Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2022, 11(5), 2919-2926
Published Online May 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2022.115310

Hans汉斯

复矩阵的复对称性

贾思怡，刘思彤*，李　然

辽宁师范大学数学学院，辽宁　大连

收稿日期：2022年4月25日；录用日期：2022年5月19日；发布日期：2022年5月27日

摘　要

本文主要研究复矩阵的复对称问题。通过将2 × 2复矩阵转化为上三角矩阵，研究上三角矩阵的共轭算子，再根据原复矩阵酉等价于上三角矩阵以及它的每一个位置去构造共轭算子，使得这个复矩阵关于此共轭算子是复对称的，进而证明出任意2 × 2复矩阵都是复对称的。

关键词

复矩阵，共轭算子，复对称算子

Complex Symmetries of Complex Matrices

Siyi Jia, Sitong Liu*, Ran Li

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: Apr. 25th, 2022; accepted: May 19th, 2022; published: May 27th, 2022

Abstract

In this paper, complex symmetry of complex matrices is studied. By transforming 2 × 2 complex matrix into upper triangular matrix, the conjugate operator of the upper triangular matrix is studied, and then the conjugate operator is constructed according to the unitary equivalent of the original complex matrix to the upper triangular matrix and every position of it, so that the complex matrix is complex symmetric with respect to the conjugate operator, and then it is proved that any 2 × 2 complex matrix is complex symmetric.

Keywords

Complex Matrix, Conjugate Operator, Complex Symmetric Operator

*通讯作者。

文章引用: 贾思怡, 刘思彤, 李然. 复矩阵的复对称性[J]. 应用数学进展, 2022, 11(5): 2919-2926.
DOI: 10.12677/aam.2022.115310

1. 引言

矩阵理论和积分方程的研究推动了线性算子理论的发展。算子理论中的许多重要思想和概念都在矩阵分析中有它的“影子”或参照物。比如 Hilbert 空间上自伴算子的概念就源于实对称矩阵的概念。再比如 Toeplitz 算子就源于有限维矩阵中斜对角线元素均相同的矩阵。2006 年，Garcia 和 Putinar [1] [2]将复对称矩阵的概念抽象出来，推广到 Hilbert 空间上，引入了复对称算子的概念。

对于任意的 Hilbert 空间 H， $B(H)$表示 H 上的所有有界线性算子。H 上的共轭算子一般记为 C，满足

1) 共轭线性，即 $C(\lambda f)=\bar{\lambda}cf,\forall f\in H,\lambda\in\mathbb{C}$ 。
2) 对和运算，即 $C^2=I$ 。
3) 反等距，即 $\langle Cf,Cg\rangle=\langle g,f\rangle,\forall f,g\in H$ 。

若对 $\forall T\in B(H)$，存在共轭算子 C，使得 $CTC=T^*$，则 T 叫做 C-对称算子。所有的 C-对称算子称为复对称算子。

到目前为止，关于复对称算子的结构理论已经得到了许多让人印象深刻的结果，甚至在量子力学当中也有非常深刻的应用。例如计算或估计复对称算子的范数有助于对量子力学系统中薛丁格算子的研究。而计算复对称算子的范数就要依赖于复对称算子的豫解集。2008 年，Tener [3]刻画了什么时候 3 阶方阵酉等价于一个复对称算子。后来，Balayan 和 Garcia [4]运用特征值的结构去描述了有限维矩阵酉等价于一个复对称矩阵的条件。同年，Garcia [4]专门研究了有限维复对称矩阵的特征值和特征空间的结构。2011 年 Garcia，Poore，Wyse 和 Tener [5] [6]运用新的方法去刻画了方阵酉等价于一个复对称算子的条件。后来 Garcia 和 Wogen [7]证明了一个部分等距算子什么时候是一个复对称算子。与复对称算子很相像的就是复斜对称算子，即若对 $\forall T\in B(H)$，存在共轭算子 C，使得 $CTC=T^*$，则 T 叫作复斜对称算子。复斜对称算子在算子理论也有重要的应用。2012 年在参考文献[8]中，中国学者李春光对复对称算子的逼近和特殊算子类的复对称性进行研究。2021 年在参考文献[9]中，中国学者陈泳研究探讨 Bergman 空间上一类 H-Toeplitz 算子关于给定复共轭 C_α 的复对称性。

复对称算子提出的十几年来，随着越来越多的研究者对复对称算子算子本身及复对称算子在实际中应用等研究的深入，人们不再单纯地研究复对称算子本身性质，而是衍生出很多与复对称算子相关的课题，例如：与复对称算子具有结构相似的算子的研究。近来，复对称算子与其他特殊算子结合的相关研究也吸引了学者们的注意，H. Caleb，M. C. Thaddeus，T. Derek 在文章[10]中对双正规复对称算子进行了研究。

本文为了研究复矩阵的复对称问题，首先根据引理 1 将问题简化，即将 2×2 复矩阵转化为上三角矩阵，进一步探讨两种特定形式矩阵的共轭算子。而对于上三角矩阵，我们可以根据引理 2，3 将其进一步简化，得到了两种情况下的共轭算子。最后，由原复矩阵酉等价于上三角矩阵，得到 2×2 复矩阵的两种复对称算子。

2. 2×2 复矩阵是复对称的

引理 1 [11]：2×2 复矩阵都酉等价于上三角矩阵。

引理 2：形如

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵是 *C*-对称的，其中

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{2i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} & \dfrac{r\cdot\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} \\ \dfrac{r\cdot\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$\alpha = r\cdot\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{C}$，$r \in \mathbb{R}$ 表示 α 的模，θ 表示 α 的幅角。

证明：设

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对于矩阵 D，令 $U = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，使得 $UDU^* = G$，其中

$$G = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因此形如 $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的复矩阵都酉等价于实矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & |\alpha| \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

令

$$C_0\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} & \dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}} \\ \dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

显然 C_0 是共轭算子。

因此

$$\begin{aligned} C_0GC_0\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} &= C_0G\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} & \dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}} \\ \dfrac{r}{\sqrt{1+r^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} \\ &= C_0\begin{pmatrix} \sqrt{1+r^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} z_1 + rz_2 \\ 0 \end{pmatrix} = G^*\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

即 $C_0GC_0 = G^*$。从而 G 是 C_0-对称的。

令

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = U^*C_0U\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{e}^{2i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} & \dfrac{r\cdot\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} \\ \dfrac{r\cdot\mathrm{e}^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

则 $CDC = D^*$，则 D 是 C-对称的。

证毕。

引理 3：形如

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的矩阵是 C-对称的，其中 $\beta \in \mathbb{C}$，

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

证明：令

$$D = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对于矩阵 D，令

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

显然 C 是共轭算子。

因此

$$CDC\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = CD\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\beta z_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\beta z_1} \end{pmatrix} = D^*\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},$$

即 $CDC = D^*$，从而 D 是 C 对称的。

证毕。

有了引理 1 至引理 3，下面我们给出本文重要定理。

定理 4：对于 2 × 2 复矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，**令** $m = \dfrac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c}$。

1) 当 $(a-d)|m|^2 + 2cm + 2b\overline{m} - (a-d) \neq 0$ **时，A 是 C_1-对称的，其中**

$$C_1\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m^2 e^{2i\theta} - 2mre^{i\theta} - 1}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} & \dfrac{me^{2i\theta} + \overline{m} + \left(|m|^2-1\right)re^{i\theta}}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} \\ \dfrac{me^{2i\theta} + \overline{m} + \left(|m|^2-1\right)re^{i\theta}}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} & \dfrac{2\overline{m}re^{i\theta} - \overline{m}^2 + e^{2i\theta}}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

2) 当 $(a-d)|m|^2 + 2cm + 2b\overline{m} - (a-d) = 0$ **时，A 是 C_2-对称的，其中**

$$C_2\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2\overline{m}}{|m|^2+1} & \dfrac{|m|^2-1}{|m|^2+1} \\ \dfrac{|m|^2-1}{|m|^2+1} & \dfrac{-2m}{|m|^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

证明：由引理 1，可将复矩阵 A 酉等价为上三角矩阵 B。由参考文献[11]，存在酉矩阵

$$U=\begin{pmatrix}\dfrac{m}{\sqrt{|m|^2+1}} & -\dfrac{1}{\sqrt{|m|^2+1}}\\ \dfrac{1}{\sqrt{|m|^2+1}} & \dfrac{\bar{m}}{\sqrt{|m|^2+1}}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

使得

$$U^*AU=\begin{pmatrix}\dfrac{|m|^2a+mc+\bar{m}b+d}{|m|^2+1} & \dfrac{-\bar{m}a-c+(\bar{m})^2b+\bar{m}d}{|m|^2+1}\\ 0 & \dfrac{a-cm-b\bar{m}+d|m|^2}{|m|^2+1}\end{pmatrix}=B. \tag{7}$$

对于矩阵 B，将矩阵 B 分解

$$B=\begin{pmatrix}\dfrac{(a-d)|m|^2+2cm+2b\bar{m}-(a-d)}{|m|^2+1} & \dfrac{-\bar{m}a-c+(\bar{m})^2b+\bar{m}d}{|m|^2+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$+\begin{pmatrix}\dfrac{a-cm-b\bar{m}+d|m|^2}{|m|^2+1} & 0\\ 0 & \dfrac{a-cm-b\bar{m}+d|m|^2}{|m|^2+1}\end{pmatrix},$$

令

$$D=\begin{pmatrix}\dfrac{(a-d)|m|^2+2cm+2b\bar{m}-(a-d)}{|m|^2+1} & \dfrac{-\bar{m}a-c+(\bar{m})^2b+\bar{m}d}{|m|^2+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{cases}\dfrac{(a-d)|m|^2+2cm+2b\bar{m}-(a-d)}{|m|^2+1}D_1, & (a-d)|m|^2+2cm+2b\bar{m}-(a-d)\neq 0\\ D_2, & (a-d)|m|^2+2cm+2b\bar{m}-(a-d)=0\end{cases}$$

其中

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{-\bar{m}a-c+(\bar{m})^2b+\bar{m}d}{(a-d)|m|^2+2cm+2b\bar{m}-(a-d)}\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$D_2=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{-\bar{m}a-c+(\bar{m})^2b+\bar{m}d}{|m|^2+1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

则

$$B = D + \frac{a - cm - b\overline{m} + d|m|^2}{|m|^2 + 1} I, \tag{8}$$

当 $(a-d)|m|^2 + 2cm + 2b\overline{m} - (a-d) \neq 0$ 时，由引理 2 有，D_1 是 C'-对称的，其中

$$C'\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{2i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} & \frac{r \cdot e^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} \\ \frac{r \cdot e^{i\theta}}{\sqrt{1+r^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

因此 B 也是 C'-对称的。故 A 是 $UC'U^*$-对称的。令 $C_1 = UC'U^*$，则

$$C_1\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = UC'U^*\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m^2 e^{2i\theta} - 2mre^{i\theta} - 1}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} & \frac{me^{2i\theta} + \overline{m} + \left(|m|^2 - 1\right)re^{i\theta}}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} \\ \frac{me^{2i\theta} + \overline{m} + \left(|m|^2 - 1\right)re^{i\theta}}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} & \frac{2\overline{m}re^{i\theta} - \overline{m}^2 + e^{2i\theta}}{\left(|m|^2+1\right)\sqrt{1+a^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

因此 A 是 C_1-对称的。

当 $(a-d)|m|^2 + 2cm + 2b\overline{m} - (a-d) \neq 0$ 时，由引理 3，D_2 是 C''-对称的，其中

$$C''\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

因此 B 也是 C''-对称的。故 A 是 $UC''U^*$ 对称的。令 $C_2 = UC''U^*$，则有

$$C_2\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = UC''U^*\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\overline{m}}{|m|^2+1} & \frac{|m|^2-1}{|m|^2+1} \\ \frac{|m|^2-1}{|m|^2+1} & \frac{-2m}{|m|^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

因此 A 是 C_2-对称的。

证毕。

例 5：矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 3i & 4 \end{pmatrix}$ 为 C-对称矩阵，其中

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{-15+5\sqrt{15}i}{12} & \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{5\sqrt{15}+15i}{36} \\ \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{5\sqrt{15}+15i}{36} & \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{-15+5\sqrt{15}i}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

证明：由矩阵 A 可以计算出

$$m = \frac{a - d + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2c} = \frac{3i + \sqrt{15}}{6}.$$

因为 $(1-4) \times \left|\frac{3i+\sqrt{15}}{6}\right|^2 + 2 \times 3i \times \frac{3i+\sqrt{15}}{6} + 2 \times 2i \times \frac{\sqrt{15}-3i}{6} - (1-4) = \frac{5}{3}\sqrt{15}i \neq 0$，所以由定理 4(1)，矩阵

A 是 C-对称的，其中

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{-15+5\sqrt{15}i}{12} & \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{5\sqrt{15}+15i}{36} \\ \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{5\sqrt{15}+15i}{36} & \frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{-15+5\sqrt{15}i}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

例 6： 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ 为 C-对称矩阵，其中

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

证明：由矩阵 B 可以计算出

$$m = \frac{a-d+\sqrt{(a-d)^2+4bc}}{2c} = -i.$$

因为 $(2-0)\times|-i|^2+2\times i\times(-i)+2\times i\times i-(2-0)=0$，所以由定理 4(2)，矩阵 B 是 C-对称的，其中

$$C\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \overline{z_2} \end{pmatrix}.$$

3. 结论

本文以 2 × 2 复矩阵为例，研究了复矩阵的复对称性。利用 3 条引理可以将其化成上三角矩阵，得到了两种情况下的共轭算子，然后根据原复矩阵与上三角矩阵的酉等价关系，得到 2 × 2 复矩阵的两种复对称算子，从而证明了任意 2 × 2 复矩阵都是复对称的。最后，给出了两个仿真例子说明了本文方法的有效性。

致　谢

感谢老师在本次论文完成过程中对我们的悉心帮助，从选题到细节修改都离不开老师的付出。在本次研究过程中，增强了我们的逻辑思维能力并且激发了我们对数学本质的思考。本篇论文的完成离不开团队成员的合作，今后的学习过程中我们会以科学严谨的态度对待每一个数学问题。

基金项目

辽宁省教育厅青年项目 LQ2019017。

参考文献

[1] Garcia, S.R. and Putinar, M. (2006) Complex Symmetric Operators and Applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, **358**, 1285-1315. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-05-03742-6

[2] Garcia, S.R. and Putinar, M. (2007) Complex Symmetric Operators and Applications II. *Transactions of the American Mathematical Society*, **359**, 3913-3931. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-07-04213-4

[3] Tener, J.E. (2008) Unitary Equivalence to a Complex Symmetric Matrix: An Algorithm. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **341**, 640-648. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.10.029

[4] Balayan, L. and Garcia, S.R. (2010) Unitary Equivalence to a Complex Symmetric Matrix: Geometric Criteria. *Operators and Matrices*, **4**, 53-76. https://doi.org/10.7153/oam-04-02

[5] Garcia, S.R., Poore, D.E. and Wyse, M.K. (2011) Unitary Equivalence to a Complex Symmetric Matrix: A Modulus Criterion. *Operators and Matrices*, **5**, 273-287. https://doi.org/10.7153/oam-05-19

[6] Garcia, S.R., Poore, D.E. and Tener, J.E. (2012) Unitary Equivalence to a Complex Symmetric Matrix: Low Dimensions. *Linear Algebra and Its Applications*, **437**, 271-284. https://doi.org/10.1016/j.laa.2012.01.029

[7] Garcia, S.R. and Wogen, W.R. (2009) Complex Symmetric Partial Isometries. *Journal of Functional Analysis*, **257**, 1251-1260. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2009.04.005

[8] 李春光. 复对称算子及相关问题[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2012.

[9] 陈泳, 赖丽玲, 梁金金. 一类 H-Toeplitz 算子的复对称性[J]. 浙江科技学院学报, 2022, 34(1): 1-6+51.

[10] Holleman, C., McClatchey, T. and Thompson, D. (2017) Binormal, Complex Symmetric Operators. *Functional Analysis*. https://arxiv.org/abs/1705.04882

[11] 刘思彤, 贾思怡, 李然. 复矩阵的上三角化[J]. 理论数学, 2022, 12(4): 532-539. https://doi.org/10.12677/PM.2022.124059