

# 定义于双曲抛物面上的多元Lagrange插值问题

刘金乐, 崔利宏

辽宁师范大学, 辽宁 大连

收稿日期: 2022年3月28日; 录用日期: 2022年4月22日; 发布日期: 2022年4月29日

## 摘要

对计算数学领域的重要内容多元Lagrange插值的问题做出了研究。首先对定义于双曲抛物面上的多元Lagrange插值下定义并对定义进行了简单的分析, 随后, 提出了迭加构造方法且对双曲抛物面上的结点组能否构成插值唯一可解结点组给出了判定定理, 对多元函数插值的意义进行了一些简单的分析, 最终通过三次分别选取不同的被插值函数与不同的双曲抛物面的方程对所得方法展开进一步的验证。

## 关键词

双曲抛物面, 唯一可解结点组, 多元Lagrange插值, 迭加插值法

# Multivariate Lagrange Interpolation Defined on Hyperbolic Paraboloid

Jinle Liu, Lihong Cui

Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 28<sup>th</sup>, 2022; accepted: Apr. 22<sup>nd</sup>, 2022; published: Apr. 29<sup>th</sup>, 2022

## Abstract

Multivariate Lagrange interpolation, an important content in the field of computational mathematics, is studied. Firstly, the multivariate Lagrange interpolation defined on hyperbolic paraboloid is defined and the definition is simply analyzed. Then, the superposition construction method is proposed and the judgment theorem is given for whether the node group on hyperbolic paraboloid can form the unique solvable node group of interpolation. The significance of multivariate function interpolation is simply analyzed. Finally, the method is further verified by selecting different interpolated functions and hyperbolic paraboloid equations three times respectively.

## Keywords

### Hyperbolic Paraboloid, Regular Set of Nodes, Multivariate Lagrange Interpolation, Superposition Interpolation Method

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近年来, 有关实际生产生活中经常涉及到的多元函数插值的问题一直作为极其重要的内容被研究。多元函数插值在点焊质量控制、油罐储油量测量等方面都具有广泛的应用[1], 关于多元函数插值的一个基本问题就是多元函数插值的正则性问题, 即多元函数插值的存在性与唯一性的问题。迄今为止, 对此问题国内外学者基本分为两个判别: 其一为使用已知的结点组来构造次数尽可能低的对应的适定插值多项式空间, 其二为使用已知的插值多项式空间寻找唯一可解的插值结点组, 对于科研生产中的某类问题, 虽然目前有关在整个空间进行插值及关于定义于空间中一般代数流形的插值结果较系统, 但对于较高价值的具体流形上的插值结果相对较少。

双曲抛物面是直纹二次曲面中重要的代数曲面, 它是通过直线运动产生的, 并且它具有两族直母线, 由于它的这个特性, 它的外观较为符合大众的审美, 因此在生活中具有独特的应用[2], 例如其在建筑设计方面应用尤其广泛, 双曲抛物面型屋顶的结构设计, 大跨度的屋顶结构, 常用的有悬索结构, 薄膜结构, 网壳结构, 前两者以悬索为主支撑, 后者则以杆件为主体。双曲抛物面型结构的屋顶具有便于建筑排水、外形美观、结构稳定等优点。除此之外, 双曲抛物面在宇宙学、电力工程中都有一定的应用, 因此研究双曲抛物面上的 Lagrange 插值的问题对生产生活的发展具有重要的意义。

## 2. 基本定义和基本定理

本文研究三维欧式空间  $R^3$  中的双曲抛物面  $F = \left\{ (x, y, z) \in R^3 \mid 2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$  上的 Lagrange 插值问题。

首先引入若干基本概念。

设  $n$  为非负整数, 令  $P_n^{(3)}$  是全部关于  $x, y, z$  的全次数为  $n$  的代数多项式组成的集合, 即  $\dim P_n^{(3)} = \binom{n+3}{3}$ 。

定义 1 ( $P_n^{(3)}$  的插值唯一可解结点组)

设  $m = \binom{n+3}{3}$ , 使  $A = \{Q_i\}_1^m$  是  $R^3$  中的  $m$  个互异点形成的集合, 若对任意给定数组  $\{f_i \in R \mid i = 1, \dots, m\}$ ,

恒存在唯一多项式  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 且有:  $p(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$ , 称  $A$  为  $P_n^{(3)}$  的一个唯一可解结点组。

不妨设  $P_n^{(3)}(F)$  是  $P_n^{(3)}$  加了一个限制条件  $F$ , 以定义一为基础, 以下将给出另一个定义。

定义 2 ( $F$  上的插值唯一可解结点组)

设  $F$  如上定义,  $m = \dim P_n^{(3)}(F)$ , 称  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \subset F$  为  $F$  上的一个  $n$  次插值唯一可解结点组, 若关于任意给定的数组  $\{f_i \in R \mid i = 1, \dots, m\}$ , 恒有多项式  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 且  $p(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$ ,

$$\dim P_n^{(3)}(F) = \binom{n+3}{n} - \binom{n+3-2}{3}.$$

首先定义一叙述了实数域内的所有最高次数至  $n$  的三元多项式上的插值唯一可解结点组, 定义二随后将此多项式限制为双曲抛物面上并给出限制于双曲抛物面上的最高至  $n$  次的多项式上的插值唯一可解结点组, 在此基础上, 我们也能够得到定义于双曲抛物面上的插值唯一可解结点组所包含的结点数是要与插值空间的维数相等的, 为了展开进一步的研究, 下面将要介绍通过双曲抛物面法构造插值唯一可解结点组的方法, 这个尤为重要的方法我们通过先介绍构造  $P_n^{(3)}$  的插值唯一可解结点组的方法, 再增加  $F$  这个限制条件, 最终得出构造插值唯一可解结点组的方法。

定理 1 (添加双曲抛物面法构造  $P_n^{(3)}$  插值唯一可解结点组)。

设  $m$  由上定义,  $r = \binom{n+5}{3}$ ,  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \notin F$  为  $P_n^{(3)}$  的一个唯一可解结点组, 而  $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r$  是  $F$  的一个  $n+2$  次唯一可解结点组, 则  $\{Q_i\}_{i=1}^r = A \cup B$  必构成  $P_{n+2}^{(3)}$  的唯一可解结点组。

证明: 设  $Q_i = (x_i, y_i, z_i), i = 1, \dots, r$ 。由于  $B$  为  $F$  的  $n+2$  次唯一可解结点组, 由定义 2, 对任意给定数组  $\{f_i | i = m+1, \dots, r\}$  恒有多项式  $p_i(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$  且  $p_i(Q_i) = f_i, i = m+1, \dots, r$ 。

又由  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m \notin F$  关于  $P_n^{(3)}$  的一个唯一可解结点组, 由定义 1 对任意数组  $\{f_i | i = 1, \dots, m\}$  恒有多项式  $p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  使  $p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, i = 1, \dots, m$ , 其中  $(x_i, y_i, z_i)$  为  $Q_i, i = 1, \dots, m$  三维坐标, 构造多项式

$$p(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left(2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) p_2(x, y, z)$$

显然  $p(x, y, z) \in P_{n+2}^{(3)}$  且  $p(Q_i) = p_1(Q_i) + \left(2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) p_2(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, r$ 。

则由定义 1,  $A \cup B$  为  $P_{n+2}^{(3)}$  的唯一可解结点组。

定理 2 (添加圆锥曲线法构造  $F$  插值唯一可解结点组)。

设  $A = \{Q_i\}_{i=1}^{(n+1)^2}$  为  $F$  上  $n$  次插值唯一可解结点组, 平面  $p(x, y, z) \cap A = \emptyset$  与  $F$  横截相交于圆锥曲线  $C(x, y, z)$ ,  $B$  是  $C$  上一个  $n+1$  次唯一可解结点组, 则  $A \cup B$  必构成  $F$  上的一个  $n+1$  次唯一可解结点组。

添加圆锥曲线法是构造双曲抛物面上的插值唯一可解结点组的一个方法[3]。早在 1956 年, 梁学章教授第一次通过几何的手段解决了多元函数插值的唯一存在性问题, 随后梁学章教授又给出了添加圆锥曲线的方法来构造二元函数的插值唯一可解结点组。随着科技的迅速发展, 由于多元函数插值的问题在生产科研中应用甚广, 例如在飞机机身设计、汽车与轮船的外形设计等方面多元函数插值的问题均存在一定的应用。与此相关的内容一直作为计算数学领域的重要内容被研究, 依据梁学章教授以及国内外学者的探究得到的结论, 我们也可以使用添加圆锥曲线的方法对构造三元函数上的 Lagrange 插值的唯一可解结点组的问题做进一步的探究。

对于沿双曲抛物面上的插值唯一可解结点组, 我们给出下面的判定定理并给出判定定理的证明。

定理 3 ( $F$  上的  $n$  次插值唯一可解结点组判定定理)

如果存在  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 且有  $p(Q_i) = 0, i = 1, \dots, m$ , 满足条件的  $p(x, y, z)$  在双曲抛物面  $F$  上恒为零的充分必要条件是  $F$  上的  $m = (n+1)^2$  个互不相同的点  $\{Q_i\}_{i=1}^m$  能够做成定义于双曲抛物面  $F$  上的  $n$  次插值唯一可解结点组。

证明: 首先给出必要性的证明设  $p(x, y, z) \in P_n^{(3)}$ , 同时有  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in A \cup B$  根据条件能够得到,  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in F$ 。进而, 取  $F$  上的一个  $n$  次插值唯一可解结点组  $\tilde{A} \subset F$ , 有  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A}$ , 即  $p(Q_i) = 0, \forall Q_i \in \tilde{A} \cup B$ , 又由  $\tilde{A} \cup B$  为  $P_n^{(3)}$  的插值唯一可解结点组, 因此满足  $p(x, y, z) \equiv 0$ 。

下面给出充分性的证明不妨令  $r = \binom{n+3}{3}$ , 取  $B = \{Q_i\}_{i=m+1}^r \notin F$  是  $P_{n-2}^{(3)}$  的唯一可解结点组, 可断言:  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  为  $P_n^{(3)}$  的唯一可解结点组。事实上, 对任意  $\{f_i\}_{i=1}^r$ , 因  $A = \{Q_i\}_{i=1}^m$  是  $F$  的  $n$  次唯一可解结点组, 故有多项式  $p_1(x, y, z) \in P_n^{(3)}$  且  $p_1(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, m$ 。

又有  $B \notin F$  且是  $P_{n-2}^{(3)}$  的唯一可解结点组, 则存在多项式  $p_2(x, y, z) \in P_{n-2}^{(3)}$  有

$$p_2(Q_i) = \frac{f_i - p_1(Q_i)}{2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, i = m+1, \dots, r$$

则多项式

$$\tilde{p}(x, y, z) = p_1(x, y, z) + \left(2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) p_2(x, y, z)$$

有  $\tilde{p}(Q_i) = f_i, i = 1, \dots, r$ , 由定义  $\{Q_i\}_{i=1}^r$  为  $P_n^{(3)}$  的唯一可解结点组, 在如上过程中取  $f_i = 0, i = 1, \dots, m$ , 那么上述的  $p_1(x, y, z) \equiv 0$ , 且此时

$$\tilde{p}(x, y, z) = \left(2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$$

满足定理条件的多项式, 故由  $P_n^{(3)}$  中满足相同条件的多项式的唯一存在性有

$$p(x, y, z) = \tilde{p}(x, y, z) = \left(2z - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) p_2(x, y, z) \in P_n^{(3)}$$

即在  $F$  上  $p(x, y, z)$  恒为零。

上文我们所介绍的相关定义及定理主要是围绕三元多项式展开的, 有关一元、二元多项式的插值问题国内外学者已做出了较为系统完善的研究[4], 于是我们将研究对象转向更复杂的多项式的插值问题。下面我们将对上述结论给出三个例子。

#### 有关结论的例子:

例 1: 首先我们先设出双曲抛物面以及被插值函数的方程, 令上文中的双曲抛物面方程  $F$  中的  $a^2 = b^2 = 1$  得到双曲抛物面的方程为  $x^2 - y^2 - 2z = 0$ , 再取一被插值函数为  $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$ ,

随后在双曲抛物面上取互不相同的九个点, 取得九个点在空间中的点坐标分别为:  $M_1(1, 1, 0)$ ,  $M_2(-1, 1, 0)$ ,  $M_3(1, -1, 0)$ ,  $M_4(2, 0, 2)$ ,  $M_5(0, 2, -2)$ ,  $M_6(-2, 0, 2)$ ,  $M_7(0, -2, -2)$ ,  $M_8(3, 1, 4)$ ,  $M_9(-3, 1, 4)$ , 并在双曲抛物面外取一点, 其坐标为  $M_0(1, 1, 1)$ , 那么由双曲抛物面上互不相同的九个点以及双曲抛物面外的一点构成一个点组, 结合上文的定理一便知: 点组  $\{M_0, M_1, \dots, M_9\}$  为  $P_2^{(3)}$  的唯一可解结点组, 如图 1, 为求出这十个点上的二次插值多项式, 我们将此二次插值多项式方程设为

$$p(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

将适定结点带入  $p(M_i) = f(M_i), i = 0, 1, \dots, 9$  故有方程组  $A * X = B$  且有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & 16 & 3 & 12 & 4 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 1 & 16 & -3 & -12 & 4 & -3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0.14 \\ 0.14 \\ 0.14 \\ 0.14 \\ 0.04 \\ 0.04 \end{bmatrix}$$

解方程组得到

$$\begin{cases} a_1 = 2.7922 \times 10^{15} \\ a_2 = 4.6537 \times 10^{15} \\ a_3 = -1.8615 \times 10^{15} \\ a_4 = -0.2067 \\ a_5 = 0.1033 \\ a_6 = 0.2067 \\ a_7 = 0.1550 \\ a_8 = 0.4133 \\ a_9 = 1.8615 \times 10^{15} \\ a_{10} = -7.4458 \times 10^{15} \end{cases}$$

代入可得

$$f(x, y, z) = 2.7922 \times 10^{15} x^2 + 4.6537 \times 10^{15} y^2 - 1.8615 \times 10^{15} z^2 - 0.2067xy + 0.1033xz + 0.2067yz + 0.1550x + 0.4133y + 1.8615 \times 10^{15} z - 7.4458 \times 10^{15}$$

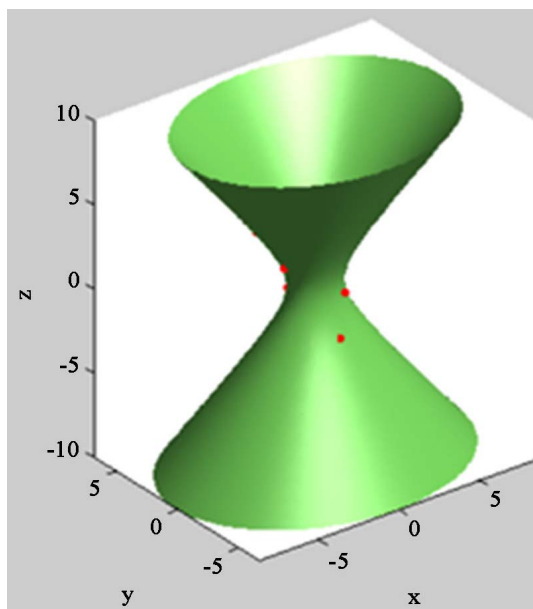


Figure 1. The effect picture of hyperbolic paraboloid point taking  
图 1. 双曲抛物面取点效果图

下面取点(1, 1, 1)与(1, 1, 0)二者的插值结果是 0.6716, 0.0516, 二者的精确值分别为 0.51, 因此通过计算得到的误差分别为  $m_1 = |0.6716 - 0.5| \approx 0.1716$ ,  $m_2 = |0.0516 - 1| \approx 0.9484$ 。

例 2: 同上, 首先我们先设出双曲抛物面以及被插值函数的方程, 令上文中的双曲抛物面方程  $F$  中的  $a^2=1$  且  $b^2=2$  得到双曲抛物面的方程为  $4z-2x^2+y^2=0$ , 再取一被插值函数为  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ , 随后在双曲抛物面上取互不相同的九个点, 取得九个点在空间中的点坐标分别为:  $M_1(2, 0, 2)$ ,  $M_2(0, 2, -1)$ ,  $M_3(2, 4, -2)$ ,  $M_4(1.41, 0, 1)$ ,  $M_5(1, 1.41, 0)$ ,  $M_6(0, 1, -0.25)$ ,  $M_7(1.41, 2, 0)$ ,  $M_8(2.82, 0, 4)$ ,  $M_9(0, 4, -4)$ , 并在双曲抛物面外取一点, 其坐标为  $M_0(1, 0, 0)$ , 那么由双曲抛物面上互不相同的九个点以及双曲抛物面外的一点构成一个点组, 结合上文的定理一便知: 点组  $\{M_0, M_1, \dots, M_9\}$  为  $P_2^{(3)}$  的唯一可解结点组, 如图 2, 为求出这十个点上的二次插值多项式, 我们将此二次插值多项式方程设为

$$p(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

将适定结点带入  $p(M_i) = f(M_i), i=0, 1, \dots, 9$  故有方程组  $A * X = B$  且有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 16 & 4 & 8 & -4 & -8 & 2 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1.41 & 0 & 1.41 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1.41 & 0 & 0 & 1 & 1.41 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0.0625 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 1 & -0.25 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2.82 & 0 & 0 & 1.41 & 2 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 16 & 0 & 11.28 & 0 & 2.82 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 16 & 16 & 0 & 0 & -16 & 0 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.82 \\ 2.24 \\ 4.90 \\ 1.73 \\ 1.73 \\ 1.03 \\ 2.45 \\ 4.90 \\ 5.66 \end{bmatrix} \quad \text{解方程组得到}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0.5119 \\ a_2 = 0.3576 \\ a_3 = 0.2072 \\ a_4 = -0.8723 \\ a_5 = -0.5550 \\ a_6 = 0.2835 \\ a_7 = 0.4927 \\ a_8 = 0.8829 \\ a_9 = 0.5915 \\ a_{10} = -0.0046 \end{cases}$$

代入可得

$$f(x, y, z) = 0.5119x^2 + 0.3576y^2 + 0.2072z^2 - 0.8723xy - 0.5550xz \\ + 0.2835yz + 0.4927x + 0.8829y + 0.5915z - 0.0046$$

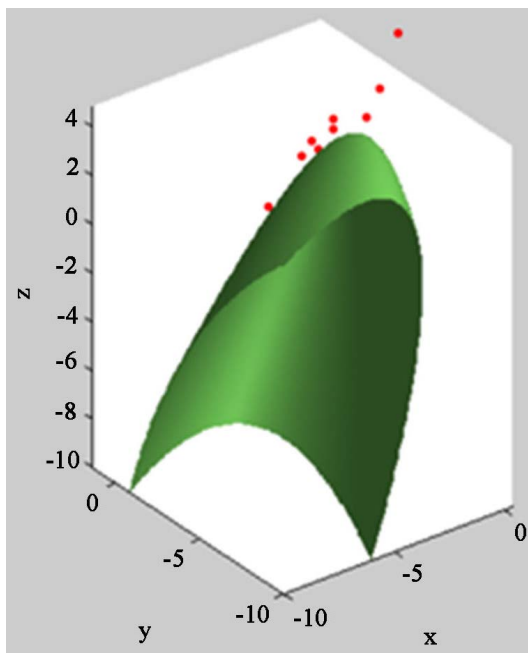


Figure 2. The effect picture of hyperbolic paraboloid point taking  
图 2. 双曲抛物面取点效果图

下面取点(1, 0, 1)与(2, 1, 0)二者的插值结果是 1.2437, 2.5243, 二者的精确值分别为  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{5}$ , 因此通过计算得到的误差分别为  $m_1 = |1.2437 - \sqrt{2}| \approx 0.1703$ ,  $m_2 = |2.5243 - \sqrt{5}| \approx 0.2882$ 。

例 3: 首先我们还是先设出双曲抛物面以及被插值函数的方程, 令上文中的双曲抛物面方程  $F$  中的  $a^2 = 4, b^2 = 1$  得到双曲抛物面的方程为  $x^2 - 4y^2 - 8z = 0$ , 再取一被插值函数为  $f(x, y, z) = \sqrt{2x^2 + y^2 + z^2}$ , 随后在双曲抛物面上取互不相同的九个点, 取得九个点在空间中的点坐标分别为:  $M_1(0, 2, -2)$ ,  $M_2(2, 1, 0)$ ,  $M_3(6, 2, 2)$ ,  $M_4(-2, 1, 0)$ ,  $M_5(-2, -1, 0)$ ,  $M_6(0, -2, -2)$ ,  $M_7(4, 0, 2)$ ,  $M_8(-4, 0, 2)$ ,  $M_9(3, 0.5, 1)$ , 并在双曲抛物面外取一点, 其坐标为  $M_0(1, 1, 1)$ , 那么由双曲抛物面上互不相同的九个点以及双曲抛物面外的一点构成一个点组, 结合上文的定理一便知: 点组  $\{M_0, M_1, \dots, M_9\}$  为  $P_2^{(3)}$  的唯一可解结点组, 如图 3, 为求出这十个点上的二次插值多项式, 我们将此二次插值多项式方程设为

$$p(x, y, z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10}$$

将适定结点带入  $p(M_i) = f(M_i), i = 0, 1, \dots, 9$  故有方程组  $A * X = B$  且有

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 36 & 4 & 4 & 12 & 12 & 4 & 6 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 16 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 16 & 0 & 4 & 0 & -8 & 0 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 0.25 & 1 & 1.5 & 3 & 0.5 & 3 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.82 \\ 3 \\ 8.94 \\ 3 \\ 3 \\ 2.82 \\ 6 \\ 6 \\ 4.39 \end{bmatrix} \text{ 解方程组得到}$$



$$\begin{cases} a_1 = -3.0580 \times 10^{15} \\ a_2 = 8.7370 \times 10^{15} \\ a_3 = -3.0688 \times 10^{15} \\ a_4 = -2.0532 \\ a_5 = -1.0369 \\ a_6 = -2.0532 \\ a_7 = 2.0532 \\ a_8 = -4.1057 \\ a_9 = 3.0688 \times 10^{15} \\ a_{10} = -5.8538 \times 10^{15} \end{cases}$$

代入可得

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = & 3.0580 \times 10^{14} x^2 + 8.7370 \times 10^{15} y^2 - 3.5167 \times 10^{15} z^2 - 2.0532 \times 10^{15} xy - 1.0369 \times 10^{15} xz \\ & - 2.0532 \times 10^{15} yz + 2.0532 \times 10^{15} x - 4.1057 \times 10^{15} y + 7.5139 \times 10^{15} z - 5.8538 \times 10^{15} \end{aligned}$$

下面取点(1, 1, 1)与(1, 1, 0)二者的插值结果是-9.2490, -2.0532, 二者的精确值分别为2,  $\sqrt{3}$ , 因此通过计算得到的误差分别为  $m_1 = |2 - (-9.2490)| \approx 7.2490$ ,  $m_2 = |\sqrt{3} - (-2.0532)| \approx 3.7832$ 。

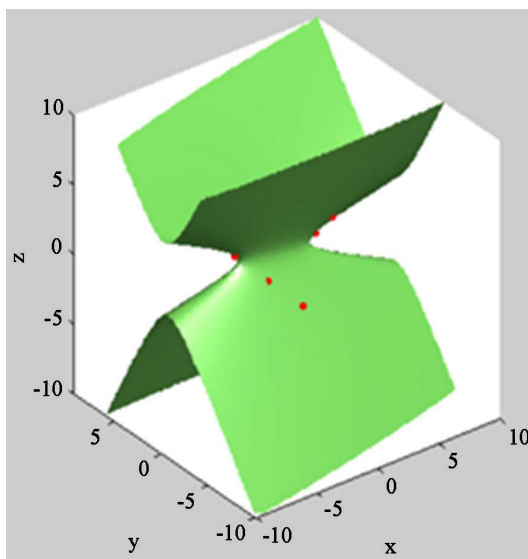


Figure 3. The effect picture of hyperbolic paraboloid point taking  
图3. 双曲抛物面取点效果图

### 3. 结语

本文在前部重点介绍了有关多元多项式插值的相关定义, 对定义于双曲抛物面上的 Lagrange 插值唯一可解结点组问题进行了研究, 提出了构造双曲抛物面上的 Lagrange 插值唯一可解结点组的相关定理, 最后选取三个不同的被插值函数与三个不同的双曲抛物面方程对有关的结论进行举例说明并对结论进行验证。随着时代的进步, 科技飞速发展, 国内外学者在计算数学领域都不断有了新的突破[5], 在现代社会的各个领域都广泛地存在着有关计算的问题, 例如交通运输、文化教育、工农业生产等, 同时, 插值问题无疑在计算数学领域占据着十分重要的地位, 有关多元多项式插值的问题经常被用来解决生活中的实际问



题, 例如在一些图像的处理、某些产品表面的曲面的拼接等方面都需要构建若干个模拟曲面来完成。因此, 在多元多项式插值的领域我们还需要不断的研究, 使多元多项式的插值在更大的范围内被应用并被不断完善。

### 参考文献

- [1] 刘飞. 机器人焊接精确轨迹规划的研究[D]: [硕士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2020.  
<https://doi.org/10.27351/d.cnki.gszhu.2020.001668>
- [2] 桂国祥, 刘雅芸. 双曲抛物面在实际生活中的应用[J]. 产业与科技论坛, 2018, 17(16): 52-53.
- [3] 刘海波. 二次曲面上的 Lagrange 插值问题研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 辽宁师范大学, 2018.
- [4] 荆科. 二元有理插值函数的构造新方法[J]. 赤峰学院学报(自然科学版), 2013, 29(6): 4-5.  
<https://doi.org/10.13398/j.cnki.issn1673-260x.2013.06.103>
- [5] 刘英娟, 董寒晖, 尹彦华, 韩静. 计算数学递推法应用路径研究[J]. 中国校外教育, 2014(S1): 383-384.