红的带扰动项的复合泊松对偶模型，他们尝试利用拉普拉斯变换法推导任意收益分布下的值函数，通过引入一些辅助函数刻画了积分微分方程的解，证明了当收益大小分布有一个有理的拉普拉斯变换时可以得到值函数显示表达式，并根据一些数值例子证明了该方法的实用性。

尽管文献[7]中已经提到了注资引发的比例交易费用，但在实际的保险金融市场中，分红或注资等一些金融操作往往还会带有固定交易费用，因此，考虑固定交易费用带来的影响就变得具有重要的现实意义。固定交易费用会引起数学上的脉冲控制问题，使得值函数发生变化，分红策略也变得更加复杂。1995 年，Jeanblanc-Picque 和 Shiryaev [17]首次应用了脉冲控制理论来得到最优的分红策略，他们是在每次分红带有交易费用的条件下，对带漂移的布朗运动这一扩散模型进行了研究。此后，Paulsen [18]、Cadenillas 等人[19]、Bai 和 Guo [20]、Thonhauser 和 Albrecher [21]、Cheng 等人[22]、He 和 Liang [23]等学者在不同模型下研究了脉冲分红问题。

完全解决脉冲控制问题实际上具有更高的难度，因此，关于对包含脉冲控制问题的复合泊松对偶风险模型的研究成果并不是十分的丰富。Yao 等人[24]研究了注资带有固定交易费用的复合泊松对偶模型中的最优分红和注资问题，通过引入 QVI 方程，在假设值函数为凹函数的情况下，对收益服从指数分布和混合指数分布时 QVI 不等式的解的形式进行了启发式的猜想并成功求解，得到了值函数的数值解和相应的最优分红和注资策略。Yao 等人[25]继续考虑了文献[24]中的模型，与之不同的是他们限制了分红的速

率且不允许破产发生，同样在假设值函数为凹函数的情况下，给出了 QVI 和验证定理，发现此时的最优策略为阈值策略，当固定交易费用增大时，注资额度和分红阈值应该相应增大，减少注资次数，该结果与实际常识也比较符合。以上均为注资引起的脉冲控制问题，实际上受税收等因素的影响，股东在收到分红时往往也需要支付比例及固定交易费用。陈树敏和何春雄[26]考虑了分红时带比例及固定交易费用的复合泊松对偶模型的分红问题，他们与文献[20]中关于复合泊松风险模型脉冲分红问题的研究使用了同样的方法，通过脉冲控制法直观的推导了值函数满足的 QVI 不等式，在收益服从指数分布时对 QVI 进行了求解并根据验证定理表明该解确为值函数，结果表明，当固定交易费用较小时，最优策略为 1-波段策略；固定交易费用较大时，盈余高出分红临界点时全部分红，然后破产。

3. 谱正 Levy 风险模型

Levy 过程简要来说，就是轨道左极右连的平稳独立增量过程，在风险理论中，存在谱负 Levy 风险模型和谱正 Levy 风险模型，分别可以看做是复合泊松风险模型和复合泊松对偶模型的推广模型。对谱负 Levy 风险模型的研究较早，成果也比较丰富，随着对偶模型分红问题的发展，谱正 Levy 风险模型也吸引了学者们的注意。谱正 Levy 风险过程包含 Levy 三元组 (c,σ,v)，其中 v 是 R_+ 上的 Levy 测度，满足一定的积分条件，风险过程具有特定形式的拉普拉斯指数。

Bayraktar [27]在不注资和注资两种情况下研究了谱正 Levy 过程的一般分红问题。他先根据谱负 Levy 过程中的已有结果启发式的构造了这两种情况下的候选解，并证明了该解确为所求值函数，又利用谱正 Levy 过程的波动理论证明了障碍策略在一般分红中对所有谱正 Levy 过程的最优性，并通过拉普拉斯变换对最优障碍水平进行了刻画。

文献[27]中并未对分红过程加以限制，考虑到实际情况，分红速度一般会受到限制和约束。Yin 等人[28]在假设分红率为常数的情况下证明了谱正 Levy 过程中最优分红策略为阈值策略，用尺度函数推出了破产前分红折现期望现值，给出了其满足的积分微分方程，刻画了最优阈值水平，并证明了此时阈值策略的最优性。事实生活上，很多公司派发红利时并不会单纯使用一种策略，Avanzi 等人[29]就假设了分红可以随时以有限利率连续分红或者直接一次性分红，同样使用尺度函数推导了值函数的显示公式和相应的验证定理，证明了此时的最优策略是障碍策略和阈值策略的结合。Perez 和 Yamazaki [30]为一般的谱正 Levy 过程加上了额外的终端/破产罚款，他们假设此时周期策略为最优的，在假设值函数平滑的条件下得到了候选的最优障碍水平并给出了相应的验证定理，最后用尺度函数给出了详细的值函数和最优策略。

当考虑到注资或分红具有固定交易费用时，Bayraktar 等人[31]延续了文献[27]的研究思路，与谱负 Levy 过程中带固定交易费用的分红问题最优策略不会是障碍策略的结论不同，他们证明了常数固定交易费用下谱正 Levy 过程的最优分红策略为形如 (c_1,c_2) 策略的特殊障碍策略，用尺度函数表示出了值函数并证明了该策略的最优性，且当固定交易费用趋近于零时，所得到的值函数和 c_1、c_2 的值收敛于文献[27]的相应结论。Zhao 等人[32]同样考虑了谱正 Levy 过程下注资引起固定交易费用的最优分红和注资问题，与文献[31]不同的是，他们还引入了可能会随时终止余额过程的随机观测时间，同样用尺度函数表示出了值函数和其满足的 QVI 不等式，他们将原优化问题分成两个次优化问题(带注资和不带注资)分别解决，得到了原优化问题的最优策略。他们与文献[27]思路类似，在解决次优化问题时启发式地认为在某些条件下障碍策略最优，并依此推导值函数和具体的最优策略。Zhao 等人[33]与文献[32]同样将谱正 Levy 过程分红原问题分为了考虑两个分别带注资和不带注资的次优化问题(注资包含比例和固定交易费用)，不同的是这次直接给定了具有指数分红决策时间和连续偿付能力检测的周期策略，根据谱正 Levy 过程的波动理论找到了最优策略，发现当固定交易费用趋于零时，得到了与文献[30]相同的结果。

4. 结论

可以看出，关于对偶模型分红问题的研究思路大致分为两类：一类是在给定的分红策略(如障碍策略和阈值策略)下考虑分红问题，用来推导值函数，寻找最优分红水平(最优障碍和阈值水平)，如文献[7] [8] [10] [11] [14] [15] [28] [30] [33]等；一类是不给定分红策略形式，复合泊松对偶模型中通过动态规划原理、HJB 方程(积分微分方程)或 QVI 不等式等方法，谱正 Levy 风险模型中通过尺度函数、积分微分方程、QVI 不等式等方法，给出相应的验证定理，推出最优分红策略，如文献[12] [24] [25] [26] [31] [32]等。

尽管对于上述两种思路的研究和理解已经达到了一定成熟的水平，但仍然存在一些尚未解决的问题：

1) 复合泊松对偶模型中，当没有指定分红策略时，此时需要运用随机控制理论中的 HJB 方程或 QVI 不等式等工具，但由于收益服从的分布具有任意性，给 HJB 方程或 QVI 不等式的一般式求解造成了极大的困难。现有的文献大多是当收益服从指数分布或混合指数分布等时推导出了值函数和最优策略的显示表达式，但对于收益服从一般分布的情况缺乏对值函数的一般求解方法，也未给出对最优分红策略的严格的数值分析和具体刻画；

2) 无论是复合泊松对偶模型还是谱正 Levy 风险模型，在给出验证定理和最优策略时，都假设了值函数的光滑性条件，这就使得最后的结果具有一定的局限性。

参考文献

[1] De Finetti, B. (1957) Su unimpostzione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, 433-443.

[2] Miyasawa, K. (1962) An Economical Survival Game. *Journal of Operations Research Society of Japan*, **4**, 95-113.

[3] Gerber, H.U. (1969) Entscheidungskriterien fuer den zusammengesetzten Poisson-prozess. *Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker*, **69**, 185-227.

[4] Takacs, L. (1967) On Combinatorial Methods in the Theory of Stochastic Processes. Columbia University, New York.

[5] Seal, H.L. (1969) Stochastic Theory of a Risk Business. John Wiley & Sons, New York.

[6] Mazza, C. and Rulliere, D. (2004) A Link between Wave Governed Random Motions and Ruin Processes. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **35**, 205-222. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2004.07.014

[7] Avanzi, B., Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. (2007) Optimal Dividends in the Dual Model. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **41**, 111-123. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2006.10.002

[8] Avanzi, B. and Gerber, H.U. (2008) Optimal Dividends in the Dual Model with Diffusion. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **38**, 653-667. https://doi.org/10.1017/S0515036100015324

[9] Cheung, E.C.K. and Drekic, S. (2008) Dividend Moments in the Dual Risk Model: Exact and Approximate Approaches. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **38**, 399-422. https://doi.org/10.1017/S0515036100015221

[10] Afonso, L.B., Rui, M. and Reis, A. (2013) Dividend Problems in the Dual Risk Model. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **53**, 906-918. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.10.003

[11] Peng, D., Liu, D. and Liu, Z. (2013) Dividend Problems in the Dual Risk Model with Exponentially Distributed Observation Time. *Statistics & Probability Letters*, **83**, 841-849. https://doi.org/10.1016/j.spl.2012.11.025

[12] Yao, D.J., Yang, H.L. and Wang, R.M. (2010) Optimal Financing and Dividend Strategies in a Dual Model with Proportional Costs. *Journal of Industrial Management Optimization*, **6**, 761-777. https://doi.org/10.3934/jimo.2010.6.761

[13] Avanzi, B., Shen, J. and Wong, B. (2011) Optimal Dividends and Capital Injections in the Dual Model with Diffusion. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **41**, 611-644. https://doi.org/10.2139/ssrn.1709174

[14] Ng, A.C.Y. (2009) On a Dual Model with a Dividend Threshold. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **44**, 315-324. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.11.011

[15] Ng, A.C.Y. (2010) On the Upcrossing and Downcrossing Probabilities of a Dual Risk Model with Phase-Type Gains. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **40**, 281-306. https://doi.org/10.2143/AST.40.1.2049230

[16] Liu, Z., Chen, P. and Hu, Y.J. (2020) On the Dual Risk Model with Diffusion under a Mixed Dividend Strategy. *Applied Mathematics and Computation*, **376**, Article ID; 125115. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125115

[17] Jeanblanc, M. and Shiryaev, A. (1995) Optimization of the Flow of Dividends. *Russian Mathematical Surveys*, **50**,

257-277. https://doi.org/10.1070/RM1995v050n02ABEH002054

[18] Paulsen, J. (2007) Optimal Dividend Payments until Ruin of Diffusion Processes When Payments Are Subject to Both Fixed and Proportional Costs. *Advances in Applied Probability*, **39**, 669-689. https://doi.org/10.1239/aap/1189518633

[19] Cadenillas, A., Choulli, T., Taksar, M., *et al*. (2006) Classical and Impulse Stochastic Control for the Optimization of the Dividend and Risk Policies of an Insurance Firm. *Mathematical Finance*, **16**, 181-202. https://doi.org/10.1111/j.1467-9965.2006.00267.x

[20] Bai, L.H. and Guo, J.Y. (2010) Optimal Dividend Payments in the Classical Risk Model When Payments Aresubject to Both Transaction Costs and Taxes. *Scandinavian Actuarial Journal*, **2010**, 36-55. https://doi.org/10.1080/03461230802591098

[21] Thonhauser, S. and Albrecher, H. (2011) Optimal Dividend Strategies for a Compound Poisson Process under Transaction Costs and Power Utility. *Stochastic Models*, **27**, 120-140. https://doi.org/10.1080/15326349.2011.542734

[22] Cheng, G.P., Wang, R.M. and Yao, D.J. (2018) Optimal Dividend and Capital Injection Strategy with Excess-of-Loss Reinsurance and Transaction Costs. *Journal of Industrial and Management Optimization*, **14**, 371-395. https://doi.org/10.3934/jimo.2017051

[23] He, L. and Liang, Z.X. (2009) Optimal Financing and Dividend Control of the Insurance Company with Fixed and Proportional Transaction Costs. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **44**, 88-94. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2008.10.001

[24] Yao, D.J., Yang, H.L. and Wang, R.M. (2011) Optimal Dividend and Capital Injection Problem in the Dual Model with Proportional and Fixed Transaction Costs. *European Journal of Operational Research*, **211**, 568-576. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.01.015

[25] Yao, D.J., Wang, R.M. and Xu, L. (2014) Optimal Dividend and Capital Injection Strategy with Fixed Costs and Restricted Dividend Rate for a Dual Model. *Journal of Industrial & Management Optimization*, **10**, 1235-1259. https://doi.org/10.3934/jimo.2014.10.1235

[26] 陈树敏, 何春雄. 带比例及固定费用的对偶模型分红策略[J]. 应用概率统计, 2013, 29(2): 136-150.

[27] Bayraktar, E., Kyprianou, A.E. and Yamazaki, K. (2014) Optimal Dividends in the Dual Model under Transaction Costs. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **54**, 133-143. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.11.007

[28] Yin, C.C., Wen, Y.Z. and Zhao, Y.X. (2014) On the Optimal Dividend Problem for a Spectrally Positive Lévy Process. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **44**, 635-651. https://doi.org/10.1017/asb.2014.12

[29] Avanzi, B., Pérez, J.L., Wong, B., *et al*. (2017) On Optimal Joint Reflective and Refractive Dividend Strategies in Spectrally Positive Lévy Models. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **72**, 148-162. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2016.10.010

[30] Perez, J.L. and Yamazaki, K. (2017) On the Optimality of Periodic Barrier Strategies for a Spectrally Positive Lévy Process. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **77**, 1-13. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.08.001

[31] Bayraktar, E., Kyprianou, A.E. and Yamazaki, K. (2013) On Optimal Dividends in the Dual Model. *ASTIN Bulletin*: *The Journal of the IAA*, **43**, 359-372. https://doi.org/10.1017/asb.2013.17

[32] Zhao, Y.X., Wang, R.M., Yao, D.J., *et al*. (2015) Optimal Dividends and Capital Injections in the Dual Model with a Random Time Horizon. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **167**, 272-295. https://doi.org/10.1007/s10957-014-0653-0

[33] Zhao, Y.X., Chen, P. and Yang, H.L. (2017) Optimal Periodic Dividend and Capital Injection Problem for Spectrally Positive Lévy Processes. *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **74**, 135-146. https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.03.006