

系数含有时滞的种群模型的动力学分析

沈 维*, 姚佳佳, 范宏卓

兰州交通大学数学系, 甘肃 兰州

收稿日期: 2022年4月27日; 录用日期: 2022年5月21日; 发布日期: 2022年5月31日

摘 要

考虑系数含有成熟离散时滞的种群模型。通过分析相应特征方程的根在复平面上的分布, 研究了模型平衡点的稳定性与Hopf分支。最后利用Matlab软件包对相应的理论结果进行了数值验证。

关键词

种群模型, 稳定性, 成熟时滞, Hopf分支

Dynamic Analysis of Population Models with Time-Delay Coefficients

Wei Shen*, Jiajia Yao, Hongzhuo Fan

Department of Mathematics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 27th, 2022; accepted: May 21st, 2022; published: May 31st, 2022

Abstract

A population model with mature discrete time delays is considered. The stability of the equilibrium point and the Hopf branch of the model are studied by analyzing the distribution of the roots of the corresponding characteristic equation on the complex plane. Finally, the corresponding theoretical results are verified by Matlab software package.

Keywords

Population Model, Stability, Mature Time Delay, Hopf Bifurcation

*第一作者。

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

种群生态学是以种群为研究对象的一门实验性的, 定量的, 理论性的学科, 它已然成为生态学的主流[1]。因其发展成熟并且具有复杂的动力学行为而受数学研究者的青睐。在数学理论与方法的基础上, 种群生态学成为最活跃的, 最具挑战性的一个领域。澳大利亚昆虫学家 Nicholson [2]根据绿头苍蝇种群变化的数据得到以下模型

$$N'(t) = bN(t-\tau)e^{-\frac{N(t-\tau)}{N_0}} - \delta N(t), \quad (1)$$

基于上式, Gurney 等人[3]提出了一个形式简单的时滞微分方程来解释绵羊绿头苍蝇种群的振荡行为

$$N'(t) = f(N(t-\tau)) - \gamma N(t). \quad (2)$$

2013年, Shu 等人[4]在(2)基础上考虑了种群在成熟过程中的死亡率, 由此得到了系数含有时滞的微分方程

$$N'(t) = e^{-\delta\tau} f(N(t-\tau)) - \gamma N(t). \quad (3)$$

各参数意义参看文献[4], 他们证明了该模型的 Hopf 分支只有有限的偶数个, 还描述了 Hopf 分支是如何配对的, 最后表明了具有特定振荡频率的周期解只能存在于有界延迟区间内。

Beretta [5]在 2016 年讨论了以下时滞模型

$$N'(t) = be^{-aN(t-\tau)}N(t-\tau)e^{-d_1\tau} - dN(t). \quad (4)$$

其参数意义见文献[5]。他不仅研究了离散时滞模型的平凡平衡点和正平衡点的局部稳定性, 还对具有连续分布时滞的模型进行了同样的分析。

在模型(4)的基础上, 本文将考虑系数含有成熟离散时滞的种群模型

$$\dot{u}(t) = e^{-\lambda\tau} (1-u(t-\tau))u(t-\tau) - \gamma u^2(t). \quad (5)$$

对系统(5)在平凡平衡点 $u_0 = 0$ 正平衡点 $u_+ = \frac{1}{1+\gamma e^{\lambda\tau}}$ 线性化, 讨论其特征方程的根在复平面上的分布,

进而分析模型平衡点的稳定性与 Hopf 分支。

2. 系统平衡点的稳定性

对系统(5)在某平衡点 \bar{u} 处线性化, 可得

$$\dot{u}(t) = e^{-\lambda\tau} (1-2\bar{u}(t))u(t-\tau) - 2\gamma\bar{u}(t)u(t), \quad (6)$$

其特征方程为

$$\dot{u}(t) = e^{-\lambda\tau} (1-2\bar{u}(t))e^{-\gamma\tau} - 2\gamma\bar{u}(t).$$

为了方便, 我们令

$$G(\lambda, \tau) = \lambda - e^{-\gamma\tau} (1-2\bar{u}(t))e^{-\lambda\tau} + 2\gamma\bar{u}(t) = 0. \quad (7)$$

下面考虑系统(5)在平凡平衡点 $u_0 = 0$ 的稳定性。将 u_0 带入特征方程(7)得

$$G_0(\gamma, \tau) = \lambda - e^{-(\gamma+\lambda)\tau} = 0. \quad (8)$$

(i) 当 $\tau = 0$ 时, $G_0(\lambda, 0) = \lambda - 1 = 0$, 即 $\lambda = 1 > 0$ 。此时, 系统(5)在平衡点 u_0 处是不稳定的。

(ii) 当 $\tau > 0$ 时, 假设方程(8)有一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$)。现令 $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$), 于是

$$G_0(i\omega, \tau) = i\omega - e^{-(\gamma+i\omega)\tau} = 0,$$

化简得

$$G_0(i\omega, \tau) = i\omega - e^{-\gamma\tau} \cos \omega\tau + ie^{-\gamma\tau} \sin \omega\tau = 0. \quad (9)$$

分离方程(9)的实部和虚部

$$\begin{cases} -\omega = e^{-\gamma\tau} \sin \omega\tau, \\ 0 = e^{-\gamma\tau} \cos \omega\tau. \end{cases} \quad (10)$$

则 ω 满足以下方程

$$\omega^2 = e^{-2\gamma\tau},$$

从而得到

$$\omega = e^{-\gamma\tau} > 0. \quad (11)$$

由方程(10)可得相应于 ω 的 τ 的值为

$$\tau_j = \frac{1}{\omega} \left[\arcsin \left(\frac{-\omega}{e^{-\gamma\tau}} \right) + 2j\pi \right], j \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (12)$$

由文献[6] [7] [8]知, 下面判断 $\frac{d\operatorname{Re}(\lambda(\tau))}{d\tau}$ 的符号。由(8)可得

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \tau + \lambda + \gamma \right) e^{-(\gamma+\lambda)\tau} + \frac{d\lambda}{d\tau} = 0, \quad (13)$$

于是在 $\tau = \tau_0$ 处,

$$\left[\frac{d(\operatorname{Re} \lambda(\tau))}{d\tau} \right]^{-1} \Big|_{\tau=\tau_0} = \frac{\gamma\pi}{2\omega(\gamma^2 + \omega^2)} + \frac{\omega e^{\frac{\gamma\pi}{\omega}}}{(\omega^2 e^{-2\gamma\tau} + \gamma^2 e^{-2\gamma\tau}) \sin^2 \omega\tau} > 0. \quad (14)$$

综合上述分析, 系统(5)在平凡平衡点 u_0 处是不稳定的。

接下来, 我们将讨论系统(5)在正平衡点 u_+ 处的稳定性。现将 $u_+ = \frac{1}{1+\gamma e^{\gamma\tau}}$ 代入方程(7), 可得

$$G_+(\lambda, \tau) = \lambda - e^{-\gamma\tau} \left(1 - \frac{2}{1+\gamma e^{\gamma\tau}} \right) e^{-\lambda\tau} + \frac{2\gamma}{1+\gamma e^{\gamma\tau}} = 0.$$

(i) 当 $\tau = 0$ 时, $G_+(\lambda, 0) = \lambda + 1 = 0$, 即 $\lambda = -1 < 0$ 。此时, 系统(5)在正平衡点 u_+ 处是稳定的。

(ii) 当 $\tau > 0$ 时, $G_+(\lambda, \tau)$ 整理得

$$G_+(\lambda, \tau) = \lambda - A(\tau) e^{-\lambda\tau} + B(\tau) = 0. \quad (15)$$

其中

$$A(\tau) = \frac{\gamma - e^{-\gamma\tau}}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}}, B(\tau) = \frac{2\gamma}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}}.$$

假设 $G_+(\lambda, \tau)$ 有一对纯虚根 $\lambda = \pm i\omega(\tau)$ ($\omega(\tau) > 0$)。现将 $\lambda = i\omega(\tau)$ ($\omega(\tau) > 0$) 代入特征方程(15)得

$$G_+(i\omega(\tau), \tau) = i\omega(\tau) - A(\tau)e^{-i\omega(\tau)\tau} + B(\tau) = 0. \quad (16)$$

分离方程(16)的实部和虚部

$$\begin{cases} \omega = -A(\tau) \sin \omega(\tau)\tau, \\ B(\tau) = A(\tau) \cos \omega(\tau)\tau. \end{cases}$$

于是, 当满足条件(L) $0 < \gamma < \frac{1}{3}, \tau < -\frac{1}{\gamma} \ln(3\gamma) = \tau_\omega$ 时,

$$\omega(\tau) = \frac{1}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}} \sqrt{(3\gamma - e^{-\gamma\tau})(-\gamma - e^{-\gamma\tau})} > 0. \quad (17)$$

我们注意到, 函数 $\omega(\tau)$ 是连续的且在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 上是正的。于是就有

$$\omega(0) = \frac{1}{1 + \gamma} \sqrt{(3\gamma - 1)(-\gamma - 1)} > 0,$$

并且 $\omega(\tau_\omega) = 0$ 。又

$$\omega'(\tau) = \frac{\gamma(3\gamma^2 e^{2\gamma\tau} - 1)e^{-2\gamma\tau}}{\sqrt{e^{-2\gamma\tau}(1 - 3\gamma e^{\gamma\tau})(\gamma e^{\gamma\tau} + 1)}(1 + \gamma e^{\gamma\tau})} < 0,$$

那么对于 $\tau \in (0, \tau_\omega)$,

$$\omega'(0) = \frac{\gamma(3\gamma^2 - 1)}{\sqrt{(1 - 3\gamma)(\gamma + 1)}(1 + \gamma)} < 0,$$

以及

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_\omega} \omega'(\tau) = -\infty. \quad (18)$$

且有

$$\omega''(\tau) = \frac{e^{-2\gamma\tau}(-9\gamma^6 e^{4\gamma\tau} + 6\gamma^5 e^{3\gamma\tau} + 6\gamma^4 e^{2\gamma\tau} + 2\gamma^3 e^{\gamma\tau} - \gamma^2)}{(3\gamma e^{\gamma\tau} - 1)(1 + \gamma e^{\gamma\tau})^3 \sqrt{\frac{(1 - 3\gamma e^{\gamma\tau})e^{-2\gamma\tau}}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}}}}.$$

引理 1 对于某个 $k \in N_0$, 如果 $S_k(\tilde{\tau}) = 0$, 则在 $\tau = \tilde{\tau}$ 时, 方程(15)存在一对简单的共轭虚根 $\tilde{\lambda} = \pm i\omega(\tilde{\tau})$, 其中

$$S_k(\tau) = \tau - \frac{(2k+1)\pi}{\omega(\tau)} + \frac{1}{\omega(\tau)} \arctan \frac{\omega(\tau)(1 + \gamma e^{\gamma\tau})}{2\gamma}, \quad (19)$$

定义在 $(0, \tau_\omega)$ 上, ω 由(17)给出。并且有横截条件[9][10][11]

$$\text{sign} \left(\left. \frac{d \text{Re}(\lambda)}{d\tau} \right|_{\lambda=\tilde{\lambda}} \right) = \text{sign} \left(\left. \frac{dS_k(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau=\tilde{\tau}} \right). \quad (20)$$

证明 由方程(16)可知

$$\left(i\omega(\tau) + \frac{2\gamma}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}} \right) e^{i\omega\tau} = \frac{\gamma - e^{-\gamma\tau}}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}} < 0,$$

于是

$$\arg \left[\left(i\omega + \frac{2\gamma}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}} \right) e^{i\omega\tau} \right] = (2k+1)\pi.$$

又

$$\arg \left[\left(i\omega + \frac{2\gamma}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}} \right) e^{i\omega\tau} \right] = \arctan \left(\frac{\omega(1 + \gamma e^{\gamma\tau})}{2\gamma} \right) + \omega(\tau)\tau, \quad (21)$$

因此就得到方程(19)。

由 S_k 定义知, 对于任意的 $\tau \in (0, \tau_\omega)$, 有 $S_0(\tau) > S_k(\tau) (k \in N)$, 并且

$$S_0(0) = \frac{1}{\omega(0)} \left[\arctan \frac{\omega(0)(1 + \gamma)}{1 + \gamma} - \pi \right] < 0. \quad (22)$$

又因为

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_\omega} S_0(\tau) = -\infty. \quad (23)$$

因此, 如果 $S_0(\tau)$ 在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 没有零解, 则 u_+ 对于所有的 $\tau \in [0, \tau_\omega)$ 是局部渐近稳定的; 如果 $S_0(\tau)$ 在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 的某一区间内有零解, 则由文献[5]知

定理 2 如果 d, γ 满足

$$\left(\frac{\ln d}{\gamma + \gamma^2 d} \right)^2 \left(\frac{1}{d} - 3\gamma \right) \left(\gamma + \frac{1}{d} \right) > \pi^2, \quad (24)$$

其中 $d = e^{\gamma\tau}$, 则 S_0 在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 某区间内是正的。

证明 S_0 在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 某区间内是正的充分条件是 $\tau\omega(\tau) > \pi$, 它等价于

$$\left(\frac{\ln d}{\gamma + \gamma^2 d} \right)^2 \left(\frac{1}{d} - 3\gamma \right) \left(\gamma + \frac{1}{d} \right) > \pi^2,$$

则 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 得到在 $d \in \left(1, \frac{1}{3\gamma} \right)$, 此时 S_0 是正的。

定理 3 如果 d, γ 满足方程(24), 那么必然存在 $\tau_1, \tau_2 \in (0, \tau_\omega) (\tau_1 < \tau_2)$ 使得 u_+ 在 $\tau \in [0, \tau_1) \cup (\tau_2, \tau_\omega)$ 局部渐近稳定, 在 $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ 不稳定, 并且在 $[0, \tau_\omega)$ 发生两次 Hopf 分支。

证明 由(22) (23)和定理 2 知, $S_0(\tau)$ 至少有两个零解 τ_1, τ_2 。由(19)得到

$$S_0'(\tau) = 1 + \frac{\omega'(\tau)}{\omega^2(\tau)} \left[\pi - \arctan \left(\frac{\omega(\tau)}{d(\tau)} \right) + \frac{d(\tau)\omega(\tau)}{\omega^2(\tau) + d^2(\tau)} \right] - \frac{d'(\tau)}{\omega^2(\tau) + d^2(\tau)},$$

其中 $d(\tau) = \frac{2\gamma}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}}$, 并且

$$S_0''(\tau) = \frac{A_1(\tau)}{\omega^3(\tau)} + \frac{A_2(\tau)}{d(\tau)\omega^2(\tau)(\omega^2(\tau) + d^2(\tau))} + A_3(\tau),$$

其中 $A_1(\tau) = \omega''(\tau)\omega(\tau) - 2\omega'^2(\tau)$,

$$A_2(\tau) = -\frac{2\left(\frac{\omega'(\tau)}{d(\tau)} - \frac{\omega(\tau)d'(\tau)}{d^2(\tau)}\right)\omega'(\tau)}{\omega^2(\tau)\left(\frac{\omega^2(\tau)}{d^2(\tau)} + 1\right)} + \frac{\frac{\omega''(\tau)}{d(\tau)} - \frac{2\omega'(\tau)d'(\tau)}{d^2(\tau)} + \frac{2\omega(\tau)d''(\tau)}{d^3(\tau)} - \frac{\omega(\tau)d''(\tau)}{d^2(\tau)}}{\omega(\tau)\left(\frac{\omega^2(\tau)}{d^2(\tau)} + 1\right)},$$

$$A_3(\tau) = -\frac{\left(\frac{\omega'(\tau)}{d(\tau)} - \frac{\omega(\tau)d'(\tau)}{d^2(\tau)}\right)\left(\frac{2\omega'(\tau)\omega'(\tau)}{d^2(\tau)} - \frac{2\omega^2(\tau)d'(\tau)}{d^3(\tau)}\right)}{\omega(\tau)\left(\frac{\omega^2(\tau)}{d^2(\tau)} + 1\right)^2} = -\frac{2(\omega'(\tau)d(\tau) - \omega(\tau)d'(\tau))^2\omega(\tau)}{d^5(\tau)\omega(\tau)\left(\frac{\omega^2(\tau)}{d^2(\tau)} + 1\right)^2} < 0.$$

将(17)分别代入 $A_1(\tau), A_2(\tau)$ 得到

$$A_1(\tau) = \frac{\gamma^2 e^{-2\gamma\tau} (9e^{4\gamma\tau} \gamma^4 + 6e^{3\gamma\tau} \gamma^3 - 6e^{2\gamma\tau} \gamma^2 + 2\gamma e^{\gamma\tau})}{3\left(\gamma e^{\gamma\tau} - \frac{1}{3}\right)(1 + \gamma e^{\gamma\tau})^3} < 0,$$

$$A_2(\tau) = \frac{12e^{\gamma\tau} \gamma^7 - 4e^{-2\gamma\tau} \gamma^4 (e^{2\gamma\tau} \gamma^2 - \gamma e^{\gamma\tau} - 1)}{(3\gamma e^{\gamma\tau} - 1)(1 + \gamma e^{\gamma\tau})^5} < 0.$$

于是可得 $S_0''(\tau) < 0$, 由此表明零解 τ_1, τ_2 是唯一存在的, 并且 $S_0'(\tau_1) > 0$, $S_0'(\tau_2) < 0$ 。由文献[5] [9] [10] [11]知在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 存在两个 Hopf 分支: 稳定性通过 τ_1 由稳定变为不稳定, 通过 τ_2 由不稳定变为稳定。

我们根据上述类似的方法, 基于不同于方程(19)的函数, 参照(21), 在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 内定义下面函数

$$\varphi(\tau) = \omega(\tau)\tau + \arctan\left(\frac{\omega(\tau)(1 + \gamma e^{\gamma\tau})}{2\gamma}\right). \quad (25)$$

通过方程(19)的零解寻找稳定性切换等价于找到以下方程的解

$$\varphi(\tau) = (2k+1)\pi. \quad (26)$$

由(17)知 $\omega(\tau) > 0$, 并结合(19), 有

$$\omega(\tau)S_k(\tau) = \varphi(\tau) - (2k+1)\pi. \quad (27)$$

那么之前所有基于 S_k 的结果都可以用 φ 来等价证明。由(20)知

$$\text{sign}\left(\frac{d\text{Re}(\lambda)}{d\tau}\bigg|_{\lambda=\lambda_*}\right) = \text{sign}\left(\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_*}\right). \quad (28)$$

显然在 $\tau \in (0, \tau_\omega)$ 上 φ 是连续且正的, 其中 $\varphi(0) = \arctan\frac{\sqrt{(1-3\gamma)(1+\gamma)}}{2\gamma} > 0$ 且 $\varphi(\tau_\omega) = 0$ 。

于是有

$$\varphi'(\tau) = \omega'(\tau)\tau + \omega(\tau) + \frac{d(\tau)\omega'(\tau) - d'(\tau)\omega(\tau)}{d^2(\tau) + \omega^2(\tau)}, \quad (29)$$

其中 $d(\tau) = \frac{2\gamma}{1 + \gamma e^{\gamma\tau}}$, 计算可得

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau_\omega} \varphi'(\tau) = -\infty,$$

$$\varphi'(0) = \omega(0) + \frac{d(0)\omega'(0) - d'(0)\omega(0)}{d^2(0) + \omega^2(0)} = \frac{\gamma^2 - 4\gamma + 1}{\sqrt{-3\gamma^2 - 2\gamma + 1}(\gamma - 1)}. \quad (30)$$

并有

$$\varphi''(\tau) = 2\omega'(\tau) + \omega''(\tau)\tau + \frac{\omega''(\tau)d(\tau) - \omega(\tau) - \omega(\tau)d''(\tau)}{d^2(\tau) + \omega^2(\tau)} - \frac{2(\omega'(\tau)d(\tau) - \omega(\tau)d'(\tau))(d(\tau)d'(\tau) + \omega(\tau)\omega'(\tau))}{(d^2(\tau) + \omega^2(\tau))^2}. \quad (31)$$

定理 4 当满足条件(L)时, $\varphi''(\tau) < 0$ 。

证明 将(31)整理得

$$\varphi''(\tau) = \frac{f(\tau)}{\sqrt{-3\left(\gamma e^{\gamma\tau} - \frac{1}{3}\right)(1 + \gamma e^{\gamma\tau})e^{-2\gamma\tau}(\gamma^2 e^{2\gamma\tau} - 1)^2(3\gamma e^{\gamma\tau} - 1)}},$$

其中

$$f(\tau) = -4\gamma^4(\gamma\tau - 8)e^{\gamma\tau} - 15\gamma^5\left(\gamma\tau + \frac{22}{15}e^{2\gamma\tau}\right) - \gamma e^{-2\gamma\tau}(9\gamma^7 e^{6\gamma\tau}\tau - 24\gamma^6 e^{5\gamma\tau}\tau - 12\gamma^6 e^{6\gamma\tau} + 32\gamma^5 e^{5\gamma\tau} - \gamma^3 e^{2\gamma\tau}\tau - 4\gamma^2 e^{\gamma\tau}\tau + \gamma\tau + 8\gamma e^{\gamma\tau}\tau - 2).$$

又

$$f'(\tau) = \gamma^5 t^{-2}(-36t^6 + 72t^5 - 30t^4 - 4t^3 - 4t + 2)\tau + \gamma^4 t^{-2}(39t^6 - 72t^5 - 59t^4 + 28t^3 + t^2 + 12t + 5),$$

其中 $t = \gamma e^{\gamma\tau}$, 令 $T_1 = -36t^6 + 72t^5 - 30t^4 - 4t^3 - 4t + 2$, $T_2 = 39t^6 - 72t^5 - 59t^4 + 28t^3 + t^2 + 12t + 5$, 参看图 1(a), 图 1(b)。故在 $t \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ 上, $f'(\tau) > 0$ 。从而 $f(\tau)$ 是单调递增的, 且

$f(\tau) \geq f(0) = \gamma(12\gamma^6 - 32\gamma^5 - 22\gamma^4 + 32\gamma^3 - 8\gamma + 2) > 0$, 参看图 2。又 $3\gamma e^{\gamma\tau} - 1 < 0$, 故 $\varphi''(\tau) < 0$ 。

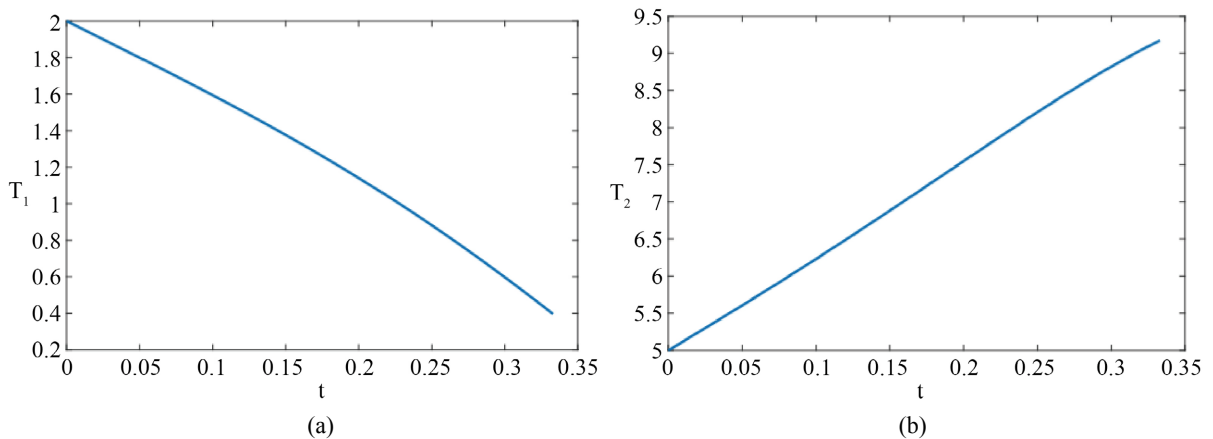


Figure 1. Function graph of $T_i(i=1,2)$ and t

图 1. $T_i(i=1,2)$ 与 t 的函数图像

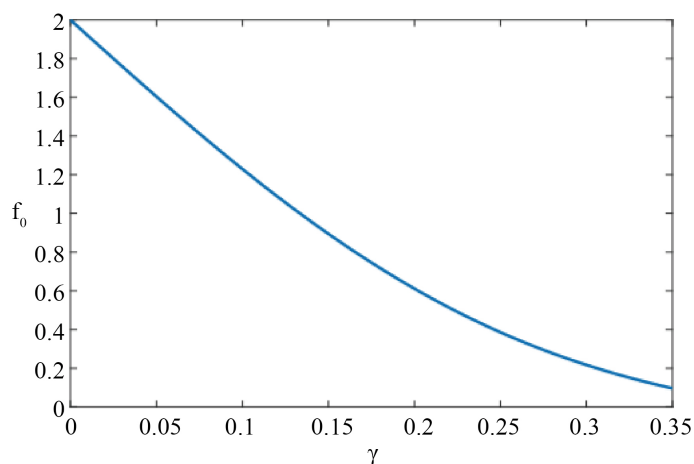


Figure 2. Function graph of $f(0)$ and γ

图 2. $f(0)$ 与 γ 的函数图像

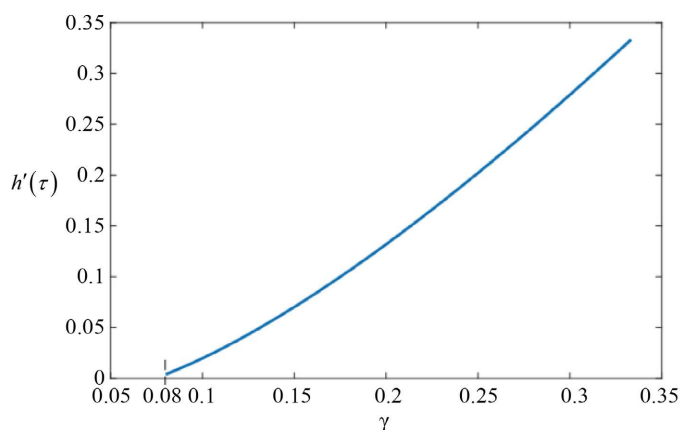


Figure 3. Function graph of $h'(\tau)$ and γ

图 3. $h'(\tau)$ 与 γ 的函数图像

由(30)可得以下两种情况

(H1) $2 - \sqrt{3} < \gamma < \frac{1}{3}$, 使得 $\varphi'(0) < 0$ 。

(H2) $0 < \gamma < 2 - \sqrt{3}$, 使得 $\varphi'(0) > 0$ 。

定理 5 条件(H1)成立下, 对于 $\tau \in [0, \tau_\omega)$, 系统(5)在正平衡点 u_+ 是局部渐近稳定的。

证明 将 $\omega(\tau)$, $\omega'(\tau)$, $d(\tau)$ 代入(29)得

$$\varphi'(\tau) = \frac{e^{-2\gamma\tau} (3\gamma^4 \tau e^{3\gamma\tau} - \gamma^3 e^{3\gamma\tau} - 3\gamma^3 \tau e^{2\gamma\tau} + 3\gamma^2 e^{2\gamma\tau} - \gamma^2 \tau e^{\gamma\tau} + 3\gamma e^{\gamma\tau} + \gamma\tau - 1)}{\sqrt{-3 \left(\gamma e^{\gamma\tau} - \frac{1}{3} \right) (1 + \gamma e^{\gamma\tau}) e^{-2\gamma\tau} (\gamma^2 e^{2\gamma\tau} - 1)}}, \quad (32)$$

令 $h(\tau) = 3\gamma^4 \tau e^{3\gamma\tau} - \gamma^3 e^{3\gamma\tau} - 3\gamma^3 \tau e^{2\gamma\tau} + 3\gamma^2 e^{2\gamma\tau} - \gamma^2 \tau e^{\gamma\tau} + 3\gamma e^{\gamma\tau} + \gamma\tau - 1$, 对 h 关于 τ 求导, 整理得

$$h'(\tau) = (9\gamma^5 e^{3\gamma\tau} \tau - 6\gamma^4 e^{2\gamma\tau} - \gamma^3 e^{\gamma\tau}) \tau + 3\gamma^3 e^{2\gamma\tau} + 2\gamma^2 e^{\gamma\tau} + \tau \geq \gamma \left(1 + \frac{2}{3} \ln(3\gamma) \right), \quad (33)$$

计算发现当 $\gamma > 0.08$, $\gamma\left(1 + \frac{2}{3}\ln(3\gamma)\right) > 0$, 参看图 3, 即 $h'(\gamma, \tau) > 0$, 从而 $h(\gamma, \tau)$ 在 $(0, \tau_\omega)$ 递增, 故 $h(\gamma, \tau) > h(\gamma, 0)$ 。由于 $h(\gamma, 0) = -\gamma^3 + 3\gamma^2 + 3\gamma - 1$, 计算发现当 $\gamma \in \left(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$, $h(\gamma, \tau) > 0$ 。又因为 $\gamma^2 e^{2\gamma\tau} - 1 < 0$, 从而 $\varphi'(\tau) < 0$ 。

由此可得, 当 $\gamma \in \left(2 - \sqrt{3}, \frac{1}{3}\right)$ 时, $\varphi(\tau)$ 在 $[0, \tau_\omega)$ 递减, 即 $\varphi(\tau) \leq \varphi(0) < \frac{\pi}{2}$ 。因此找不到一个 $k \in N_0$, 使得 $\varphi(\tau)$ 有解, 也就不会产生稳定性切换, 从而 u_+ 是局部渐近稳定的。

定理 6 条件(H2)成立下, 根据定理 4, 令 $\bar{k} \in Z$ 是使得 $\varphi(\tau) > (2k+1)\pi$ 成立的最大整数。

(i) 如果 $\bar{k} < 0$, 那么 u_+ 在 $\tau \in [0, \tau_\omega)$ 上是局部渐近稳定的。

(ii) 如果 $\bar{k} \geq 0$, 那么存在两列 τ 值: $\{\tau_1, k\}_{k=0,1,\dots,\bar{k}}$ 和 $\{\tau_2, k\}_{k=0,1,\dots,\bar{k}}$ 分别在 $(0, \tau_\omega)$ 上递增和递减并且趋近于 τ_* , 即

$$\tau_{1,0} < \tau_{1,1} < \dots < \tau_{1,\bar{k}} < \tau_* < \tau_{2,\bar{k}} < \dots < \tau_{2,1} < \tau_{2,0},$$

使得

$$\text{sign}\left(\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_{1,k}}\right) > 0, \text{sign}\left(\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_{2,k}}\right) < 0, k = 0, 1, \dots, \bar{k},$$

于是, (i) 当 $\tau \in [0, \tau_{1,0}) \cup (\tau_{2,0}, \tau_\omega)$ 时, u_+ 是局部渐近稳定的; (ii) 当 $\tau \in (\tau_{1,0}, \tau_{2,0})$ 时, u_+ 是不稳定的; (iii) 在 $\tau_{1,0}, \tau_{2,0}$ 处出现 Hopf 分支。

3. 数值模拟

这一节借助 Matlab 软件包验证以上所获得的理论结果。

例 1 参数 $\gamma = 0.07$ 满足条件(L), 取 $d = 3$ 满足 $\left(\frac{\ln d}{\gamma + \gamma^2 d}\right)^2 \left(\frac{1}{d} - 3\gamma\right) \left(\gamma + \frac{1}{d}\right) = 67.8556 \dots > 9.8698 \dots = \pi^2$ 。

由定理 3 知, S_0 存在两个零点 τ_1, τ_2 使得在这两个零点处产生 Hopf 分支(见图 4)。

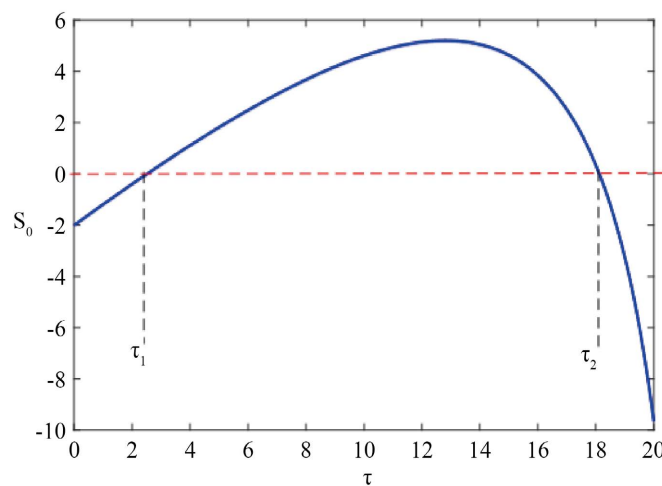


Figure 4. The graph of τ as a function of S_0 when $\gamma = 0.07$

图 4. $\gamma = 0.07$ 时, τ 随 S_0 的变化图

例 2 参数 $\gamma = 0.27$ 满足条件(H1), 有 $\tau_\omega = 0.7804$, 由定理 5 知, u_+ 是局部渐近稳定的(见图 5)。

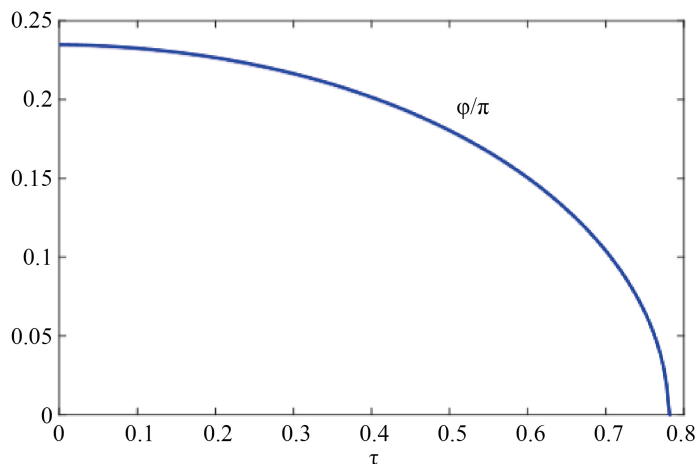


Figure 5. The graph of τ as a function of $\frac{\varphi}{\pi}$ when $\gamma = 0.27$

图 5. $\gamma = 0.27$ 时, τ 随 $\frac{\varphi}{\pi}$ 的变化图

例 3 参数 $\gamma = 0.08$ 满足条件(H2), 有 $\tau_\omega = 17.839$, 此时 $\bar{k} = 0$, 并且 $\tau_{1,0} = 2.8232$, $\tau_{2,0} = 13.4960$ 。由定理 6 知, u_+ 在 $\tau \in [0, \tau_{1,0}) \cup (\tau_{2,0}, \tau_\omega)$ 是稳定的; u_+ 在 $\tau \in (\tau_{1,0}, \tau_{2,0})$ 是不稳定的, 并且在 $\tau_{k,0}$ ($k = 1, 2$) 出现 Hopf 分支(见图 6)。

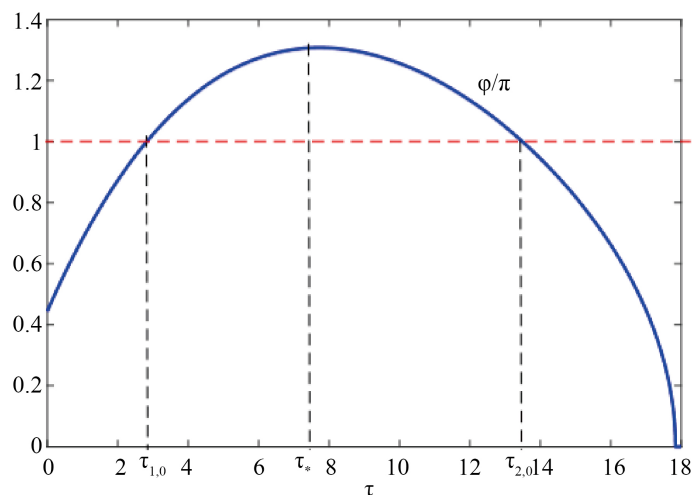


Figure 6. The graph of τ as a function of $\frac{\varphi}{\pi}$ when $\gamma = 0.08$

图 6. $\gamma = 0.08$ 时, τ 随 $\frac{\varphi}{\pi}$ 的变化图

例 4 参数 $\gamma = 0.02$ 满足条件(H2), 有 $\tau_\omega = 140$, 此时 $\bar{k} = 2$, 并且 $\tau_{1,0} = 1.7425$, $\tau_{2,0} = 135.0865$, $\tau_{1,1} = 10.1915$, $\tau_{2,1} = 106.3369$, $\tau_{1,2} = 25.1663$, $\tau_{2,2} = 70.8744$ 。由定理 6 知, u_+ 在 $\tau \in [0, \tau_{1,0}) \cup (\tau_{2,0}, \tau_\omega)$ 是稳定的; u_+ 在 $\tau \in (\tau_{1,0}, \tau_{2,0})$ 是不稳定的, 并且在 $\tau_{k,0}$ ($k = 1, 2$) 出现 Hopf 分支(见图 7)。

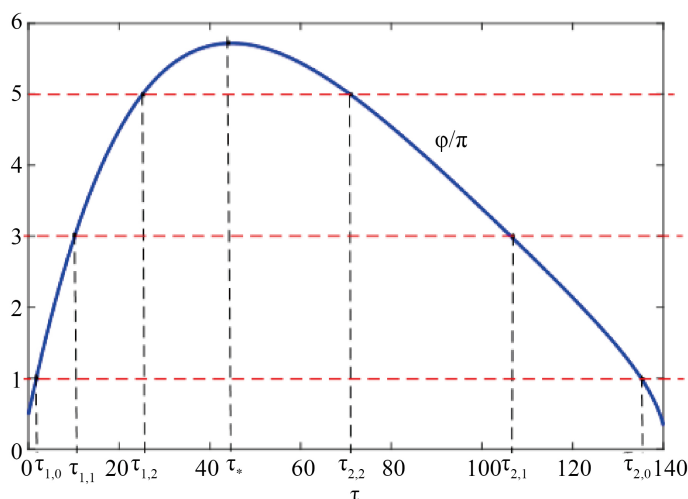


Figure 7. The graph of τ as a function of $\frac{\varphi}{\pi}$ when $\gamma = 0.02$

图 7. $\gamma = 0.02$ 时, τ 随 $\frac{\varphi}{\pi}$ 的变化图

基金项目

甘肃省优秀研究生“创新之星”项目(2021CXZX-595); 国家自然科学基金项目(615630224)。

参考文献

- [1] Jiang, Z.C. and Zhang, W.Z. (2010) Bifurcation Analysis in Single-Species Population Model with Delay. *Science China Mathematics*, **53**, 1475-1481. <https://doi.org/10.1007/s11425-010-4008-5>
- [2] Nicholson, A.J. (1954) Compensatory Reactions of Populations to Stresses, and Their Evolutionary Significance. *Australian Journal of Zoology*, **2**, 1-8. <https://doi.org/10.1071/ZO9540001>
- [3] Gurney, M.S., Blythe, S.P. and Nisbee, R.M. (1980) Nicholson's Blowflies Revisited. *Nature*, **287**, 17-21. <https://doi.org/10.1038/287017a0>
- [4] Shu, H.Y., Wang, L. and Wu, J.H. (2013) Global Dynamics of Nicholson's Blowflies Equation Revisited: Onset and Termination of Nonlinear Oscillations. *Journal of Differential Equations*, **255**, 2565-2586. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.06.020>
- [5] Beretta, E. (2016) Discrete or Distributed Delay? Effects on Stability of Population Growth. *Mathematical Biosciences and Engineering*, **13**, 19-41. <https://doi.org/10.3934/mbe.2016.13.19>
- [6] Wang, S.F., Tang, H.P. and Ma, Z.H. (2021) Hopf Bifurcation of a Multiple-Delayed Predator-Prey System with Habitat Complexity. *Mathematics and Computers in Simulation*, **180**, 1-23. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.08.008>
- [7] Meng, X.Y., Huo, H.F. and Zhang, X.B. (2011) Stability and Global Hopf Bifurcation in a Delayed Food Web Consisting of a Prey and Two Predators. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **16**, 4335-4348. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2011.03.009>
- [8] Song, Y.L., Han, M.A. and Wei, J.J. (2005) Stability and Hopf Bifurcation Analysis on a Simplified BAM Neural Network with Delays. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **200**, 185-204. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2004.10.010>
- [9] 沈维, 姚佳佳. 具有收获率和 Holling-II 型功能反应函数的时滞系统的定性分析[J]. 内江师范学院学报, 2021, 36(10): 36-41.
- [10] 沈维. 时滞双向联想记忆神经网络模型的稳定性与 Hopf 分支[J]. 内江师范学院学报, 2020, 35(12): 27-31.
- [11] Yan, X.P. and Li, W.T. (2007) Bifurcation and Global Periodic Solutions in a Delayed Facultative Mutualism System. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **227**, 51-69. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2006.12.007>